

A. Pomocí Fubiniho věty spočtěte ($a, b > 0$):

$$1. \int_0^{\infty} \frac{\exp(-ax) - \exp(-bx)}{x} dx \quad 2. \int_0^{\infty} \frac{\operatorname{arctg}(-ax) - \operatorname{arctg}(-bx)}{x} dx$$

$$3. \int_0^{\infty} \frac{1 - \exp(-ax)}{x \exp x} dx \quad 4. \int_0^{\pi} \frac{\ln(1 + a \cos x)}{\cos x} dx$$

$$5. \int_0^1 \frac{x^a - x^b}{\ln x} dx \quad 6. \int_0^{\infty} \frac{\operatorname{arctg}(ax)}{x(1+x^2)} dx$$

B. Pomocí Fubiniho věty spočtěte:

$$\iint_M (x^2 + y) dx dy, \quad M = \{y \geq 0, x + y \leq 1, y + x^2 \leq 1\}$$

$$\iint_M \exp(-xy) dx dy, \quad M = \{x \geq 0, 0 \leq xy \leq 1\}$$

$$\iiint_M \frac{dx dy dz}{(1 + x + y + z)^3}, \quad M = \{x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0, x + y + z \leq 1\}$$

$$\iiint_M xy^2 z^2 dx dy dz, \quad M = \{0 \leq z \leq xy, 0 \leq y \leq x \leq 1\}$$

C. Určete objem tělesa, ohraničeného plochami:

1. $z = x^2 + y^2, z = 2x^2 + 2y^2, y = x, y = x^2$
2. $x = 0, y = 0, z = 0, ax + by + cz = d$ ($a, b, c, d > 0$)
3. $z = xy, z = x + y, x = 0, y = 0, x + y = 1$
4. $x + y = a, x + y = b, z^2 = xy$ ($0 < a < b$)

D. Pomocí vhodné substituce spočítejte plochu, ohraničenou křivkami:

1. $x + y = 1$, $x + y = 2$, $x = 3y$, $x = 4y$
2. $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 1/3$, $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 1/2$, $x = 2y$, $2x = y$
3. $xy = a^2$, $xy = 2a^2$, $x = y$, $y = 2x$

E. Pomocí polárních souřadnic spočítejte:

$$(1) \quad \iint_{R^2} \frac{dx dy}{(1 + x^2 + y^2)^p}$$

$$(2) \quad \iint_M \frac{dx dy}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}}, \quad M = \{x^2 + y^2 < 1\}$$

a plochu útvaru, ohraničeného křivkou:

3. $(x^2 + y^2)^2 = 8a^2 xy$
4. $(x^3 + y^3)^2 = x^2 + y^2$

F. Pomocí (zobecněných) válcových souřadnic spočítejte objemy těles, ohraničených plochami:

1. $x^2 + y^2 = az$, $(x^2 + y^2)^2 = (x^2 - y^2)$, $z = 0$
2. $z = 6 - x^2 - y^2$, $z = \sqrt{x^2 + y^2}$
3. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1$, $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$
4. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{z}{c}$, $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{x}{a} + \frac{y}{b}$

G. Pomocí (zobecněných) sférických souřadnic spočítejte:

$$(1) \quad \iiint_M xyz \, dx dy dz, \quad M = \{1 < x^2 + y^2 + z^2 < 2, \, xyz > 0\}$$

$$(2) \quad \iiint_M \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \right) dx dy dz, \quad M = \left\{ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} < 1 \right\}$$

a objemy těles, ohraničených plochami:

3. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$, $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{z^2}{c^2}$, $z = 0$
4. $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, $x^2 + y^2 + z^2 = b^2$, $x^2 + y^2 = cz^2$, $z = 0$
5. $(x^2 + y^2 + z^2)^3 = 3xyz$