Sada příkladů 6/9

Křivkový a plošný integrál

Křivkový integrál

1. Parametrizujte epicykloidu, tj. křivku, která vznikne pohybem zvoleného bodu jedné kružnice, kutálející se po jiné pevné kružnici.

2. Napište v parametrickém tvaru rovnici kružnice, která je průnikem koule a roviny.

3. Napište parametrický tvar kuželosečky, tj. průniku kužele a roviny a proveďte diskusi.

4. Parametrizujte křivku, zadanou jako průnik dvou sfér v $\mathbb{R}^3$.

   Spočtěte následující křivkové integrály:

5. $\int_C x^2 \, \mathrm{d}s$, kde C je oblouk AB křivky $y = \ln x$, $A = (2, \ln 2)$, $B = (1, 0)$

6. $\int_C (x^{\frac{4}{3}} + y^{\frac{4}{3}}) \, \mathrm{d}s$, kde C je asteroida $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$

7. $\int_C |y| \, \mathrm{d}s$, kde C je lemniskáta $(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2)$

8. $\int_C (x^2 + y^2) \, \mathrm{d}x + (x^2 - y^2) \, \mathrm{d}y$, kde C je obvod trojúhelníka ABC, $A = (0, 0)$, $B = (1, 0)$, $C = (0, 1)$, přičemž (A, B, C) je trojice uspořádaná ve smyslu orientace křivky

9. $\int_C \frac{(x + y) \, \mathrm{d}x - (x - y) \, \mathrm{d}y}{x^2 + y^2}$, kde C je kružnice $x^2 + y^2 = a^2$, přičemž trojice bodů $A = (a, 0)$, $B = (0, a)$, $C = (-a, 0)$ je uspořádaná ve smyslu orientace křivky

10. $\int_C y \, \mathrm{d}x + z \, \mathrm{d}y + x \, \mathrm{d}z$, kde C je průsečnice ploch $z = xy$, $x^2 + y^2 = 1$ a trojice bodů $A = (1, 0, 0)$, $B = (0, 1, 0)$, $C = (-1, 0, 0)$ je uspořádaná ve smyslu orientace křivky

11. Ukažte, že $\int_C f(x^2+y^2+z^2)(x\,\mathrm{d}x+y\,\mathrm{d}y+z\,\mathrm{d}z)$, kde f je spojitá funkce, je roven nule přes libovolnou uzavřenou křivku C.

Spočtěte následující křivkové integrály:

12. $\int_A^B (x^4+4xy^3)\,\mathrm{d}x + (6x^2y^2-5y^4)\,\mathrm{d}y$, kde $A=(-2,-1)$, $B=(3,0)$

13. $\int_A^B \left(2xy^2+3x^2+\frac{1}{x^2}+\frac{2x}{y^2}\right)\mathrm{d}x + \left(2x^2y+3y^2+\frac{1}{y^2}-\frac{2x^2}{y^3}\right)\mathrm{d}y$, kde $A=(2,1)$, $B=(1,2)$ a křivka se nachází uvnitř prvního kvadrantu

14. $\int_A^B \frac{x\,\mathrm{d}x+y\,\mathrm{d}y+z\,\mathrm{d}z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$, kde $A=(0,0,a)$, $B=(0,b,0)$ a křivka prochází mimo počátek

15. Vypočtěte hmotnost hmotného oblouku $x=a\cos t$, $y=a\sin t$, $z=bt$, $t\in(0,2\pi)$, je-li jeho lineární hustota $\mu(x,y,x)=k(x^2+y^2+z^2)$.

16. Najděte těžiště homogenního oblouku kružnice o poloměru a, $0\le\varphi\le 2\alpha$.

17. Spočtěte gravitační sílu, kterou působí homogenní půlkružnice o poloměru R a hmotnosti M na hmotný bod o hmotnosti m ve svém středu.

Křivkový a plošný integrál

Plošný integrál 1. druhu

1. Parametrizujte torus.

2. Parametrizujte Möbiův list.

3. Popište povrch kvádru jako zobecněnou plochu.

4. Napište parametricky rovnici zobecněné koule
$$|x|^\alpha + |y|^\alpha + |z|^\alpha = a^\alpha,$$
α i $a > 0$.

5. Popište plášť válce
$$\{(x, y, z); x^2 + y^2 \le r^2; |z| \le a\}$$
jako zobecněnou plochu.

6. Najděte plošný obsah plochy $z^2 = 2xy$ uříznuté rovinami $x + y = 1$, $x = 0$, $y = 0$.

7. Najděte plošný obsah plochy $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, omezené vnitřkem válce $x^2 + y^2 = 2x$.

8. Najděte plošný obsah plochy $x = \varrho \cos\varphi$, $y = \varrho \sin\varphi$, $z = h\varphi$, $0 < \varrho < a$, $0 < \varphi < 2\pi$.

9. Najděte plošný obsah anuloidu $(\sqrt{x^2 + y^2} - a)^2 + z^2 = b^2$.

10. Najděte plošný obsah plochy $x^2 + y^2 = 1$ omezené $y^2 + z^2 \le 1$.

11. Najděte plošný obsah plochy $(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}} + z = 1$, $z \ge 0$.

12. Spočtěte $\int_S \frac{\mathrm{d}S}{h}$, kde S je povrch elipsoidu a h je vzdálenost od středu elipsoidu k rovině "tečné k $\mathrm{d}S$".

13. Spočtěte $\int_S \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\,\mathrm{d}S$, kde S část hyperbolického paraboloidu $z = xy$, odříznutá válcovou plochou $x^2 + y^2 = R^2$ ($|z| \leq R$).

14. Najděte momenty setrvačnosti homogenní trojúhelníkové desky desky $x + y + z = 1$, $x \geq 0$, $y \geq 0$, $z \geq 0$, vůči jednotlivým souřadnicovým osám.

15. Spočtěte gravitační sílu, kterou se přitahují dvě homogenní sféry o poloměrech R a r, ležící ve vzdálenosti d. Plošná hustota rozložení hmoty je ϱ.

16. Najděte těžiště homogenního kužele $\sqrt{x^2 + y^2} = z$, useknutého válcem $x^2 + y^2 = ax$.

17. Najděte těžiště homogenní části koule $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, $x, y, z \geq 0$.

18. Najděte těžiště homogenního helikoidu $x = u \cos v$, $y = u \sin v$, $z = hv$, $0 < u < a$, $0 < v < \pi$.

19. Najděte gravitační potenciál homogenní kulové plochy $x^2+y^2+z^2 = a^2$ v bodě $P = (x_0, y_0, z_0)$, tj. spočtěte $\int_S \frac{1}{\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2}}\,\mathrm{d}S$.

20. Najděte sílu, kterou působí kapalina s hustotou γ na svislou stěnu nádoby tvaru parabolického úseku $\frac{h}{a^2}(y^2 - a^2) \leq z \leq 0$, $x = 0$.

Křivkový a plošný integrál

Plošný integrál 2. druhu

1. Spočtěte $\int_S (y-z)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z + (z-x)\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x + (x-y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, kde S je "vnější strana" kužele $x^2+y^2=z^2$, $0 \le z \le h$.

2. Spočtěte $\int_S x^2\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z + y^2\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x + z^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, kde S je "vnější strana" sféry $(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=R^2$.

3. Spočtěte $\int_S (z-R)^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, kde S je část kulové plochy $x^2+y^2+z^2=2Rz$, $R \le z \le 2R$, orientovaná normálou ven.

4. Spočtěte $\int_S z\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z + x\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x + y\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, kde S je část plochy $x-y+z=1$, $x, z \ge 0$, $y \le 0$, orientované tak, že s vektorem ve směru kladné osy y svírá ostrý úhel.

5. Spočtěte $\int_S x^2\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z + y^2\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x + z^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, kde S je část paraboloidu $x^2+y^2+2az=a^2$, $x \le 0$, $y, z \ge 0$, orientovaná tak, že pro normálový vektor $\mathbf{n}$ platí $\mathbf{n}\cdot\mathbf{k} > 0$, $\mathbf{k}$ je vektor ve směru kladné osy y.

6. Spočtěte $\int_S \frac{\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z}{x} + \frac{\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x}{y} + \frac{\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{z}$, kde S je elipsoid $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$, orientovaný normálou ven.

Stokesova a Gauß–Ostrogradského věta

7. Spočtěte křivkový integrál $\int_C y\,\mathrm{d}x + z\,\mathrm{d}y + x\,\mathrm{d}z$, kde C je kružnice $x^2+y^2+z^2=1$, $x+y+z=0$, orientovaná kladně vzhledem k vektoru $(1,1,1)$.

8. Spočtěte křivkový integrál $\int_C (y^2-z^2)\,\mathrm{d}x + (z^2-x^2)\,\mathrm{d}y + (x^2-y^2)\,\mathrm{d}z$, kde C je průnik krychle $[0,a]^3$ s rovinou $x+y+z=\frac{3}{2}a$, orientovaný kladně vzhledem k vektoru $(1,1,1)$.

9. Spočtěte křivkový integrál $\int_C y^2z^2\,\mathrm{d}x + z^2x^2\,\mathrm{d}y + x^2y^2\,\mathrm{d}z$, kde C je elipsa $a(\sin^2 t, 2\sin t\cos t, \cos^2 t)$, $t \in [0, 2\pi]$, orientovaná ve směru rostoucího parametru t.

10. Pomocí Stokesovy věty dokažte, že $\int_C yz\,\mathrm{d}x + xz\,\mathrm{d}y + xy\,\mathrm{d}z = 0$ pro libovolnou uzavřenou po částech hladkou křivku.

11. Spočtěte křivkový integrál $\int_C (x^2 - yz)\,\mathrm{d}x + (y^2 - xz)\,\mathrm{d}y + (z^2 - xy)\,\mathrm{d}z$, kde C je oblouk šroubovice $\widehat{AB}$ $(a\cos t, a\sin t, \frac{h}{2\pi}t)$, $A = (a, 0, 0)$, $B = (a, 0, h)$ tak, že křivku doplníte úsečkou BA na uzavřenou křivku a použijete Stokesovu větu.

12. Spočtěte $\int_S x^3\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z + y^3\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x + z^3\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, kde S je vnějšek sféry $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$.

13. Spočtěte $\int_S (x^2\cos\alpha + y^2\cos\beta + z^2\cos\gamma)\,\mathrm{d}S$, kde S je část kuželové plochy $x^2 + y^2 = z^2$, $0 \le z \le h$, a $\cos\alpha \ldots$ jsou směrové kosiny normály k této ploše.

14. Spočtěte objem tělesa ohraničeného plochou $x = u\cos v$, $y = u\sin v$, $z = -u + a\cos v$, $u \ge 0$ a rovinami $x = 0$ a $z = 0$.

15. Dokažte Archimédův zákon.

16. Najděte objem sudu, ohraničeného plochami $z = \pm c, x = a\cos u\cos v + b\sin u\sin v, y = a\cos u\sin v - b\sin u\cos v, z = c\sin u$.

17. Nechť f a g jsou dvakrát spojitě diferencovatelné funkce až do hranice oblasti Ω, která je ohraničená jednoduchou uzavřenou plochou S orientovanou normálou $\mathbf{n}$ ven. Ukažte, že platí:

$$\int_S \frac{\partial f}{\partial \mathbf{n}}\,\mathrm{d}S = \int_\Omega \Delta f\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$$
$$\int_S f\frac{\partial g}{\partial \mathbf{n}}\,\mathrm{d}S = \int_\Omega f\Delta g\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z + \int_\Omega \nabla f\cdot\nabla g\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$$
$$\int_S f\frac{\partial g}{\partial \mathbf{n}}\,\mathrm{d}S = \int_S g\frac{\partial f}{\partial \mathbf{n}}\,\mathrm{d}S,\ \text{je-li } \Delta f = \Delta g = 0$$

Sada příkladů 9/9

Diferenciální formy a jejich integrace

1. Nechť $e_1, \dots e_6$ je kanonická báze v $\mathbb{R}^6$. Zjednodušte:
   a) $e_2 \wedge e_5 \wedge e_3 \wedge [e_1 \wedge e_4 + e_4 \wedge e_2]$
   b) $[e_2 + e_5] \wedge e_3 \wedge e_1 \wedge [e_5 - e_4]$

2. Nechť $e_1, \dots e_3$ je kanonická báze v $\mathbb{R}^3$. Nechť $v_1 = e_1 + e_2$, $v_2 = e_1 - e_3$, $v_3 = e_1 + e_3$. Vypočítejte $e = v_1 \wedge v_2 \wedge v_3$. Přitom odvoďte, čemu se rovná
$$\det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

3. Vypočítejte $\mathrm{d}\omega$, je-li:
   a) $\omega = x\,\mathrm{d}x + y\,\mathrm{d}z$
   b) $\omega = \sin x\,\mathrm{d}y + \mathrm{d}z$

4. Napište rovnice, které musí splňovat φ_i resp. ψ_{ij} forem
   a) $\omega = \varphi_1\,\mathrm{d}x_2 \wedge \mathrm{d}x_3 \wedge \mathrm{d}x_4 - \varphi_2\,\mathrm{d}x_1 \wedge \mathrm{d}x_3 \wedge \mathrm{d}x_4 + \varphi_3\,\mathrm{d}x_1 \wedge \mathrm{d}x_2 \wedge \mathrm{d}x_4 - \varphi_4\,\mathrm{d}x_1 \wedge \mathrm{d}x_2 \wedge \mathrm{d}x_3$
   b) $\tau = \psi_{12}\,\mathrm{d}x_3 \wedge \mathrm{d}x_4 - \psi_{13}\,\mathrm{d}x_2 \wedge \mathrm{d}x_4 + \psi_{14}\,\mathrm{d}x_2 \wedge \mathrm{d}x_3 + \psi_{23}\,\mathrm{d}x_1 \wedge \mathrm{d}x_4 - \psi_{24}\,\mathrm{d}x_1 \wedge \mathrm{d}x_3 + \psi_{34}\,\mathrm{d}x_1 \wedge \mathrm{d}x_2$,
   aby
   a) $\omega = \mathrm{d}\tau$
   b) $\mathrm{d}\omega = 0$.

