Kriteria neabsolutní konvergence

Leibhitz Nechť a_k je nezáporná nerostoucí a nechť $a_k \xrightarrow{k\to\infty} 0$. Pak konverguje řada

$$\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k a_k .$$

Dirichlet Nechť a_k je nezáporná, nerostoucí a $a_k \xrightarrow{k\to\infty} 0$. Dále nechť existuje $C \in \mathbb{R}$ takové, že

$$\left|\sum_{k=0}^{n} b_k\right| \leq C$$ pro všechny n. Pak konverguje

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k b_k .$$

Abel Nechť a_k je monotónní a omezená. Dále nechť konverguje $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$. Pak konverguje i

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k b_k .$$

Omezenost částečných součtů $\sin(kx)$ a $\cos(kx)$. Uděláme to zároveň pro oba tím že omezíme reálnou i imaginární část následující

$$\sum_{k=0}^{n} \cos(kx) + i\sin(kx) = \sum_{k=0}^{n} e^{ikx} = \frac{1-e^{i(n+1)x}}{1-e^{ix}}$$

$$= \frac{\left(1-e^{i(n+1)x}\right)\left(1-e^{-ix}\right)}{\left(1-e^{ix}\right)\left(1-e^{-ix}\right)} = \frac{\left(1-e^{i(n+1)x}\right)\left(1-e^{-ix}\right)}{2\left(1-\cos x\right)}.$$

Čitatel je v absolutní hodnotě omezený 4. Tudíž je

$$\left|\sum_{k=0}^{n} \cos(kx)\right|, \left|\sum_{k=0}^{n} \sin(kx)\right| \leq \frac{2}{1-\cos x}.$$

Navíc je $\sin k\pi \equiv 0$ a $\cos(k\pi) = (-1)^k$.

Př $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{5-\sqrt{k}}{k}$

Přístup 1: Leibnitz a oříznutí

$$\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k \frac{5-\sqrt{k}}{k} = \sum_{k=1}^{25}(-1)^k \frac{5-\sqrt{k}}{k} + \sum_{k=26}^{\infty}(-1)^k \frac{5-\sqrt{k}}{k}$$

První řada je konečná. Na druhou chceme použít Leibnitze je třeba dokázat že $\dfrac{\sqrt{k}-5}{k}$ je nezáporné a nerostoucí protože zřejmě má limitu 0. Počítejme

$$\left(\frac{\sqrt{x}-5}{x}\right)' = \frac{\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{x}}x - \sqrt{x} + 5}{x^2} = \frac{5 - \frac{\sqrt{x}}{2}}{x^2},$$

což je záporná jakmile $x > 100$*. Zřejmě $\dfrac{\sqrt{k}-5}{k}$ je nezáporná jakmile $k > 25$.

* Smysl toho je že $a_k = f(k) = \dfrac{\sqrt{k}-5}{k}$. Jelikož $f'(x) < 0$ pro $x > 100$, je f klesající a tudíž i a_k.

Tudíž konverguje $\displaystyle\sum_{k=101}^{\infty}(-1)^k \frac{5-\sqrt{k}}{k}$.

Zbytek řady $k = 1, \dots, 100$ neovlivňuje konvergenci.

Přistup 2: Leibnitz a Abel.

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\sqrt[4]{k}} \frac{5-\sqrt{k}}{k^{\frac{3}{4}}}$$

Zřejmě konvergují dle Leibnitze

Má limitu 0 a tudíž stačí dokázat monotonnie.

$$\left(\frac{5-\sqrt{x}}{x^{\frac{3}{4}}}\right)' = \frac{-\frac{1}{2\sqrt{x}} \cdot x^{\frac{3}{4}} - \frac{3}{4}\frac{(5-\sqrt{x})}{\sqrt[4]{x}}}{x^{\frac{3}{2}}}$$

~~Chceme~~

Protože $\frac{-\sqrt[4]{x}}{2} - \frac{15}{4}\frac{1}{\sqrt[4]{x}} + \frac{3}{4}\sqrt[4]{x} \xrightarrow{x\to\infty} \infty$

platí že $\frac{5-\sqrt{x}}{x^{\frac{3}{4}}}$ je rostoucí na (x_0, ∞)

pro nejaké x_0. Pak pro $k > x_0$ je

$\frac{5-\sqrt{k}}{k^{\frac{3}{4}}}$ neklesající. Tímto můžeme dokonat výpočet Abelovým kriterem.

Př $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sin(kx)\,\mathrm{arctg}(k)}{k+1}$

Kdybychom měli řadu

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sin(kx)}{k+1},$$

tak bychom mohli použít Dirichleta. Totiž $\left|\sum_{k=0}^{n} \sin(kx)\right| \leq C$ (viz předchozí výpočet) a $\frac{1}{k+1} \to 0$ je monotonní. Tedy $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sin(kx)}{k+1}$ konverguje.

Jelikož je arctg monotonní funkce $\left((\mathrm{arctg}\,x)' = \frac{1}{1+x^2} > 0\right)$ a omezené $|\mathrm{arctg}\,x| \leq \frac{\pi}{2}$, můžeme nyní aplikovat Abelovo kriterium na

$$\sum_{k=0}^{\infty} \underbrace{\frac{\sin(kx)}{k+1}}_{\text{konverguje}} \underbrace{\mathrm{arctg}\,k}_{\text{monotonní omezená}}$$

která konverguje.

(C) (1) $$\sum_{k=1}^{\infty} \left| \frac{\sin(kx)}{2^k} \right| \leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k}$$

druhá řada konverguje (třeba pomocí podílového či odmocninového kriteria) a tudíž konverguje první absolutně.

(4) $$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{2+(-1)^k}{k}$$

Rozdělme řadu ve dvou, totiž

$$\sum_{k=1}^{\infty} 2 \frac{(-1)^k}{k}$$ - což konverguje (třeba Leibnitz)

a $$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = \infty.$$

Jelikož částečné sumy první řady jsou omezené a druhé jsou neomezené, můžeme říci, že řada diverguje.

C

10 Návod: $\sin^2(k) = \frac{1-\cos(2k)}{2}$

11 $\frac{\pi k^2}{k+1} = \pi \frac{(k+1)(k-1)+1}{k+1}$

$= \pi\left((k-1) + \frac{1}{k+1}\right)$

$\cos\left(\pi(k-1) + \frac{1}{k+1}\right) = \cos((k+1)\pi)\cos\frac{1}{k+1}$

$- \underbrace{\sin((k+1)\pi)}_{=0} \sin\frac{1}{k+1}$

$\cos((k-1)\pi) = (-1)^{k+1}$

Tudíž $\cos\left(\frac{\pi k^2}{k+1}\right) = (-1)^{k+1}\cos\left(\frac{1}{k+1}\right)$

$\frac{(-1)^k}{\ln^2 k}$ konverguje dle Dirichleta nebo Leibnitze

a $\cos\frac{1}{k+1}$ je omez. a monotonní

tudíž celková pomocí Abela.