

3. DŮKAZOVÉ TECHNIKY

Dokažte následující tvrzení.

1. Pro všechna $a, b \in \mathbb{R}$ platí:

(a) $|a + b| \leq |a| + |b|$, (Trojúhelníková nerovnost)

(b) $||a| - |b|| \leq |a - b|$.

2. Pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí následující vztahy:

(a) $\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$, (b) $\sum_{k=1}^n k^3 = \left(\sum_{k=1}^n k\right)^2$.

3. Pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí $n < 2^n$.

4. Pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 4$ platí $n^2 \leq 2^n$.

5. Pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí $(2n)! < 2^{2n}(n!)^2$.

6. Číslo $\sqrt{2}$ je iracionální. Obecněji: Pro $n \in \mathbb{N}$ je \sqrt{n} buď celé, nebo iracionální.

7. (Binomická věta) Pro každé $n \in \mathbb{N}$, a každá $a, b \in \mathbb{R}$ platí

$$(a + b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k.$$

8. Pro všechna $n \in \mathbb{N}$ platí rovnost $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = 2^n$.

9. Pro libovolné $n \in \mathbb{N}$ sečtete výraz $\binom{2n}{0} + \binom{2n}{2} + \dots + \binom{2n}{2n}$.

10. Necht' $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}$. Potom platí $\left| \sum_{i=1}^n x_i \right| \leq \sum_{i=1}^n |x_i|$.

11. (Bernoulliho nerovnost) Necht' $x \in \mathbb{R}$, $x \geq -1$ a $n \in \mathbb{N}$. Potom

$$(1 + x)^n \geq 1 + nx.$$

12. (AG nerovnost) Necht' $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$, $a_1, \dots, a_n \geq 0$. Potom platí

$$\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n}.$$

VÝSLEDKY

9. 2^{2n-1}