5. Ukažte, že je-li ω forma sudého stupně, pak $\tau = \omega \wedge \mathrm{d}\omega$ je exaktní.

6. Nechť $\Phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ je dáno předpisem $\Phi(s,t) = [st, s\cos t, \mathrm{e}^t]$. Nalezněte $\Phi^*\omega$ pro:
   a) $\omega = x\,\mathrm{d}y$
   b) $\omega = \mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z$

7. Nechť $\omega = \frac{-y\,\mathrm{d}x + x\,\mathrm{d}y}{x^2+y^2}$ je 1-forma na $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$. Nechť $\Phi(t) = [r\cos t, r\sin t]$, kde $r > 0$ je pevné. Nalezněte formu $\Phi^*\omega$.

8. Nalezněte 1-formu ω pro kterou $\mathrm{d}\omega = (x^2+y^2)\,\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y$ a užijte ji pro výpočet integrálu

$$\int_\Omega (x^2+y^2)\,\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y,$$

kde $\Omega = \{|x|+|y|<4\} \setminus \{x^2+y^2 \le 1\}$.

9. Vypočítejte $\int_M \omega$, kde:
a) $\omega = xz\,\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y$ na $\mathbb{R}^3$, $M = \{x^2 = y^2+z^2+1, x \in [1,\sqrt{2})\}$ s orientací danou normálou v bodě $m \in M$, jejíž první komponenta je kladná
b) $\omega = \mathrm{e}^y\,\mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}x$ na $\mathbb{R}^3$, $M = \{y = x^2+z^2, y \le 4\}$ s orientací danou normálou v bodě $m \in M$, jejíž druhá komponenta je kladná

10. Ověřte Stokesovu větu pro:
a) $\omega = x\,\mathrm{d}z$ pro plochu $c : x = uv, y = u+v, z = u^2+v^2, [u,v] \in (0,1)^2, v < u$
b) $\omega = xy\,\mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z + yz\,\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}w$ pro plochu $c : x = u^2+v^2, y = u-v, z = uv, w = u+v, [u,v] \in (0,1)^2$

11. Nechť $M = \{[x_1,x_2,x_3,x_4]; x_1^2+x_2^2+x_3^2 < x_4^2, 0 < x_4 < 1\} \subset \mathbb{R}^4$. Ukažte, že M je zobecněná plocha dimenze 4 v $\mathbb{R}^4$, najděte její parametrizaci c tak, aby souhlasila s kanonickou orientací na $\mathbb{R}^4$. Vypočítejte:
a) $\int_{\partial c} (x_2+x_4)\,\mathrm{d}x_1 \wedge \mathrm{d}x_2 \wedge \mathrm{d}x_3$
b) $\int_{\partial c} |x|^2\,\mathrm{d}x_1 \wedge \mathrm{d}x_2 \wedge \mathrm{d}x_3$

Klasický variační počet

1. Nechť $\Phi(y) = \int_a^b (y^2 + (y')^2)\,\mathrm{d}x$, $y \in C^1[a,b]$. Spočtěte Gâteauxovy diferenciály $D\Phi(y;h)$, $D^2\Phi(y;h,k)$ a $D^3\Phi(y;h,k,l)$.

2. Spočtěte první Gâteauxův a Fréchetův diferenciál funkcionálu $\Phi(y) = \int_0^1 x^2(y^4 - (y')^2)\,\mathrm{d}x$ na $C^1[0,1]$.

3. Spočtěte první a druhý Gâteauxův diferenciál funkcionálu $\Phi(y) = \int_0^1 \left[x^2 \sin(\pi y) + (y')^3 + y''y''' + y\mathrm{e}^{-(y'')^2}\right] \mathrm{d}x$ na $C^3[0,1]$.

4. Spočtěte první Gâteauxův diferenciál funkcionálu $\Phi(y_1, y_2) = \int_0^1 \left[xy_1^2 + (y_1')^2(y_2')^2 + (y_2')^6\right] \mathrm{d}x$ na $C^1[0,1] \times C^1[0,1]$.

5. Ukažte, že funkcionál $\Phi(y) = \int_{-1}^1 x^2(y')^2\,\mathrm{d}x$ nemá na množině $M = \{y \in C^1[-1,1]; y(-1) = -1, y(1) = 1\}$ minimum.

   Návod: Uvažujte funkce $y_a(x) = \operatorname{arctg}(x/a)/\operatorname{arctg}(1/a)$.

6. Ukažte, že funkcionál $\Phi(y) = \int_{-1}^1 x^{\frac{2}{5}}(y')^2\,\mathrm{d}x$ nemá na množině $M = \{y \in C^1[-1,1]; y(-1) = -1, y(1) = 1\}$ minimum.

   Návod: Uvažujte řešení Euler–Lagrangeovy rovnice.

7. Najděte extremály (tj. řešení příslušné Euler–Lagrangeovy rovnice) pro funkcionál $\Phi(y) = \int_0^{2\pi} \left[(y')^2 - y^2\right] \mathrm{d}x$ na množině $M = \{y \in C^1[0,2\pi]; y(0) = y(2\pi) = 1\}$.

8. Nechť $\Phi(y) = \int_0^1 y^2(x^n - y)\,\mathrm{d}x$ pro n přirozené dostatečně velké číslo a nechť $M = \{u \in C^1[0,1]; u(0) = u(1) = 0\}$.
   a) Ukažte, že jediným řešením Euler–Lagrangeovy rovnice ležícím v množině M je $y_0 = 0$.
   b) Ukažte, že $D^2\Phi(y_0;h,h) > 0$ pro $h \in M$, $h \neq 0$.
   c) Ukažte, že y_0 není bodem extrému funkcionálu, tj. v libovolném okolí bodu y_0 (v metrice $C^1[0,1]$) existují body y_1, $y_2 \in M$ tak, že $\Phi(y_1) < \Phi(y_0) = 0 < \Phi(y_2)$.

Nalezněte extrémy následujících funkcionálů na množinách spojitě diferencovatelných funkcí až do hranice splňujících níže uvedené hraniční podmínky.

9. $\Phi(y) = \int_1^2 \left[x(y')^4 - 2y(y')^3\right] \mathrm{d}x$, $y(1) = 0$, $y(2) = 1$
10. $\Phi(y) = \int_2^3 \frac{x^3}{(y')^2} \mathrm{d}x$, $y(2) = 4$, $y(3) = 9$
11. $\Phi(y) = \int_0^1 \left[(y')^2 + x^2\right] \mathrm{d}x$, $y(0) = -1$, $y(1) = 1$
12. $\Phi(y) = \int_0^a \left[1 - \mathrm{e}^{-(y')^2}\right] \mathrm{d}x$, $y(0) = 0$, $y(a) = b$, $a > 0$
13. $\Phi(y) = \int_0^1 y(y')^2 \mathrm{d}x$, $y(0) = p > 0$, $y(1) = q > 0$.

V následujících úlohách hledejte minimum funkcionálu $\Phi(y)$ na spojitě diferencovatelných funkcích, splňujících dané hraniční podmínky a vazební podmínku $g(y) = const$

14. $\Phi(y) = \int_0^\pi (y')^2 \mathrm{d}x$, $y(0) = y(\pi) = 0$, $g(y) = \int_0^\pi y^2 \mathrm{d}x = 1$
15. $\Phi(y) = \int_0^1 (y')^2 \mathrm{d}x$, $y(0) = 1$, $y(1) = 6$, $g(y) = \int_0^1 y \, \mathrm{d}x = 3$
16. $\Phi(y) = \int_0^1 \left[x^2 + (y')^2\right] \mathrm{d}x$, $y(0) = y(1) = 0$, $g(y) = \int_0^1 y^2 \mathrm{d}x = 2$
17. $\Phi(y) = \int_0^1 (y')^2 \mathrm{d}x$, $y(0) = 0$, $y(1) = \frac{\pi}{4}$, $g(y) = \int_0^1 \left[y - (y')^2\right] \mathrm{d}x = \frac{1}{12}$.

Klasický variační počet - aplikace ve fyzice

18. Nechť lagrangián L nezávisí explicitně na čase, tj. $L = L(x, \dot{x})$. Ukažte, že podél libovolné extremály platí zákon zachování energie, tj.

$$\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big\{E(x_0(t), \dot{x}_0(t))\Big\} = 0.$$

($E = \sum_{i=1}^N \dot{x}_i \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} - L$).

19. Nechť pro pevné $i = \{1, 2, \dots N\}$ lagrangián nezávisí na x_i. Potom podél libovolné extremály platí zákon zachování hybnosti, tj.

$$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big\{\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i}(t, x_0(t), \dot{x}_0(t))\Big\} = 0.$$

20. Hamiltonův princip v klasické mechanice tvrdí, že mechanická soustava popsaná souřadnicemi q_1, q_2, …, q_N se bude pohybovat tak, aby akce

$$S = \int_P^Q L \, \mathrm{d}t \qquad L = T(t, q, \dot{q}) - U(t, q)$$

(T, U dané funkce, reprezentující kinetickou a potenciální energii soustavy) byla stacionární, tj. bude-li vektorová funkce $q(t)$ řešit Euler–Lagrangeovy rovnice. Napište tyto rovnice.

21. Pomocí zákona zachování energie (viz výše) ukažte, že pro extremály akce S dané lagrangiánem $L = \frac{1}{2}\sum_{i,j} g_{ij}\dot{x}_i\dot{x}_j$ je parametr t přirozený parametr, tj.

$$\frac{d}{dt}\Big\{\sum_{ij} g_{ij}\dot{x}_i\dot{x}_j\Big\} = 0.$$

Sestavte Hamiltonovy rovnice pro následující funkcionály

22. $J(y_1, y_2) = \displaystyle\int_0^\pi (2y_1y_2 - 2y_1^2 + (\dot{y}_1)^2 - (\dot{y}_2)^2) \, \mathrm{d}t$

23. $J(y) = \displaystyle\int_a^b \sqrt{t^2 + y^2}\sqrt{1 + (\dot{y})^2} \, \mathrm{d}t$

24. $J(y_1, y_2) = \displaystyle\int_a^b (t^2 + y_1(\dot{y}_1)^2 + y_2(\dot{y}_2)^2) \, \mathrm{d}t.$

Sada příkladů 2/9

Posloupnosti a řady funkcí

Posloupnosti funkcí

Najděte obor bodové konvergence a hodnotu limity posloupnosti funkcí:

1. $$\mathrm{e}^x \frac{\sin x \sin(2x) \dots \sin(nx)}{\sqrt{n}}$$

2. $$\frac{1+x^{2n+1}}{1+x^{2n}}$$

3. $$\sin(\pi x n)$$

Zjistěte, zda na daných množinách konvergují posloupnosti funkcí stejnoměrně.

4. $$x^n - x^{n+1} \qquad \text{na } [0,1]$$

5. $$x^n - x^{2n} \qquad \text{na } [0,1]$$

6. $$\operatorname{arctg} nx \qquad \text{na } (0,\infty)$$

7. $$\frac{nx}{1+n^2x^2} \qquad \text{na a) } \{x \in \mathbb{C}; |x| \le \varepsilon\} \qquad \text{b) } \{x \in \mathbb{C}; |x| \ge \varepsilon\}$$

8. $$\sin \pi x^n \qquad \text{na } [0,1]$$

9. $$\frac{x}{n} \ln \frac{x}{n} \qquad \text{na a) } (0,\varepsilon) \qquad \text{b) } (\varepsilon,\infty)$$

10.
$$\sqrt[n]{1+x^n} \qquad \text{na } [0,\infty)$$

11.
$$\frac{1+x^{n+1}}{1+x^n} \qquad \text{na } [0,\infty)$$

Zjistěte, zda jsou následující výroky pravdivé:

12.
$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 \frac{nx}{1+n^2x^2}\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \lim_{n\to\infty} \frac{nx}{1+n^2x^2}\,\mathrm{d}x$$

13.
$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 \frac{nx}{1+n^2x^4}\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \lim_{n\to\infty} \frac{nx}{1+n^2x^4}\,\mathrm{d}x$$

14.
$$\lim_{x\to 1^-} \lim_{n\to\infty} x^n = \lim_{n\to\infty} \lim_{x\to 1^-} x^n$$

Sada příkladů 3/9

Posloupnosti a řady funkcí

Řady funkcí

Najděte obor absolutní a neabsolutní bodové konvergence řad funkcí:

1. $$\sum_{n=1}^{\infty} \ln^n x$$

2. $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{1+x^{2n}}$$

3. $$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{1-x}{1+x}\right)^n$$

4. $$\sum_{n=1}^{\infty} x^n \operatorname{tg} \frac{x}{2^n}$$

5. $$\sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{e}^{-nx} \cos x$$

6. $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(x+n)^p}, \quad p \in \mathbb{R}$$

7. $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n+y^n}, \quad y \in \mathbb{R}_0^+$$

Zjistěte, zda řady funkcí konvergují stejnoměrně na daných intervalech:

8.
$$\sum_{n=1}^{\infty}(1-x)x^n \qquad \text{a) } [0,1] \quad \text{b) } \Big[0, \frac{999}{1023}\Big]$$

9.
$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{\sqrt[3]{n^2+x^2}} \qquad \text{a) } [\epsilon, 2\pi-\epsilon]\,, 0<\epsilon<\pi\,, \quad \text{b) } [0,2\pi]$$

10.
$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x}{1+n^4x^2} \qquad \text{a) } [-K,K]\,, K>0\,, \quad \text{b) } (-\infty,\infty)$$

11.
$$\sum_{n=2}^{\infty}\ln\Big(1+\frac{x^2}{n\ln^2 n}\Big) \qquad \text{a) } [-K,K]\,, K>0\,, \quad \text{b) } (-\infty,\infty)$$

12.
$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\sqrt[n]{x^2} \qquad \text{a) } [0,K]\,, K>0\,, \quad \text{b) } [0,\infty)$$

13.
$$\sum_{n=1}^{\infty}x^{\alpha}\mathrm{e}^{nx},\ \alpha\in\mathbb{N}_0 \qquad \text{a) } (-\infty,-1] \quad \text{b) } [-1,0] \quad \text{c) } [0,1]$$

14.
$$\sum_{n=1}^{\infty}\sin(\pi\sqrt{x^2+k^2})\sqrt[n]{\frac{x^2}{1+x^2}}, \quad k\in\mathbb{R} \qquad (-\infty,\infty)$$

15.
$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+\sin x} \qquad \text{a) } [-K,K]\,, K>0\,, \quad \text{b) } (-\infty,\infty)$$

16.
$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}x\ln\frac{x}{n} \qquad \text{a) } (0,K]\,, K>0\,, \quad \text{b) } (0,\infty)$$

17.
$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n-1}{n+1}\frac{1}{\sqrt[100]{n}}\mathrm{e}^{-nx} \qquad \text{a) } [0,K]\,, K>0\,, \quad \text{b) } [0,\infty)$$

Henri Lebesgue a jeho integrál

Fubiniho věta, věta o substituci

1. Převeďte $\int_\Omega f(x+y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ na jednoduchý integrál, jestliže f je spojitá a $\Omega = \{(x,y); |x|+|y| \leq 1\}$.

2. Převeďte $\int_\Omega f(x\cdot y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ na jednoduchý integrál, jestliže f je spojitá a Ω je ohraničeno křivkami $xy=1$, $xy=2$, $y=x$, $y=4x$ a x, $y>0$.

3. Přepište $\int_0^1 (\int_y^1 f(x)\,\mathrm{d}x)\,\mathrm{d}y$ pomocí jednoho integrálu.

4. Určete plošný obsah části roviny omezené následujícími křivkami:
   a) $(x^2+y^2)^2 = 2a^2(x^2-y^2)$
   b) $(x^3+y^3)^2 = xy$
   c) $x+y=a$, $x+y=b$, $y=\alpha x$, $y=\beta x$, $0<a<b$, $0<\alpha<\beta$

5. Určete objem tělesa omezeného následujícími plochami:
   a) $x+y+z=a$, $x^2+y^2=R^2$, $x=0$, $y=0$, $z=0$, $a \geq R\sqrt{2} > 0$
   b) $z=xy$, $z=0$, $x+y+z=1$
   c) $z=x^2+y^2$, $x^2+y^2=x$, $x^2+y^2=2x$, $z=0$
   d) $z=\mathrm{e}^{-(x^2+y^2)}$, $z=0$, $x^2+y^2=R^2$
   e) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$, $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{z^2}{c^2}$, a, b, $c>0$
   f) $(\frac{x}{a}+\frac{y}{b})^2+\frac{z^2}{c^2}=1$, $x=0$, $y=0$, $z=0$, a, b, $c>0$
   g) $(x^2+y^2+z^2)^3 = 3xyz$

6. Spočtěte následující integrály:
   a) $\int_{\mathbb{R}^2} \mathrm{e}^{-(x^2+y^2)}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$
   b) $\int_\Omega x^{-p}y^{-q}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, $\Omega = \{(x,y); xy\geq 1, x\geq 1\}$
   c) $\int_\Omega (x+y)^{-p}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, $\Omega = \{(x,y); x+y\geq 1, 0\leq x\leq 1\}$

7. Najděte souřadnice hmotného středu homogenní desky ohraničené $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$, x, y, $a>0$.

8. Najděte momenty setrvačnosti I_x a I_y homogenní desky s hustotou $\varrho = 1$ ohraničené $(x-a)^2+(y-a)^2=a^2$, $x=0$, $y=0$, $0\leq x\leq a$.

9. Najděte souřadnice hmotného středu homogenního tělesa ohraničeného $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{z^2}{c^2}$, $z = c$, a, b, $c > 0$.

10. Kruhový válec s osou ve směru osy z kartézských souřadnic je naplněn plynem, jehož hustota se řídí barometrickou formulí

$$\varrho = \varrho_0 \exp(-\frac{\varrho_0}{p_0} gz)\,,$$

kde p_0 je tlak na spodní základně $z = 0$, g je tíhové zrychlení. Výška válce je h, poloměr R. Určete hmotnost vzduchu ve válci.

Henri Lebesgue a jeho integrál

Lebesgueova a Léviho věta

Spočtěte následující integrály. Ověřte předpoklady vět, které používáte!

1. $\lim\limits_{n\to\infty} \int_0^1 \frac{x^n}{n} \,\mathrm{d}x$

2. $\lim\limits_{n\to\infty} \int_0^\infty \frac{\ln(x+n)}{n} \mathrm{e}^{-x} \cos x \,\mathrm{d}x$

3. $\lim\limits_{n\to\infty} \int_0^\infty \frac{x^n}{1+x^{2n}} \,\mathrm{d}x$

4. $\lim\limits_{n\to\infty} \int_0^\infty \mathrm{e}^{-nx} x^2 \,\mathrm{d}x$

   Rozvinutím vhodné funkce do řady spočtěte následující integrály. Ověřte předpoklady vět, které používáte!

5. $\int_0^\infty \frac{x}{\mathrm{e}^x - 1} \,\mathrm{d}x \qquad \left(\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}\right)$

6. $\int_0^1 \frac{\ln(\frac{1}{x})}{1-x^2} \,\mathrm{d}x \qquad \left(\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}\right)$

7. $\int_0^\infty \frac{x^3}{\mathrm{e}^x - 1} \,\mathrm{d}x \qquad \left(\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^2}{90}\right)$

Integrály závislé na parametru

8. Ukažte, že následující integrály jsou spojitými funkcemi proměnné na dané množině:

   a) $\int_0^\pi \frac{\sin x}{x^a(\pi - x)^a} \,\mathrm{d}x$, $a < 2$

b) $\displaystyle\int_0^2 x^2 \cos ax \,\mathrm{d}x,\ -\infty < a < \infty$

c) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{\cos x}{x^a} \,\mathrm{d}x,\ 1 < a < \infty$

Zjistěte, pro které hodnoty parametru integrál konverguje, a spočtěte jej:

9. $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\operatorname{arctg} ax}{x(1+x^2)} \,\mathrm{d}x$

10. $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\mathrm{e}^{-ax^2} - \mathrm{e}^{-bx^2}}{x} \,\mathrm{d}x$

11. $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\mathrm{e}^{-ax^2} - \mathrm{e}^{-bx^2}}{x^2} \,\mathrm{d}x$

12. $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^b - x^a}{\ln x} \,\mathrm{d}x$

13. $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\operatorname{arctg} ax \operatorname{arctg} bx}{x^2} \,\mathrm{d}x$

14. $\displaystyle\int_0^\infty \mathrm{e}^{-ax^2} \cos bx \,\mathrm{d}x$

15. $\displaystyle\int_0^\infty \mathrm{e}^{-ax^2} \cosh bx \,\mathrm{d}x$

16. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\ln(1 + a\sin^2 x)}{\sin^2 x} \,\mathrm{d}x$

17. $\displaystyle\int_0^\pi \ln(a \pm b\cos x) \,\mathrm{d}x$

18. $\displaystyle\int_0^\infty x\mathrm{e}^{-ax} \cos bx \,\mathrm{d}x$

19. $\displaystyle\int_0^\infty \mathrm{e}^{-ax} \frac{1 - \cos x}{x} \,\mathrm{d}x$

20. $\displaystyle\int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-ax} \frac{\sinh x}{x} \,\mathrm{d}x$

21. $\displaystyle\int_0^{1} x^{-\alpha} \ln^n x \,\mathrm{d}x$, $n \in \mathbb{N}_0$

22. $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \ln(a^2 + b^2 \mathrm{tg}^2 x) \,\mathrm{d}x$

23. $\displaystyle\int_{x>0,y>0} \mathrm{e}^{-(x+y+\frac{a^3}{xy})} x^{-1/3} y^{-2/3} \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y$

Doplněním vhodného parametru spočtěte:

24. $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{x}{\mathrm{tg} x} \,\mathrm{d}x$

25. $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\sin^4 x}{x^2} \,\mathrm{d}x$

26. Vyšetřete průběh funkce na jejím definičním oboru:

$$F(a) = \int_0^1 \frac{\ln(1 - a^2 x^2)}{x^2 \sqrt{1 - x^2}} \,\mathrm{d}x$$

Sada příkladů na 9. týden

Používáme následující věty o integrálech závislých na parametru:

Věta 1 (o limitě integrálu závislého na parametru). *Nechť $P \subset \mathbb{R}$ je otevřená, $p_0 \in P$, $A \subset \mathbb{R}^d$ měřitelná a $f : P \times A \to \mathbb{R}$. Předpokládejme navíc, že*

- *funkce $x \mapsto f(p,x)$ je měřitelná pro všechna $p \in P \setminus \{p_0\}$*
- *limita $\lim\limits_{p \to p_0} f(p,x) =: F(x)$ existuje pro s.v. $x \in A$,*
- *existuje $g \in L(A)$, že $|f(p,x)| \leq g(x)$ pro s.v. $x \in A$ a všechna $p \in P$.*

Potom $F \in \mathcal{L}(A)$ a platí

$$\lim_{p \to p_0} \int f(p,x)\, dx = \int F$$

Věta 2 (o spojitosti integrálu závislého na parametru). *Nechť $P \subset \mathbb{R}$ je otevřená, $p_0 \in P$, $A \subset \mathbb{R}^d$ měřitelná a $f : P \times A \to \mathbb{R}$. Předpokládejme navíc, že*

- *funkce $x \mapsto f(p,x)$ je měřitelná pro všechna $p \in P$*
- *funkce $p \mapsto f(p,x)$ je spojitá v p_0 pro s.v. $x \in A$,*
- *existuje $g \in L(A)$, že $|f(p,x)| \leq g(x)$ pro s.v. $x \in A$ a všechna $p \in P$.*

Potom je funkce $p \mapsto \displaystyle\int f(p,x)\, dx$ spojitá v bodě p_0.

Věta 3 (o derivaci integrálu závislého na parametru). *Nechť $P \subset \mathbb{R}$ je otevřená, $p_0 \in P$, $A \subset \mathbb{R}^d$ měřitelná a $f : P \times A \to \mathbb{R}$. Předpokládejme navíc, že*

- *funkce $x \mapsto f(p,x)$ je měřitelná pro všechna $p \in P$*
- *existuje $\frac{\partial f}{\partial p}(p,x)$ pro všechna $p \in P$ a s.v. $x \in A$,*
- *existuje $g \in L(A)$, že $\left|\frac{\partial f}{\partial p}(p,x)\right| \leq g(x)$ pro s.v. $x \in A$ a všechna $p \in P$.*

Potom má funkce $F : p \mapsto \displaystyle\int f(p,x)\, dx$ vlastní derivaci na P a pro $p \in P$ platí

$$F'(p) = \int \frac{\partial f}{\partial p}(p,x)\, dx.$$

Příklady:

1. Dokažte, že funkce
$$F(a) = \int_0^\infty e^{-ax^2}\ dx$$
je spojitá na $(0, \infty)$.

2. Dokažte, že funkce
$$F(a) = \int_0^\infty x^{a-1} e^{-x}\ dx,$$
je spojitá na $(0, \infty)$.

3. Dokažte, že funkce
$$F(a) = \int_0^\infty \frac{\sin x}{x} e^{-ax}\ dx,$$
je spojitá na $(0, \infty)$.

4. Dokažte, že funkce
$$F(a) = \int_0^1 \log(x^2 + a^2)\ dx,$$
je spojitá na $(0, \infty)$.

5. Dokažte, že funkce
$$F(a) = \int_0^\infty x^{a-1} e^{-x}\ dx,$$
má na intervalu $(0, \infty)$ derivace všech řádů a spočtěte je (ve formě integrálu závislého na parametru).

6. Spočtěte
$$F(a) = \int_0^\infty \frac{1 - e^{-ax}}{xe^x}\ dx,$$
pro $a \in (-1, \infty)$.

7. Spočtěte
$$F(a, b) = \int_0^\infty \frac{\sin(ax)}{x} \cdot e^{-bx}\ dx,$$
pro $a \in \mathbb{R}$, $b \in (0, \infty)$.

*8. Spočtěte
$$F(a) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\cos x} \cdot \log\left(\frac{1 + a\cos x}{1 - a\cos x}\right)\ dx,$$
pro $a \in [-1, 1]$.

**9. Spočtěte

$$F(a) = \int_0^\infty \frac{\arctan(ax) \cdot \arctan(bx)}{x^2}\, dx,$$

pro $a, b \in \mathbb{R}$.

10. Načrtněte graf funkce

$$F(a) = \int_0^\infty \frac{e^{-ax}}{1 + x^2}\, dx$$

na $[0, \infty)$. Ukažte, že na $(0, \infty)$ platí $F''(a) + F(a) = \frac{1}{a}$.

Co budeme potřebovat z teorie

Definice (bodová a stejnoměrná konvergence)**.** *Pro posloupnost reálných funkcí $\{f_n\}$ definovaných na $A \subset \mathbb{R}^d$ a $f : A \to \mathbb{R}$ říkáme, že*

- *posloupnost $\{f_n\}$* ***konverguje bodově*** *k funkci f na množině A (značíme $f_n \to f$), pokud pro všechna $x \in A$ platí $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$,*
- *posloupnost $\{f_n\}$* ***konverguje stejnoměrně*** *k funkci f na množině A (značíme $f_n \rightrightarrows f$), pokud platí*

  $$\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, N \in \mathbb{N}\ \forall\, x \in A\ \forall\, n \in \mathbb{N},\ n \geq N : |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

- *posloupnost $\{f_n\}$* ***konverguje lokálně stejnoměrně*** *k funkci f na množině A (značíme $f_n \overset{loc}{\rightrightarrows} f$), pokud $f_n \rightrightarrows f$ na K pro každou $K \subseteq A$ kompaktní.*

Pro $\sigma_n = \sup_{x\in A} |f_n(x) - f(x)|$ platí

$$(f_n \rightrightarrows f) \iff \sigma_n \to 0.$$

Příklady

1. Vyšetřete bodovou, lokálně stejnoměrnou a stejnoměrnou konvergenci řady
$$\sum_{n=1}^{\infty}(1-x)x^n.$$

2. Vyšetřete bodovou, lokálně stejnoměrnou a stejnoměrnou konvergenci řady
$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n^2+x^2}.$$

3. Vyšetřete bodovou, lokálně stejnoměrnou a stejnoměrnou konvergenci řady
$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{\sqrt[3]{n^2+x^2}}.$$

4. Vyšetřete bodovou, lokálně stejnoměrnou a stejnoměrnou konvergenci řady
$$\sum_{n=2}^{\infty}\log\left(1+\frac{x^2}{n\log^2 n}\right).$$

5. Vyšetřete bodovou, lokálně stejnoměrnou a stejnoměrnou konvergenci řady
$$\sum_{n=1}^{\infty}x^N e^{nx},\ N\in\mathbb{N}.$$

6. Vyšetřete bodovou, lokálně stejnoměrnou a stejnoměrnou konvergenci řady
$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+\sin x}.$$

7. Vyšetřete bodovou, lokálně stejnoměrnou a stejnoměrnou konvergenci řady
$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}x\log\frac{x}{n}.$$

8. Vyšetřete bodovou, lokálně stejnoměrnou a stejnoměrnou konvergenci řady
$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n-1}{n+1}\frac{1}{\sqrt[100]{n}}e^{-nx}.$$

Co budeme potřebovat z teorie

Definice. *Nechť X je normovaný lineární prostor, $F : X \supset D_F \to \mathbb{R}$ funkcionál, $a \in D_f$, $h \in X \setminus \{0\}$. Potom definujeme Gâteauxovu derivaci F v bodě a ve směru h jako*

$$D_h F(a) = \lim_{t \to 0} \frac{F(a + th) - F(a)}{t},$$

pokud limita napravo existuje vlastní.

Spojitý lineární funkcionál $L : X \to \mathbb{R}$ budeme nazývat Gâteauxovu derivací F v bodě a pokud $D_h F(a)$ existuje pro všechna $h \in X \setminus \{0\}$ a platí $L(h) = D_h F(a)$, $h \in X \setminus \{0\}$.

Spojitý lineární funkcionál $L : X \to \mathbb{R}$ budeme nazývat Fréchetovou derivací F v bodě a pokud

$$\lim_{h \to 0} \frac{F(a + h) - F(a) - L(h)}{|h|} = 0.$$

Gâteauxovy a Fréchetovy derivace vyšších řádů definujeme induktivně.

Lemma 1 (základní lemma variačního počtu). *Nechť $f \in C([a, b])$. Potom*

1. *pokud platí*

$$\int_a^b f g' = 0, \quad g \in C^1([a, b]),\ g(a) = g(b) = 0,$$

potom f je konstantní na $[a, b]$,

2. *pokud platí*

$$\int_a^b f g = 0, \quad g \in C^1([a, b]),\ g(a) = g(b) = 0,$$

potom $f = 0$ na $[a, b]$.

Funkcionály reprezentované integrálem

Jde o funkcionály ve tvaru

$$F(y) = \int_a^b f(x, y(x), y'(x))\, dx \tag{1}$$

definované na množině

$$M = \{y \in C^1([a, b]) :\ y(a) = A,\ y(b) = B\}, \tag{2}$$

kde $a, b, A, B \in \mathbb{R}$, $a < b$ a $f \in C^2([a, b] \times \mathbb{R}^2)$.

Tuto obecnou situaci si ovšem upravíme na speciální úlohu

$$\Phi(u) = F(u + \varphi),$$

kde $\varphi(x) = \dfrac{B - A}{b - a}(x - a) + A$, a

$$X = \{u \in C^1([a, b]) :\ u(a) = u(b) = 0\}.$$

Je snadné si rozmyslet, že $u \in X$ právě tehdy, když $u + \varphi \in M$, a že $u \in X$ je extrémem funkcionálu Φ právě tehdy, když $u + \varphi$ je extrémem (stejného typu) funkcionálu F.

Věta (Euler-Lagrangeova rovnice)**.** *Nechť $f \in C^2([a, b] \times \mathbb{R}^2)$ a y je stacionárním bodem funkcionálu F. Potom je funkce*

$$x \mapsto f_z(x, y(x), y'(x))$$

spojitě diferencovatelná na $[a, b]$ a platí (tzv. ***Euler-Lagrangeova rovnice****)*

$$f_y(x, y(x), y'(x)) - (f_z(x, y(x), y'(x)))' = 0, x \in [a, b]. \tag{3}$$

Věta (o regularitě minimizéru)**.** *Nechť $f \in C^2([a, b] \times \mathbb{R}^2)$, y je stacionárním bodem funkcionálu F a pro $\xi \in (a, b)$ platí*

$$f_{zz}(\xi, y(\xi), y'(\xi)) \neq 0.$$

Potom existuje $\delta > 0$, že y je C^2 na $(\xi - \delta, \xi + \delta)$.

Příklady

1. Spočítejte $D_h\Phi(f)$, $D^2_{h,k}\Phi(f)$ a $D^3_{h,k,l}\Phi(f)$ pro
$$\Phi(y) = \int_a^b y^2 + (y')^2, \quad y \in C([a,b])$$
a $h, k, l \in C([a,b]) \setminus \{0\}$.

2. Spočítejte Gâteauxovu a Fréchetovu derivaci funkcionálu
$$\Phi(y) = \int_{-1}^1 y^2, \quad y \in C^1([-1,1]).$$

3. Spočítejte Gâteauxovu a Fréchetovu derivaci funkcionálu
$$\Phi(y) = \int_0^1 x^2(y^4 - (y')^2), \quad y \in C^1([0,1]).$$

4. Spočítejte Gâteauxovu derivaci funkcionálu
$$\Phi(y) = \int_0^1 \Big[(y')^3 + x^2\sin(\pi y) + y''y''' + ye^{-(y'')^2}, \quad y \in C^3([0,1]).\Big]$$

5. Sestavte a vyřešte Euler-Lagrangeovu rovnici pro funkcionál
$$\Phi(y) = \int_0^1 (y')^2 - y^2$$
na množině $\{y \in C^1([0,2\pi]) : y(0) = y(2\pi) = 1\}$.

6. Sestavte a vyřešte Euler-Lagrangeovu rovnici pro funkcionál
$$\Phi(y) = \int_0^1 (y')^2 + yy' + (y')^2$$
na množině $\{y \in C^1([0,1]) : y(0) = 0,\ y(1) = \sinh 1\}$.

7. Sestavte a vyřešte Euler-Lagrangeovu rovnici pro funkcionál
$$\Phi(y) = \int_2^3 \frac{x^3}{(y')^2}$$
na množině $\{y \in C^1([2,3]) : y(2) = 4,\ y(3) = 9\}$.

8. Sestavte a vyřešte Euler-Lagrangeovu rovnici pro funkcionál
$$\Phi(y) = \int_1^2 x^2(y')^2 + 2yy'$$
na množině $\{y \in C^1([1,2]) : y(1) = 1,\ y(2) = 2\}$.

9. Sestavte a vyřešte Euler-Lagrangeovu rovnici pro funkcionál

$$\Phi(y) = \int_{-1}^{1} 2y^2 + x^2(y')^2$$

na množině $\{y \in C^1([1,2]) : y(-1) = -1,\, y(1) = 1\}$.

10. Ukažte, že Euler-Lagrangeova rovnice pro funkcionál

$$\Phi(y) = \int_{-1}^{1} y^2(2x - y')^2$$

na množině $\{y \in C^1([-1,1]) : y(-1) = 0,\, y(1) = 1\}$ má řešení, které není C^2.

Sada příkladů na 5. týden

Co budeme potřebovat z teorie

Věta (vztah Riemannova a Lebesgueova integrálu). *Pokud* $f \in \mathfrak{R}([a,b])$*, potom* $f \in \mathcal{L}([a,b])$ *a platí*

$$\int_a^b f = (R)\int_a^b f.$$

Věta (Leviho věta). *Nechť pro posloupnost* $\{f_n\} \subset \mathcal{L}_d$ *platí* $f_n \nearrow f$ *a nechť existuje* $M \in \mathbb{R}$*, že* $\int f_n \leq M$*,* $n \in \mathbb{N}$*, potom*

$$\lim_{n\to\infty} \int f_n = \int f.$$

Věta (Leviho věta pro řady). *Nechť* $\{f_n\} \subset \mathcal{L}_d$ *je posloupnost nezáporných funkcí a nechť existuje* $M \in \mathbb{R}$*, že* $\int \sum_{k=1}^{n} f_n \leq M$*,* $n \in \mathbb{N}$*. Potom* $f = \sum_{n=1}^{\infty} f_n \in \mathcal{L}_d$ *a*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int f_n = \int f.$$

Věta (Fatouovo lemma). *Nechť* $\{f_n\}$ *je posloupnost funkcí z* $\mathcal{L}_n^+$*,* $f_n \to f$ *s.v. a existuje* $M \in \mathbb{R}$*, že* $\int f_n \leq M$*,* $n \in \mathbb{N}$*. Potom* $f \in \mathcal{L}_d^+$ *a* $\int f \leq M$*.*

Věta (Lebesgueova o majorantě). *Nechť* $\{f_n\}$ *je posloupnost funkcí z* $\mathcal{L}_d$*,* $f_n \to f$ *s.v. a existuje* $g \in \mathcal{L}_d$*, že* $|f_n| \leq g$ *s.v.,* $n \in \mathbb{N}$*. Potom* $f \in \mathcal{L}_d$ *a*

$$\int f = \lim_{n\to\infty} \int f_n.$$

Příklady

1. Ověřte, že
$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 \frac{nx}{1+n^2x^2}\,dx = 0.$$

2. Ověřte, že
$$\lim_{n\to\infty}\int_0^\infty e^{-x^n}\,dx = 1.$$

3. Platí $\lim\limits_{n\to\infty}\int_M f_n = \int_M \lim\limits_{n\to\infty} f_n$ pro
$$f_n(x) = nxe^{-nx^2},\quad M = (0,1),\ (1,\infty),\ (0,\infty)?$$

4. Ověřte, že
$$\lim_{n\to\infty}\int_0^\infty \frac{\log(x+n)}{n}\cdot e^{-x}\cos x\,dx = 0.$$
Návod: výraz $\frac{\log(x+n)}{n}$ odhadněte polynomem nezávislým na n a použijte Lebesgueovu větu.

5. Spočtěte
$$\lim_{n\to\infty}\int_0^\infty \frac{1}{\left(1+\frac{x}{n}\right)^n\cdot\sqrt[n]{x}}\,dx.$$
Návod: uvažujte zvlášť intervaly $(0,1)$ a $(1,\infty)$. Na $(0,1)$ je rozhodujícím členem $\sqrt[n]{x}$, zde lze použít Leviho i Lebesgueovu větu. Na $(1,\infty)$ rozhoduje $\left(1+\frac{x}{n}\right)^n$. Pro jeho odhad zespoda použijte binomickou větu a následně použijte Lebesgueovu větu. I na $(1,\infty)$ lze použít Leviho větu, nicméně použití je poněkud náročnější.

6. Existuje posloupnost funkcí $f_n:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f_n\searrow 0$ taková, aby platilo $\lim_{n\to\infty}\int_{-\infty}^\infty f_n \neq 0$? Návod: zkuste nejdříve sestrojit posloupnost množin A_n takovou, že $A_n\supset A_{n+1}$ a $\lambda(A_n)=\infty$, $n\in\mathbb{N}$, a která splňuje $\bigcap\limits_n A_n=\emptyset$. Pak položte $f_n=\chi_{A_n}$.

7. Spočtěte
$$\lim_{a\to\infty}\int_0^\infty e^{-ax^2}\,dx,\quad \lim_{a\to 0+}\int_0^\infty e^{-ax^2}\,dx.$$
Návod: pomocí Heineho věty převeďte na limitu posloupnosti.

8. Spočtěte
$$\lim_{a\to 1-}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\log(a-\sin x)}\,dx.$$
Návod: pomocí Heineho věty převeďte na limitu posloupnosti.

9. Spočtěte
$$\lim_{a\to\infty}\int_0^\infty x^{a-1}e^{-x}\,dx,\quad \lim_{a\to 0+}\int_0^\infty x^{a-1}e^{-x}\,dx.$$

10. Dokažte, že
$$\int_0^1 \frac{\log(1-x)}{x}\,dx = -\frac{\pi^2}{6}.$$
Návod: pro první příklad použijte rozvoj $\log(1-x)$ v mocninnou řadu. Pomocí Leviho věty pak dokažte, že lze integrovat člen po členu.

11. Dokažte, že
$$\int_0^\infty \frac{x}{e^x-1}\,dx = \frac{\pi^2}{6}.$$
Návod: vytkněte $\frac{x}{e^x}$ a zbytek rozveďte do nekonečné řady pomocí vzorečku pro geometrickou řadu.

*12. Vypočtěte
$$\int_0^\infty \log(1-e^{-x})\,dx.$$
Návod: vhodnou substitucí převeďte na jeden z předchozích příkladů.

*13. Dokažte, že
$$\int_0^\infty e^{-ax}\sin(bx)\,dx = \frac{b}{a^2+b^2}$$
pro $|b| < a$. Návod: $\sin(bx)$ rozveďte v Taylorovu řadu. Pro konvergenci použijte Lebesgueovu větu. Integrál lze spočítat i přímo.

*14. Ověřte pro $p, q > 0$, že
$$\int_0^1 \frac{x^{p-1}}{1+x^q}\,dx = \sum_{n=0}^\infty \frac{(-1)^n}{p+nq}.$$
Návod: všimněte si, že můžeme uvažovat jen $x \in (0,1)$. To znamená, že člen $\frac{1}{1+x^q}$ lze rozvést pomocí vzorce pro součet geometrické řady. Pak už stačí použít Lebesgueovu větu s majorantou $\frac{2x^{p-1}}{1+x^2}$ (k jejímůž odvození použijeme vzoreček pro částečné součty geometrické řady). Možno použít i Leviho větu, ale zde je užitečné rozvést v geometrickou řadu s kvocientem x^2.

*15. Ověřte, že
$$\int_0^\infty e^{-x}\cos(\sqrt{x})\,dx = \sum_{n=0}^\infty \frac{(-1)^n n!}{(2n)!}.$$
Návod: $\cos(\sqrt{x})$ rozvedeme do Taylorovy řady a následné integrály počítáme per partes (můžeme si zároveň všimnout, že jde o integrály z definice Γ funkce (př. 1) a použít, co o této případně víme).

*16. Ověřte, že

$$\int_0^1 \log\left(\frac{1}{1-x}\right)\, dx = 1.$$

Návod: použijeme vzoreček pro logaritmus podílu a pak rozvedeme v Taylorovu řadu.

*17. Ověřte pro $|b| < a$, že

$$\int_0^\infty e^{-ax} \frac{\sin(bx)}{x}\, dx = \arctan\left(\frac{b}{a}\right).$$

Návod: rozvedeme $\sin(bx)$ v Taylorovu řadu, integrujeme člen po členu (Lebesgueova věta) pomocí per partes. Na závěr porovnáme s Taylorovou řadou pro $\arctan x$.

Všechny příklady jsou převzaty ze sbírky prof. Lukeše, kde naleznete i podrobnější verze mnoha návodů, jde po řadě o příklady $4,3$; $4,22$; $4,23(d)$; $4,8$; $4,7$; $4,13$; $4,15$; $4,19$; $4,18$; $4,25$; $4,26$; $4,46(a)$ a $4,47$.

Co budeme potřebovat z teorie

Jde o funkcionály ve tvaru

$$F(y) = \int_a^b f(x, y(x), y'(x))\, dx \tag{1}$$

definované na množině

$$M = \{y \in C^1([a,b]) :\ y(a) = A,\ y(b) = B\}, \tag{2}$$

kde $a, b, A, B \in \mathbb{R}$, $a < b$ a $f \in C^2([a,b] \times \mathbb{R}^2)$.

Tuto obecnou situaci si ovšem upravíme na speciální úlohu

$$\Phi(u) = F(u + \varphi),$$

kde $\varphi(x) = \dfrac{B-A}{b-a}(x-a) + A$, a

$$X = \{u \in C^1([a,b]) :\ u(a) = u(b) = 0\}.$$

Je snadné si rozmyslet, že $u \in X$ právě tehdy, když $u + \varphi \in M$, a že $u \in X$ je extrémem funkcionálu Φ právě tehdy, když $u + \varphi$ je extrémem (stejného typu) funkcionálu F.

Věta (Euler-Lagrangeova rovnice)**.** *Nechť $f \in C^2([a,b] \times \mathbb{R}^2)$ a y je stacionárním bodem funkcionálu F. Potom je funkce*

$$x \mapsto f_z(x, y(x), y'(x))$$

spojitě diferencovatelná na $[a,b]$ a platí (tzv. ***Euler-Lagrangeova rovnice****)*

$$f_y(x, y(x), y'(x)) - (f_z(x, y(x), y'(x)))' = 0, x \in [a,b]. \tag{3}$$

Hlavní poznatky

1. (regularita minimizéru) pokud je y stacionárním bodem F a pro nějaké $\xi \in (a,b)$ platí
$$f_{zz}(\xi, y(\xi), y'(\xi)) \neq 0.$$
Potom existuje $\delta > 0$, že y je C^2 na okolí ξ.

2. (Lagrangeova nutná podmínka) pokud je y bodem minima funkcionálu F. Potom
$$f_{zz}(x, y(x), y'(x)) \geq 0, \quad x \in [a,b].$$

3. (Legendrova postačující podmínka) pokud je y stacionárním bodem funkcionálu F a pokud existují $\alpha, \delta > 0$, že

$$d^2\Phi_{h,h}(u_0) \geq \alpha||h||^2, \quad h \in X, \ ||h|| < \delta,$$

potom y je bodem minima.

4. (Lagrangeova postačující podmínka) pokud je y stacionárním bodem funkcionálu F. Jestliže existuje $\delta > 0$, že pro každé $h \in X$, $||h|| < \delta$ splňuje funkce $\varphi : t \mapsto F(y + th)$ podmínku

$$\varphi''(t) \geq 0, \quad t \in (0,1).$$

Potom F má v bodě y lokální minimum.

5. (konvexita a extrém) Pokud je zobrazení $(u,v) \mapsto f(x,u,v)$ konvexní pro všechna $x \in [a,b]$ a $y \in M \cap C^2([a,b])$ je stacionárním bodem funkcionálu F. Potom má F v bodě y minimum.

Definice (Jacobiho rovnice a konjugovaný bod)**.** *Nechť $f \in C^3([a,b] \times \mathbb{R}^2)$ a $y \in M \cap C^2([a,b])$ je stacionárním bodem funkcionálu F. Položme*

$$P(x) = f_{zz}(x, y(x), y'(x))$$

a

$$Q(x) = f_{yy}(x, y(x), y'(x)) - \left(f_{yz}(x, y(x), y'(x))\right)'.$$

Rovnici

$$-(Ph')' + Qh = 0$$

nazýváme ***Jacobiho rovnicí****. Bod $x \in (a,b]$ nazveme* ***konjugovaným bodem*** *k bodu a, pokud existuje netriviální řešení Jacobiho rovnice h, pro které platí $h(a) = h(x) = 0$.*

Věta (Jacobiho)**.** *Nechť $f \in C^3([a,b] \times \mathbb{R}^2)$ a $y \in M \cap C^2([a,b])$ je stacionárním bodem funkcionálu F a platí*

$$f_{zz}(x, y(x), y'(x)) > 0, \quad x \in [a,b].$$

Potom

1. *pokud na $(a,b]$ neexistuje konjugovaný bod k bodu a, potom y je bodem lokálního minima funkcionálu F na M.*

2. *pokud je y bodem lokálního minima funkcionálu F na M, potom na (a,b) neexistuje konjugovaný bod k bodu a.*

Příklady

1. Vyšetřete extrémy funkcionálu

$$F(y) = \int_0^1 (y)^2 + yy' + (y')^2$$

vzhledem k množině

$$M = \{y \in C^1([0,1]) : y(0) = 0, y(1) = \sinh 1\}.$$

2. Vyšetřete extrémy funkcionálu

$$F(y) = \int_0^1 \frac{x^3}{(y')^2}$$

vzhledem k množině

$$M = \{y \in C^1([2,3]) : y(2) = 4, y(3) = 9\}.$$

3. Vyšetřete extrémy funkcionálu

$$F(y) = \int_1^2 x^2(y')^2$$

vzhledem k množině

$$M = \{y \in C^1([1,2]) : y(1) = 1, y(2) = 2\}.$$

4. Vyšetřete extrémy funkcionálu

$$F(y) = \int_1^2 x^2(y')^2 + 2yy'$$

vzhledem k množině

$$M = \{y \in C^1([1,2]) : y(1) = 1, y(2) = 2\}.$$

5. Vyšetřete extrémy funkcionálu

$$F(y) = \int_{-1}^1 2y^2 + x^2(y')^2$$

vzhledem k množině

$$M = \{y \in C^1([1,2]) : y(-1) = -1, y(1) = 1\}.$$

Co budeme potřebovat z teorie

Jde o funkcionály ve tvaru

$$F(y) = \int_a^b f(x, y(x), y'(x))\, dx \tag{1}$$

definované na množině

$$M = \{y \in C^1([a,b]) :\ y(a) = A,\ y(b) = B\}, \tag{2}$$

kde $a, b, A, B \in \mathbb{R}$, $a < b$ a $f \in C^2([a,b] \times \mathbb{R}^2)$.

Tuto obecnou situaci si ovšem upravíme na speciální úlohu

$$\Phi(u) = F(u + \varphi),$$

kde $\varphi(x) = \dfrac{B-A}{b-a}(x-a) + A$, a

$$X = \{u \in C^1([a,b]) :\ u(a) = u(b) = 0\}.$$

Je snadné si rozmyslet, že $u \in X$ právě tehdy, když $u + \varphi \in M$, a že $u \in X$ je extrémem funkcionálu Φ právě tehdy, když $u + \varphi$ je extrémem (stejného typu) funkcionálu F.

Věta (o Lagrangeových multiplikátorech)**.** *Nechť $f, g \in C^2([a,b] \times \mathbb{R}^2)$, $\gamma \in \mathbb{R}$ a $y \in M$ je bodem minima funkcionálu F vzhledem k množině*

$$\{y \in M : G(y) = \gamma\},$$

kde

$$G(y) = \int_a^b g(x, y(x), y'(x))\, dx,$$

(zde opět značíme $\Psi(u) = G(u + \varphi)$). Pokud $d\Phi(y) \neq 0$, potom existuje $\lambda \in \mathbb{R}$, že

$$d\Phi(y)(h) = \lambda d\Psi(y)(h), \quad h \in X.$$

Příklady

1. Nalezněte minimum funkcionálu
$$F(y) = \int_0^{\pi} (y')^2$$
vzhledem k množině všech funkcí $y \in C^1([0,\pi])$, pro které platí $y(0) = y(\pi) = 0$ a $\displaystyle\int_0^{\pi} y^2 = 1$.

2. Nalezněte minimum funkcionálu
$$F(y) = \int_0^{1} (y')^2$$
vzhledem k množině všech funkcí $y \in C^1([0,1])$, pro které platí $y(0) = 1$, $y(1) = 6$ a $\displaystyle\int_0^{1} y = 3$.

3. Nalezněte minimum funkcionálu
$$F(y) = \int_0^{1} (y')^2$$
vzhledem k množině všech funkcí $y \in C^1([0,1])$, pro které platí $y(0) = 1$, $y(1) = \frac{1}{4}$ a $\displaystyle\int_0^{1} y - (y')^2 = \frac{1}{12}$.

Sada příkladů na 8. týden

Fubiniovu větu budeme používat v následujícím tvaru:

Věta 1 (Fubiniova věta)**.** *Pro funkci* $f \in \mathcal{L}^*(\mathbb{R}^{p+q})$ *a množinu* $A \in \mathcal{B}^{p+q}$ *platí*

$$\int_A f(x,y)\,d(x,y) = \int_{\pi_1 A} \left(\int_{A_x} f(x,y)\,dy \right) dx = \int_{\pi_2 A} \left(\int_{A^y} f(x,y)\,dx \right) dy.$$

Věta 2 (Věta o substituci)**.** *Buď* $U \subset \mathbb{R}^n$ *otevřená,* $\varphi : U \to \mathbb{R}^n$ *difeomorfismus a* $f : \varphi(U) \to \mathbb{R}$ *Lebesgueovsky měřitelná funkce. Pak*

$$\int_U f(\varphi(x))\,|\mathcal{J}\varphi(x)|\,dx = \int_{\varphi(U)} f(y)\,dy,$$

má-li jedna strana smysl.

Je-li navíc $B \subset \varphi(U)$ *Lebesgueovsky měřitelná množina, platí*

$$\int_{\varphi^{-1}(B)} f(\varphi(x))\,|\mathcal{J}\varphi(x)|\,dx = \int_B f(y)\,dy,$$

má-li jedna strana smysl.

Příklady:

1. Spočtěte $\lambda_2(M)$, kde
$$M = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : 4 - x \geq y \geq \frac{3}{x},\ x > 0 \right\}.$$

2. Spočtěte $\lambda_2(M)$, kde
$$M = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : x + 2 \geq y \geq x^2 \right\}.$$

3. Spočtěte $\int_M f$, kde
$$M = [3,4] \times [1,2], \quad f(x,y) = \frac{1}{(x+y)^2}.$$

4. Spočtěte $\int_M f$, kde
$$M = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq y\}, \quad f(x,y) = e^{-(x+y)}.$$

5. Spočtěte $\int_M f$, kde
$$M = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq y^2,\ y \geq x^2\}, \quad f(x,y) = x^2 + y.$$

6. Spočtěte $\int_M f$, kde

$$M = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \le 1\}, \quad f(x,y) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2-y^2}}.$$

Použijte Fubiniovu větu jak přímo, tak v kombinaci s větou o substituci (polární souřadnice).

7. Spočtěte $\int_M f$, kde

$$M = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \le x\}, \quad f(x,y) = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

Použijte Fubiniovu větu jak přímo, tak v kombinaci s větou o substituci (polární souřadnice).

8. Spočtěte $\int_M f$, kde M je množina omezená plochami $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ a $x + y + z = 1$ pro funkci

$$f(x,y,z) = \frac{1}{(1+x+y+z)^3}.$$

9. Spočtěte $\int_M f$, kde M je množina omezená plochami $x = y^2$, $y = x^2$, $z = 0$ a $z = xy$ pro funkci $f(x,y,z) = xyz$.

10. Spočtěte $\lambda_2(M)$, kde

$$M = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : (x^2+y^2)^2 \le 8(x^2-y^2)\right\}.$$

Návod: použijte polární souřadnice.

11. Spočtěte $\lambda_2(M)$, kde

$$M = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : (x+y)^4 < 3x^2y,\ x > 0\right\}.$$

Návod: použijde substituci pomocí zobrazení $(r,\phi) \mapsto (r\cos^2\phi, r\sin^2\phi)$.

12. Spočtěte $\lambda_2(M)$, kde

$$M = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \le x^2 \le 4y,\ 2x \le y^2 \le 3x\right\}.$$

Použijte Fubiniovu větu jak přímo, tak v kombinaci s větou o substituci (zobrazení $(x,y) \mapsto (\frac{x^2}{y}, \frac{y^2}{x})$).

13. Spočtěte $\lambda_2(M)$, kde

$$M = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \le x+y \le 2,\ 2x \le y \le 3x\right\}.$$

Použijte Fubiniovu větu jak přímo, tak v kombinaci s větou o substituci (zobrazení $(x,y) \mapsto (x+y, \frac{y}{x})$).

14. Spočtěte $\lambda_3(M)$, kde

$$M = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq \rho\right\},$$

$\rho > 0$. Návod: použijte sférické souřadnice.

15. Spočtěte $\lambda_3(M)$, kde

$$M = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 < 2z,\ x^2 + y^2 < z^2\right\}.$$

Návod: použijte sférické souřadnice.

16. Spočtěte $\lambda_3(M)$, kde

$$M = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 < z < 2\right\}.$$

Návod: použijte cylindrické souřadnice, nebo polární v kombinaci s Fubiniovou větou.

17. Spočtěte $\int_M f$ pro

$$M = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x, y > 0\}, \quad f(x,y) = e^{-x^2-y^2}$$

a pomocí této hodnoty spočtěte $\int_0^\infty e^{-x^2}$.

18. Pro $b > a > 0$ spočtěte $\int_M f$ pro

$$M = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0, b > y > a\}, \quad f(x,y) = \frac{1}{1 + x^2y^2},$$

pomocí Fubiniovy věty postupně v pobou pořadích integrace.

19. Pro $b > a > 0$ spočtěte $\int_M f$ pro

$$M = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 1 > x > 0, b > y > a\}, \quad f(x,y) = x^y,$$

pomocí Fubiniovy věty postupně v pobou pořadích integrace.

20. Spočtěte $\int_M f$ pro

$$M = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x, y > 0\}, \quad f(x,y) = \frac{1}{(1+x)(1+xy^2)}$$

pomocí Fubiniovy věty postupně v pobou pořadích integrace.

Co budeme potřebovat z teorie

Definice (bodová a stejnoměrná konvergence). *Pro posloupnost reálných funkcí $\{f_n\}$ definovaných na $A \subset \mathbb{R}^d$ a $f : A \to \mathbb{R}$ říkáme, že*

- *posloupnost $\{f_n\}$* ***konverguje bodově*** *k funkci f na množině A (značíme $f_n \to f$), pokud pro všechna $x \in A$ platí $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$,*
- *posloupnost $\{f_n\}$* ***konverguje stejnoměrně*** *k funkci f na množině A (značíme $f_n \rightrightarrows f$), pokud platí*

$$\forall \varepsilon > 0 \, \exists N \in \mathbb{N} \, \forall x \in A \, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq N : |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

- *posloupnost $\{f_n\}$* ***konverguje lokálně stejnoměrně*** *k funkci f na množině A (značíme $f_n \overset{loc}{\rightrightarrows} f$), pokud $f_n \rightrightarrows f$ na K pro každou $K \subseteq A$ kompaktní.*

Pro $\sigma_n = \sup_{x\in A} |f_n(x) - f(x)|$ platí

$$(f_n \rightrightarrows f) \iff \sigma_n \to 0.$$

Příklady

1. Vyšetřete bodovou, lokálně stejnoměrnou a stejnoměrnou konvergenci posloupnosti $f_n(x) = e^{-nx}$.
2. Vyšetřete bodovou. lokálně stejnoměrnou a stejnoměrnou konvergenci posloupnosti $f_n(x) = \frac{\sin(nx)}{\sqrt{n}}$.
3. Vyšetřete bodovou, lokálně stejnoměrnou a stejnoměrnou konvergenci posloupnosti $f_n(x) = \sin^n(x)$.
4. Vyšetřete bodovou, lokálně stejnoměrnou a stejnoměrnou konvergenci posloupnosti $f_n(x) = \arctan(nx)$.
5. Vyšetřete bodovou, lokálně stejnoměrnou a stejnoměrnou konvergenci posloupnosti $f_n(x) = \frac{nx}{1+x^2n^2}$.
6. Vyšetřete bodovou, lokálně stejnoměrnou a stejnoměrnou konvergenci posloupnosti $f_n(x) = \frac{x^n}{1+x^n}$.
7. Vyšetřete bodovou, lokálně stejnoměrnou a stejnoměrnou konvergenci posloupnosti $f_n(x) = n\left(\sqrt{x+\frac{1}{n}} - \sqrt{x}\right)$.
8. Vyšetřete bodovou, lokálně stejnoměrnou a stejnoměrnou konvergenci posloupnosti $f_n(x) = x^{2n} - x^{3n}$, $x \in [0,1]$.
9. Vyšetřete bodovou, lokálně stejnoměrnou a stejnoměrnou konvergenci posloupnosti $f_n(x) = \sqrt{n^2+1}(e^{\frac{1}{nx}} - 1)$, $x > 0$.
10. Vyšetřete bodovou, lokálně stejnoměrnou a stejnoměrnou konvergenci posloupnosti $f_n(x) = \sqrt[n]{3^n + x^n}$.
11. Vyšetřete bodovou, lokálně stejnoměrnou a stejnoměrnou konvergenci posloupnosti $f_n(x) = \frac{x^{pn}}{1+n+x^{qn}}$ v závislosti na parametrech p, q pro $x \in (0, \infty)$.
12. Vyšetřete bodovou, lokálně stejnoměrnou a stejnoměrnou konvergenci posloupnosti $f_n(x) = n^2(1 - \cos\frac{x}{n})$.

1. cvičení

Vyšetřete konvergenci následujících integrálů ($\alpha \in \mathbf{R}$ je parametr):

$$1.\ \int_0^\infty \frac{dx}{\sqrt{x^3+5x+3}},\quad 2.\ \int_0^1 \frac{\log x}{1-x^2}dx,\quad 3.\ \int_0^\infty \frac{x-\sin x}{x^\alpha}dx$$

$$5.\ \int_0^\infty \frac{x\sin x}{1+x^2}dx \text{ (i absolutní konvergenci)},\quad 6.\ \int_0^{\frac{\pi}{2}} \log(\cos x)\tan^\alpha x\,dx\quad .$$

Nalezněte objemy

4. jednotkové koule, 7. anuloidu.

Výsledky a návody:

1. Konverguje ; U ∞ limitně srovnáme s $\dfrac{1}{x^{\frac{3}{2}}}$.

2. Konverguje; U 1 víme $\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{\log x}{1-x}=1$, a proto limitně srovnáme s 1.

U 0 srovnáme s $\log x$ a $\int_0^1 |\log x| < \infty$ zjistíme z per partes.

3. Konverguje pro $\alpha \in (2,4)$; U 0 limitně srovnáme s $\dfrac{x^3}{x^\alpha}$.

U ∞ (nelimitně) srovnáme s $\dfrac{x+1}{x^\alpha}$.

5. Konverguje neabsolutně. Z Abel-Dirichleta víme, že $\int_0^\infty \dfrac{\sin x}{x}dx$ konverguje a

$$\int_0^\infty \Big(\frac{x\sin x}{1+x^2}-\frac{\sin x}{x}\Big)dx = \int_0^\infty \frac{-\sin x}{(1+x^2)x}\,dx \text{ snadno konverguje - u } \infty \text{ srovnej s } \frac{1}{x^3}.$$

$$\text{Absolutně diverguje: } \int_0^\infty \frac{x|\sin x|}{1+x^2}dx \ge \sum_{k=1}^\infty \int_{\frac{\pi}{4}+k\pi}^{\frac{3}{4}\pi+k\pi} \ge \sum_{k=1}^\infty \frac{\pi}{2}\frac{(\frac{\pi}{4}+k\pi)|\frac{1}{2}|}{1+(\frac{3}{4}\pi+k\pi)^2} = \infty\ .$$

6. Konverguje pro $\alpha \in (-3,1)$; U 0 limitně srovnáme s $(1-\cos x)x^\alpha \sim x^{2+\alpha}$.

U $\dfrac{\pi}{2}$ se chová jako $\dfrac{\log(\cos x)}{\cos^\alpha x}$. Vzhledem k $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{\cos x}{\frac{\pi}{2}-x}=1$

je tato funkce stejně integrovatelná, jako funkce $\dfrac{\log y}{y^\alpha}$ u 0, tedy pro $\alpha<1$.

4. $\dfrac{4}{3}\pi$; Koule vznikne rotací funkce $f(x)=\sqrt{1-x^2}$ okolo osy x.

Objem je tedy $V=\pi\int_{-1}^1(\sqrt{1-x^2})^2\,dx = \dfrac{4}{3}\pi$.

7. $4\pi^2$; Uvažujme anuloid vzniklý rotací kruhu $\{[x,y] : x^2+(y-2)^2 \le 1\}$ okolo osy x.
Anuloid vznikne jako rozdíl tělesa vzniklého rotací $y_1 = 2+\sqrt{1-x^2}$ a tělesa $y_2 = 2-\sqrt{1-x^2}$.

$$V=\pi\int_{-1}^1\big[(2+\sqrt{1-x^2})^2-(2-\sqrt{1-x^2})^2\big]\,dx = 16\pi\int_0^1\sqrt{1-x^2}\,dx\ .$$

2. cvičení

Vyšetřete konvergenci následujících integrálů ($\alpha \in \mathbf{R}$ je parametr):

$$1.\ \int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{x}\log(1+e^x)}dx,\quad 2.\ \int_{-\infty}^\infty e^{-\alpha x^2}dx,\quad 3.\ \int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\Big(\frac{1}{\sin x}\Big)dx$$

$$6.\ \int_0^\infty \sin\Big(\sqrt{x^{2\alpha}+1}-x^\alpha\Big)dx,\quad 8.\int_0^1 \frac{\arccos x}{\log^\alpha(1/x)}\,dx,\quad 9.\ \int_0^\infty (\pi-2\arctan x)^\alpha dx.$$

4. Nalezněte obsah povrchu jednotkové koule v$\mathbf{R}^3$.

5. Nalezněte obsah plochy mezi grafy funkcí $\dfrac{x^2}{2}$ a $\dfrac{1}{1+x^2}$.

Pomocí Riemanova integrálu spočtěte

$$7.\ \lim_{n\to\infty} \frac{1^p + 2^p + \ldots + n^p}{n^{p+1}},\ p > 1\ .$$

Výsledky a návody:

1. Konverguje; U 0 srovnej s $\dfrac{1}{\sqrt{x}}$ a u ∞ srovnej s $\dfrac{2}{x^{\frac{3}{2}}}$.

2. Konverguje pro $\alpha > 0$; Pro $\alpha > 0$ na $(-\infty, -1]$ a $[1, \infty)$ srovnej s $e^{-\alpha|x|}$ nebo limitně srovnej s $\dfrac{1}{x^2}$. Pro $\alpha \leq 0$ srovnej s 1. Na $[-1, 1]$ je funkce spojitá .

3. Konverguje; Srovnávací kritérium a $|f(x)| \leq 1$.

4.$S = 4\pi$; Koule vznikne rotací funkce $f(x) = \sqrt{1-x^2}$, $x \in [-1, 1]$, kolem osy x.

$$\text{Tedy } S = 2\pi \int_a^b f\sqrt{1+(f')^2} = 2\pi \int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2}\sqrt{1+\Big(\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\Big)^2} = 2\pi \int_{-1}^1 1\,dx.$$

5.$S = \dfrac{\pi}{2} - \dfrac{1}{3}$; Z rovnice $\dfrac{x^2}{2} = \dfrac{1}{1+x^2}$ dostaneme $x = \pm 1$.

$$S = \int_{-1}^1 \Big(\frac{1}{1+x^2} - \frac{x^2}{2}\Big)\,dx = \Big[\arctan x - \frac{x^3}{6}\Big]_{-1}^1 = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{3}$$

6. Konverguje pro $\alpha > 1$; U ∞ limitně srovnáme se $\sin\Big(\dfrac{1}{\sqrt{x^{2\alpha}+1}+x^\alpha}\Big) \sim \dfrac{1}{x^\alpha}$. pro $\alpha > 0$ a pro $\alpha \leq 0$ u ∞ limitně srovnáme s 1. To konverguje pro $\alpha > 1$ a pro $\alpha > 1$ je funkce u 0 spojitá.

$$7.\ \frac{1}{p+1};\ \frac{1^p + 2^p + \ldots + n^p}{n^{p+1}} = \frac{1}{n}\Big(\Big(\frac{1}{n}\Big)^p + \Big(\frac{2}{n}\Big)^p + \ldots + \Big(\frac{n}{n}\Big)^p\Big) =$$

Toto je Riemannovský součet funkce x^p, a tedy $\lim = \displaystyle\int_0^1 x^p\,dx = \frac{1}{p+1}$.

8. Konverguje pro $\alpha < \dfrac{3}{2}$; U 0 se chová jako $\dfrac{1}{\log^\alpha(1/x)}$, a tedy limitním srovnáním s $\dfrac{1}{\sqrt{x}}$ konverguje. U 1 limitně srovnáme s $\dfrac{\sqrt{1-x}}{(1-x)^\alpha}$.

9. Konverguje pro $\alpha > 1$; U 0 spojitá. U ∞ limitně srovnáme s $\dfrac{1}{x^\alpha}$, neboť pomocí l'Hospitala zjistíme $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{\pi - 2\arctan x}{\frac{1}{x}} = 2$.

3. cvičení

NA 5. CVICENI BUDE PISEMKA!

Nalezněte $\lim_{n\to\infty}$ z následujících integrálů:

$$1.\ \int_0^1 x^n,\ 2.\ \int_0^{100} \frac{e^{x^3}}{1+nx},\ 3.\ \int_0^1 \frac{nx}{1+n^2x^2},\ 4.\ \int_0^\infty \frac{\log(x+n)}{n} e^{-x}\cos x,$$

$$6.\ \int_0^1 nx^{15}\sin\left(\frac{x^2}{n}\right),\ 7.\ \int_0^\infty e^{-x^n},\ 8.\ \int_0^\infty \frac{dx}{(1+\frac{x}{n})^n\sqrt[n]{x}}.$$

Spočtěte (za pomoci Heineho věty)

$$5.\ \lim_{a\to\infty} F(a) \text{ a } \lim_{a\to 0+} F(a) \text{ pro } F(a) = \int_0^\infty \frac{e^{-ax^2}}{1+x}\, dx\,.$$

Návody:

$$1.\ 0;\ \text{Z Lebesgueovy věty a } 0 \le x^n \le x \text{ nebo z Leviho.}$$

$$2.\ 0;\ \text{Z Lebesgueovy věty a } 0 \le f_n \le \frac{e^{x^3}}{1+x} \text{ nebo z Leviho.}$$

$$3.\ 0;\ \text{Z Lebesgueovy věty a } 0 \le f_n \le \frac{1}{2}.$$

$$4.\ 0;\ \text{Z Lebesgueovy věty a } |f_n| \le e^{-x}\frac{x+n}{n} \le e^{-x}(x+1).$$

$$5.\ 0 \text{ a } \infty;\quad \text{Pro } a_n \to \infty \text{ a } a_n \ge 1 \text{ platí } \frac{e^{-a_n x^2}}{1+x} \le e^{-x^2} \text{ což je integrovatelné.}$$

Z Lebesgue a $\lim_{n\to\infty} \int_0^\infty \frac{e^{-a_n x^2}}{1+x} = \int_0^\infty \lim_{n\to\infty} \frac{e^{-a_n x^2}}{1+x} = 0$, a tedy podle Heineho $\lim_{a\to\infty} F(a) = 0$.

Zřejmě $e^{-ax^2} \ge \frac{1}{e}$ pro $x \le \frac{1}{\sqrt{a}}$. Tedy $\int_0^\infty \frac{e^{-ax^2}}{1+x} \ge \int_0^{\frac{1}{\sqrt{a}}} \frac{1}{e(1+x)} = \frac{1}{e}\log\big(\frac{1}{\sqrt{a}}+1\big) \overset{a\to 0+}{\to} \infty$.

6. $\frac{1}{18}$; Bodová limita je $x^{17}\frac{\sin\frac{x^2}{n}}{\frac{x^2}{n}} \to x^{17}$. Z Lebesgueovy věty a $|f_n| \le nx^{15}\frac{x^2}{n} = x^{17}$.

7. 1; Z Lebesgueovy věty a $f_n \le 1$ na $(0,1)$ a $f_n \le e^{-x}$ na $(1,\infty)$, nebo z Leviho.

8. 1; Bodová limita je $\frac{1}{e^x \cdot 1}$ a $\int_0^\infty e^{-x} = 1$. Z Lebesgueovy věty a

$$f_n \le \frac{1}{\sqrt{x}} \text{ na } (0,1) \text{ a } f_n \le \frac{1}{(1+\frac{x}{n})^n} \le \frac{1}{1+\frac{x}{n}n + \frac{x^2}{n^2}\frac{n(n-1)}{2}} \le \frac{1}{1+\frac{x^2}{4}} \text{ na } (1,\infty).$$

4. cvičení

Vyjádřete následující integrály jako součet řady:

$$1.\ \int_0^1 \frac{\log(1-x)}{x},\ 2.\ \int_0^\infty \frac{x}{e^x+1}\, dx,\ 3.\ \int_0^1 \frac{x^p\ \log(x)}{1+x^2}\, dx \ \text{ pro } p>0,$$

$$4.\ \int_0^\infty \log\Big(\frac{1-e^{-x}}{1+e^{-x}}\Big)\, dx,\ 5.\ \int_0^1 \frac{x^{p-1}}{1+x^q}\, dx \ (\text{pro } p,q>0),\ 6.\ \int_0^\infty e^{-x}\cos(\sqrt{x})\, dx.$$

Návody:

$$1.\ \sum_{n=1}^\infty \frac{-1}{n^2};\ \text{Rozvineme do } \sum_{n=1}^\infty \frac{-x^{n+1}}{n}.\ \text{Podle Leviho na } \sum_{n=1}^\infty -f_n.$$

$$2.\ \sum_{n=0}^\infty \frac{(-1)^n}{(n+1)^2};\ \text{Rozvineme do } \sum_{n=0}^\infty (-1)^n x e^{-(n+1)x}.$$

$$\text{Podle Lebesgua } \sum_{n=0}^\infty \int |f_n| = \sum_{n=0}^\infty \int_0^\infty x e^{-(n+1)x} = \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{(n+1)^2} < \infty.$$

$$3.\ \sum_0^\infty (-1)^{n+1}\frac{1}{(2n+p+1)^2};\text{Rozvineme do } \sum_{n=0}^\infty x^p\log(x)(-1)^n x^{2n}$$

$$\text{Podle Lebesgua } \sum_{n=0}^\infty \int |f_n| = \sum_{n=0}^\infty \int_0^\infty x^p(-1)\log(x)x^{2n} = \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{(2n+p+1)^2} < \infty\,.$$

4. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{-1+(-1)^n}{n^2}$; Rozvineme jako $\log(1-e^{-x})-\log(1+e^{-x})=\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{-e^{-nx}}{n}+\frac{(-1)^n e^{-nx}}{n}$.

$$\text{Podle Lebesgua } \sum_{n=1}^{\infty}\int |f_n| \le \sum_{n=0}^{\infty}\int_0^{\infty} 2\frac{e^{-nx}}{n} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n^2} < \infty.$$

5. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{p+qn}$; Zřejmě $\le x^{p-1}$, a tedy integrál konverguje.

Rozvineme do $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{p+qn-1}$. Podle Lebesgueovy věty pro funkce $F_N=\displaystyle\sum_{n=0}^{N} f_n$

$$|\sum_{n=0}^{N} f_n| = |\sum_{n=0}^{N}(-1)^n x^{p+qn-1}| = x^{p-1}\frac{1-(-x)^{Nq+1}}{1+x^q} \le x^{p-1}\frac{2}{1+x^q} \in L^1(0,1).$$

6. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{n!}{(2n)!}$; Rozvineme do $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n e^{-x}\frac{x^n}{(2n)!}$.

$$\text{Podle Lebesgua } \sum_{n=0}^{\infty}\int |f_n| = \sum_{n=0}^{\infty}\int_0^{\infty} e^{-x}\frac{x^n}{(2n)!}.$$

$$\text{Indukcí snadno } \int_0^{\infty} x^n e^{-x} = (n)! \text{ a } \sum \frac{n!}{(2n)!} < \infty.$$

6. cvičení

U následujících integrálů vyšetřete pro jaká α konvergují a vyšetřete spojitost na definičním oboru:

1. $\displaystyle\int_0^{\infty}\frac{\sin(\alpha x)}{1+x^2}$, 2. $\displaystyle\int_0^{\infty}\frac{e^{-\alpha x^2}}{1+x}$, 3. $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x^2+\alpha^2}}$ a nalezněte i $\displaystyle\lim_{\alpha\to\infty}$ a $\displaystyle\lim_{\alpha\to 0}$,

4. $\displaystyle\int_0^{\infty}\frac{x}{1+x^{\alpha}}$, 5. $\displaystyle\int_0^{\infty}\frac{\alpha e^{-\alpha x^2}}{1+x}$ a nalezněte i $\displaystyle\lim_{\alpha\to 0+}$, 6. $\displaystyle\int_0^1\frac{1-x^{\alpha}}{\log x}$.

Návody:

1. spojitá na $\mathbf{R}$; $|f(x,\alpha)| \le \dfrac{1}{1+x^2} \in L^1$.

2. spojitá na $(0,\infty)$; Pro $\alpha\in[\delta,\infty)$ je $|f(x,\alpha)|\le e^{-\delta x^2}\in L^1$.

3. spojitá na $(-\infty,0)\cup(0,\infty)$; Pro $|\alpha|>\delta$ je $|f(x,\alpha)| \le \dfrac{1}{\sqrt{\delta^2}} = \dfrac{1}{\delta} \in L^1$.

Pro $\alpha\in[1,\infty)$ je 1 integrovatelná majoranta a podle Lebesguea a Heineho je

$$\lim_{\alpha\to\infty}\int_0^1\frac{1}{\sqrt{x^2+\alpha^2}} = \int_0^1 \lim_{\alpha\to\infty}\frac{1}{\sqrt{x^2+\alpha^2}} = \int_0^1 0 = 0.$$

$$\text{Pro } |\alpha|\le\delta \text{ je } \int_0^1\frac{1}{\sqrt{x^2+\alpha^2}} \ge \int_0^1\frac{1}{\sqrt{x^2+\delta^2}} \ge \int_\delta^1 \frac{1}{\sqrt{2}x} = \frac{-1}{\sqrt{2}}\log\delta \overset{\delta\to 0+}{\to} \infty.$$

4. spojitá na $(2,\infty)$; Pro $\alpha\in[2+\delta,\infty)$ je $|f(x,\alpha)| \le \begin{cases}\frac{x}{1+x^{2+\delta}} & \text{pro } x>1\\ 1 & \text{pro } x<1.\end{cases}$

5. spojitá na $[0,\infty)$; Pro $\alpha\in[\delta,K]$ je $|f(x,\alpha)| \le \dfrac{Ke^{-\delta x^2}}{1+x} \le Ke^{-\delta x^2}\in L^1$.

Pro spojitost v 0 zprava musíme spočítat $\displaystyle\lim_{\alpha\to 0+}F(\alpha)$. Substitucí $y=\sqrt{a}x$

$$\text{odhadneme } \int_0^{\infty}\frac{\alpha e^{-\alpha x^2}}{1+x} \le \int_0^{\infty}\alpha e^{-\alpha x^2} = \int_0^{\infty}\sqrt{\alpha}e^{-y^2} = \sqrt{\alpha}\int_0^{\infty} e^{-y^2} \overset{\alpha\to 0+}{\to} 0.$$

6. spojitá na $(-1,\infty)$; V 1 lze spojitě dodefinovat a u 0 standartně srovnáme s $\dfrac{x^\alpha}{\log x}$.

Pro $\delta<1$ a $\alpha\in[-1+\delta,0]$ máme $|f(x,\alpha)|\le\dfrac{x^{-1+\delta}-1}{|\log x|}$ a pro $\alpha\in[0,K]$ je $|f(x,\alpha)|\le\dfrac{1-x^K}{|\log x|}$.

7. cvičení

Spočtěte následující integrály (pomocí věty o záměně derivace a integrálu). Obor konvergence je u každého příkladu napsán.

1. $\displaystyle\int_0^\infty \frac{1-e^{-ax^2}}{xe^{x^2}}$, $a>-1$; 2. $\displaystyle\int_0^\infty \frac{e^{-ax^2}-e^{-bx^2}}{x^2}$, $a,b>0$ (Rada: $\displaystyle\int_0^\infty e^{-x^2}=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$)

3. $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\arctan ax-\arctan bx}{x}$, $a,b>0$ nebo $a,b<0$; 4. $\displaystyle\int_0^\infty e^{-kx}\frac{\sin ax}{x}$, $k>0$, $a\in\mathbf{R}$;

$$5.\ \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(a^2\sin^2 x+b^2\cos^2 x),\ a,b>0.$$

Návody:

$$1. \frac{\ln(a+1)}{2};\ \left|\frac{\partial f(x,a)}{\partial a}\right| = \left|xe^{-(a+1)x^2}\right| \le xe^{-\delta x^2} \text{ pro } a\in(-1+\delta,\infty).$$

$$2. \sqrt{\pi b}-\sqrt{\pi a};\ \left|\frac{\partial f(x,a,b)}{\partial a}\right| = \left|-e^{-ax^2}\right| \le e^{-\delta x^2} \text{ pro } a\in(\delta,\infty).$$

$$\int_0^\infty -e^{-ax^2} = -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{a}} \Rightarrow F(a,b)=C(b)-\sqrt{\pi a} \text{ a } F(b,b)=0.$$

$$3. \frac{\pi}{2}\ln\frac{a}{b};\ \left|\frac{\partial f(x,a,b)}{\partial a}\right| = \left|\frac{1}{1+a^2x^2}\right| \le \frac{1}{1+\delta^2x^2} \text{ pro } |a|\ge\delta.$$

$$\int_0^\infty \frac{1}{1+a^2x^2} = \frac{\pi}{2a} \text{ a } F(b,b)=0.$$

$$4.\ \arctan\frac{a}{k};\ \left|\frac{\partial f(x,a,k)}{\partial a}\right| = \left|e^{-kx}\cos ax\right| \le e^{-kx} \text{ pro } a\in\mathbf{R}.$$

$$\int_0^\infty e^{-kx}\cos ax = \left[e^{-kx}\frac{a\sin ax-k\cos ax}{a^2+k^2}\right]_{x=0}^{x=\infty} = \frac{k}{a^2+k^2} \text{ a } F(0,k)=0.$$

$$5.\ \pi\ln\frac{|a|+|b|}{2};\ \left|\frac{\partial f(x,a,b)}{\partial a}\right| = \left|\frac{2}{a}\frac{a^2\sin^2 x}{a^2\sin^2 x+b^2\cos^2 x}\right| \le \frac{2}{\delta} \text{ pro } |a|>\delta$$

Substitucí $\tan x=t$ spočteme $\dfrac{\partial F(a,b)}{\partial a}=\dfrac{\pi}{a+b}$.

8. cvičení

Za pomoci Fubiniovy věty ve dvou dimenzích spočtěte

$$3.\ \int_0^1 \frac{x^b-x^a}{\log x}\,dx \text{ pro } a,b>-1,\ 5.\ \int_0^\infty \frac{e^{-ax^2}-e^{-bx^2}}{x^2}\,dx \text{ pro } a,b>0.$$

Nalezněte míru následujích podmnožin $\mathbf{R}^2$

$$1.\ \{x^2<y<x+2\},\ 2.\ \left\{y\le x,\ 0<y<\frac{1}{x^2}\right\}.$$

Spočtěte následující dvourozměrné integrály

4. $\displaystyle\int_M (x^2+y^2)\,dxdy$ pro $M=\{|x|+|y|\le 1\}$, 6. $\displaystyle\int_M e^{-(x+y)}dxdy$ pro $M=\{0\le x\le y\}$,

$$7.\ \int_M \frac{x^2}{y^2}\,dxdy \text{ pro } M \text{ omezenou mezi křivkami } x=2,\ y=x \text{ a } xy=1,$$

$$8.\ \int_M (\sqrt{x}+y)\ dxdy \text{ pro } M=\{x^2+y^2\le x\}$$

Návody:

$$1. \frac{9}{2};\ \int_{-1}^{2}\int_{x^2}^{x+2} 1\ dy\ dx = \int_{-1}^{2}(x+2-x^2)\ dx.$$

$$2.\ \frac{3}{2};\ \int_0^1\int_0^x 1\ dy\ dx + \int_1^\infty\int_0^{\frac{1}{x^2}} 1\ dy\ dx = \int_0^1 x\ dx + \int_1^\infty \frac{1}{x^2}\ dx$$

$$3. \log\frac{b+1}{a+1};\ \int_0^1 \frac{x^b-x^a}{\log x} = \int\int_M x^y = \int_a^b \frac{1}{y+1} = \log\frac{b+1}{a+1}.$$

$$4.\ \frac{2}{3};\ 4\int_0^1\int_0^{1-x}(x^2+y^2)\ dy\ dx = 4\int_0^1\Big((1-x)x^2+\frac{(1-x)^3}{3}\Big)\ dx$$

$$5. \sqrt{\pi b}-\sqrt{\pi a};\ \int_0^\infty \frac{e^{-ax^2}-e^{-bx^2}}{x^2} = \int\int_M e^{-yx^2} = \int_a^b \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{y}} = \sqrt{\pi b}-\sqrt{\pi a}.$$

$$6.\ \frac{1}{2};\ \int_0^\infty\int_0^y e^{-(x+y)}\ dx\ dy = \int_0^\infty e^{-y}(1-e^{-y})\ dy$$

$$7.\ 2\frac{1}{4};\ \int_1^2\int_{\frac{1}{x}}^x \frac{x^2}{y^2}\ dy\ dx = \int_1^2 x^2\Big(x-\frac{1}{x}\Big)\ dx$$

$$8.\ \frac{8}{15};\ \int_0^1\int_{-\sqrt{x-x^2}}^{\sqrt{x-x^2}}(\sqrt{x}+y)\ dy\ dx = 2\int_0^1 \sqrt{x}\sqrt{x-x^2} = 2\int_0^1 (1-z)\sqrt{z}\ dz$$

9. cvičení

Na 11. cvičení bude zápočtová písemka

Spočtěte následující dvourozměrné integrály

1. $\int_M \frac{1}{\sqrt{1-x^2-y^2}}\ dxdy$ pro $M=\{x^2+y^2\le 1\}$, 2. $\int_M \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\ dxdy$ pro $M=\{x^2+y^2\le x\}$.

Nalezněte míru následujích množin $M\subset \mathbf{R}^2$

3. $\{(x+y)^3<xy,\ x\ge 0,\ y\ge 0\}$, 4. $\{x^3+y^3<xy,\ x>0,\ y>0\}$, 5. $\{2\sqrt{|x|}+\sqrt{|y|}\le 1\}$,

6. $\{1<xy<2, y<x<3y\}$, 7.$\{y<x^2<4y,\ 2x<y^2<3x\}$.

Návody:

$$1.\ 2\pi;\ \text{Polární souřadnice a } \int_0^1\Big(\int_0^{2\pi}\frac{r\ d\varphi}{\sqrt{1-r^2}}\Big)\ dr$$

2. 2; Polární souřadnice a $0\le x^2+y^2\le x$ dá $0\le r\le \cos\varphi$. $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\Big(\int_0^{\cos\varphi}\frac{r\ dr}{\sqrt{r^2}}\Big)\ d\varphi.$

$$3.\ \frac{1}{60};\ \text{Transformace } x=r\cos^2\varphi \text{ a } y=r\sin^2\varphi$$

transformuje M na $0\le r\le \sin^2\varphi\cos^2\varphi$ a $J_f=2r\sin\varphi\cos\varphi$.

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\Big(\int_0^{\sin^2\varphi\cos^2\varphi} 2r\sin\varphi\cos\varphi\ dr\Big)\ d\varphi = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^5\varphi\cos^5\varphi\ d\varphi$$

$$4.\ \frac{1}{6};\ \text{Transformace } x=r\cos^{\frac{2}{3}}\varphi \text{ a } y=r\sin^{\frac{2}{3}}\varphi$$

transformuje M na $0\le r\le \sin^{\frac{2}{3}}\varphi\cos^{\frac{2}{3}}\varphi$ a $J_f=\frac{2}{3}r\sin^{-\frac{1}{3}}\varphi\cos^{-\frac{1}{3}}\varphi$.

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\Big(\int_0^{\sin^{\frac{2}{3}}\varphi\cos^{\frac{2}{3}}\varphi}\frac{2}{3}r\sin^{-\frac{1}{3}}\varphi\cos^{-\frac{1}{3}}\varphi\ dr\Big)\ d\varphi = \frac{1}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\varphi\cos\varphi\ d\varphi$$

5. $\frac{1}{6}$; Transformace $x = \frac{1}{4} r \cos^4 \varphi$ a $y = r \sin^4 \varphi$

transformuje $M \cap \{x > 0,\ y > 0\}$ na $0 \le r \le 1,\ 0 < \varphi < \frac{\pi}{2}$ a tam $J_f = r \sin^3 \varphi \cos^3 \varphi > 0$.

$$4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \Big(\int_0^1 r \sin^3 \varphi \cos^3 \varphi \, dr \Big) \, d\varphi = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 \varphi \cos^3 \varphi \, d\varphi$$

6. $\frac{1}{2} \log 3$; Transformace $u = xy,\ v = \frac{x}{y}$ neboli $x = \sqrt{uv}$ a $y = \sqrt{\frac{u}{v}}$

transformuje M na $1 \le u \le 3,\ 1 < v < 3$ a tam $J_f = \frac{1}{2v} > 0$. $\int_1^2 \Big(\int_1^3 \frac{1}{2v} \, dv \Big) \, du.$

7. 1; Transformace $u = \frac{x^2}{y},\ v = \frac{y^2}{x}$ neboli $x = \sqrt[3]{uv^2}$ a $y = \sqrt[3]{u^2 v}$

transformuje M na $1 \le u \le 4,\ 2 < v < 3$ a $J_f = \frac{1}{3}$. $\int_1^4 \Big(\int_2^3 \frac{1}{3} \, dv \Big) \, du.$

10. cvičení

Na tabuli jsme počítali následující příklady:
Pomocí Fubiniovy věty nalezněte míru následujích podmnožin $\mathbf{R}^3$

1. $\{0 < x < 3,\ 0 < y < 3,\ xy < z < 1\}$, 2. $\{x \ge 0,\ y \ge 0,\ 0 \le z \le 1 - x - y\}$,

3. M omezená plochami $z = 1$ a $z = x^2 + y^2$.

Pomocí Fubiniovy věty spočtěte následující trojrozměrné integrály

4. $\int_M x \, dxdydz$ pro M omezenou $x = 0,\ y = 0\ z = 0,\ y = 3$ a $x + z = 2$

5. $\int_M z^2 \, dxdydz$ pro $M = \{x^2 + y^2 + z^2 \le 1,\ x^2 + y^2 + z^2 \le 2z\}$.

Pomocí věty o substituci spočtěte následující trojrozměrné integrály

6. $\int_M 1 \, dxdydz$ pro $M = \{x^2 + y^2 < z < 1\}$,

7. $\int_M z \, dxdydz$ pro $M = \{x^2 + y^2 \le z^2,\ z \in (0, 2)\}$,

8. $\int_M 1 \, dxdydz$ pro $M = \Big\{ \frac{y^2}{2} + \frac{z^2}{3} \le \frac{1}{1 + x^2} \Big\}$,

9. $\int_M 1 \, dxdydz$ pro $M = \Big\{ (2 - \sqrt{x^2 + y^2})^2 + z^2 \le 1 \Big\}$.

Návody:

1. $\log 9 - \frac{7}{12}$; $\int_0^3 \int_0^{\min(\frac{1}{x}, 3)} \int_{xy}^1 1 \, dz \, dy \, dx =$

$$= \int_0^{\frac{1}{3}} \int_0^3 \int_{xy}^1 1 \, dz \, dy \, dx + \int_{\frac{1}{3}}^3 \int_0^{\frac{1}{x}} \int_{xy}^1 1 \, dz \, dy \, dx \, .$$

2. $\frac{1}{6}$; $\int_0^1 \int_0^{1-x} \int_0^{1-x-y} 1 \, dz \, dy \, dx$

3. $\frac{\pi}{2}$; z je od 0 do 1 je řez kruh o poloměru $\sqrt{z}$: $\int_0^1 \pi (\sqrt{z})^2 \, dz$.

4. 4; $\int_0^2 \int_0^3 \int_0^{2-x} x \, dz \, dy \, dx$

5. $\frac{59}{480} \pi$; Pro $z \in [0, \frac{1}{2}]$ je řez kruh o poloměru $\sqrt{2z - z^2}$, pro $z \in [\frac{1}{2}, 1]$

je řez kruh o poloměru $\sqrt{1-z^2}$: $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} z^2\pi(\sqrt{2z-z^2})^2\, dz + \int_{\frac{1}{2}}^2 z^2\pi(\sqrt{1-z^2})^2\, dz$.

6. $\frac{\pi}{2}$; Válcové souřadnice $x = r\cos\varphi,\ y = r\sin\varphi,\ z = a,$ pak $J_f = r > 0$.

$$x^2+y^2 < z < 1 \text{ transformuji na } r^2 < a < 1 : \int_0^{2\pi}\int_0^1\int_{r^2}^1 r\ da\ dr\ d\varphi\ .$$

7. 4π; Válcové souřadnice $\displaystyle\int_0^2\int_0^{2\pi}\int_0^a ar\ dr\ d\varphi\ da.$

8. $\sqrt{6}\pi^2$; Upravené válcové souřadnice $y = \sqrt{2}r\cos\varphi,\ z = \sqrt{3}r\sin\varphi,\ x = a,$

pak $J_f = \sqrt{6}r > 0$. $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\int_0^{2\pi}\int_0^{\sqrt{\frac{1}{a^2+1}}} \sqrt{6}r\ dr\ d\varphi\ da$.

9. $4\pi^2$; Válcové souřadnice dají $(2-r)^2 + a^2 \le 1,$ a tedy $r \in [1,3]$.

$$\int_0^{2\pi}\int_1^3\int_{-\sqrt{1-(2-r^2)}}^{\sqrt{1-(2-r^2)}} r\ da\ dr\ d\varphi\ .$$

12. cvičení

Na tabuli jsme počítali následující příklady:
Spočtěte následující trojrozměrné objemy či integrály

1. $\mathcal{L}^3(M)$ pro $M = \{x^2+y^2+z^2 \le 2z,\ x^2+y^2 \le z^2\}$,
2. Spočtěte 1. jak přes sférické, tak i válcové souřadnice},
3. $\mathcal{L}^3(M)$ pro $M = \Big\{\Big(\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}\Big)^2 \le x^2y\Big\}$ a $a,b,c > 0$,
4. $\mathcal{L}^3(M)$ pro $M = \{a(x^2+y^2)+z \le a,\ z \ge 0\}$ v závislosti na $a \in \mathbf{R}$.
5. $\mathcal{L}^3(M)$ pro $M = \Big\{(x+y+z)^2 < y,\ x > 0,\ y > 0,\ z > 0\Big\}$,
6. $\displaystyle\int_M e^{xyz}x^2y\ dxdydz$ pro $M = \{x \ge 0,\ y \ge 1,\ z \ge 1,\ xyz \le 1\}$ za použití substituce $x = u,\ y = \dfrac{u+v}{u},\ z = \dfrac{u+v+w}{u+v}$.

Návody:

1. π; Sférické souřadnice převedou $x^2+y^2+z^2 \le 2z$ na $0 < r < 2\sin\psi$ a $x^2+y^2 \le z^2$ na $\cos^2\psi < \sin^2\psi$. Odtud $\sin\psi > 0$ a $\cos^2\psi < \sin^2\psi$, tedy $\psi \in (\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2})$.

$$\int_0^{2\pi}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{2\sin\psi} r^2\cos\psi\ dr\ d\psi\ d\varphi.$$

2. π; Válcové souřadnice převedou $x^2+y^2+z^2 \le 2z$ na $r^2+a^2 \le 2a$ a $x^2+y^2 \le z^2$ na $r^2 \le a^2$. Z první nerovnosti $2a-a^2 \ge 0,$ tedy $a \in (0,2)$. Dále $r^2 \le \min\{2a-a^2, a^2\}$ a $2a-a^2 = a^2$ pro $a = 1$.

$$\int_0^{2\pi}\int_0^1\int_0^a r\ dr\ da\ d\psi + \int_0^{2\pi}\int_1^2\int_0^{\sqrt{2a-a^2}} r\ dr\ da\ d\psi\ .$$

3. $\dfrac{\pi a^7b^4c}{192}$; Zobecněné sférické souřadnice $x = ar\cos\varphi\cos\psi,\ y = br\sin\varphi\cos\psi,$ $z = cr\sin\psi$ a $J_f = abcr^2\cos\psi$. Podmínku převedu na $0 \le r^4 \le a^2br^3\cos^2\varphi\cos^3\psi\sin\varphi$.

Odtud $\sin\varphi > 0$. $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\pi}\int_0^{a^2b\cos^2\varphi\cos^3\psi\sin\varphi} abcr^2\cos\psi\ dr\ d\varphi\ d\psi$.

4. ∞ pro $a < 0$ a $\displaystyle\int_0^{2\pi}\int_0^1\int_0^{a(1-r^2)} r\,dz\,dr\,d\varphi = \frac{a\pi}{2}$ pro $a > 0$ přes válcové souřadnice.

5. $\frac{1}{60}$; Zobecněné sférické souřadnice $x = ar\cos^2\varphi\cos^2\psi,\ y = br\sin^2\varphi\cos^2\psi,$

$z = cr\sin^2\psi$ a $J_f = 4r^2\cos\varphi\sin\varphi\cos^3\psi\sin\psi$ pro $\varphi,\psi \in (0, \frac{\pi}{2})$.

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\sin^2\varphi\cos^2\psi} 4r^2\cos\varphi\sin\varphi\cos^3\psi\sin\psi\,dr\,d\psi\,d\psi.$$

6. $\frac{e}{2} - 1$; Jakobián vyjde $J_f = \frac{1}{u(u+v)}$. Z $x \geq 0$ plyne $u \geq 0$,

z $y \geq 1$ plyne $\frac{u+v}{u} \geq 1$, tedy $v \geq 0$, z $z \geq 1$ plyne $w \geq 0$ a z $xyz \geq 1$ plyne $u{+}v{+}w \leq 1$.

$$\int_0^1\int_0^{1-u}\int_0^{1-u-v} e^{u+v+w}u^2\frac{u+v}{u}\frac{1}{u(u+v)}\,du\,dv\,dw\ .$$