

6. LIMITA POSLOUPNOSTI – POKRAČOVÁNÍ

Spočtěte následující limity.

1. $\lim_{n \rightarrow \infty} x^n$, kde $|x| < 1$.

5. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^k}{a^n}$ pro $k \in \mathbb{N}$, $a > 1$.

2. $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$, kde $a_1 = 10$

a $a_{n+1} = 6 - \frac{5}{a_n}$, $n \in \mathbb{N}$.

6. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n [kx]$, kde $x \in \mathbb{R}$.

(Symbol $[\cdot]$ značí celou část čísla.)

3. $\lim_{n \rightarrow \infty} \underbrace{\sqrt{2 + \sqrt{2 + \cdots + \sqrt{2 + \sqrt{2}}}}}_{n\text{-krát}}$

7. $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)}$

4. $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n!}$

8. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{2^2}\right) \left(1 - \frac{1}{3^2}\right) \cdots \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)$

9. Pro posloupnost $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ určete $\limsup_{n \rightarrow \infty} a_n$, $\liminf_{n \rightarrow \infty} a_n$.

(a) $a_n = (-1)^n$

(b) $a_n = \frac{(-1)^n}{n} + \frac{1 + (-1)^n}{2}$

(c) $a_n = n^{(-1)^n}$

(d) $a_n = \sqrt[n]{1 + 2^{n(-1)^n}}$

10. Nalezněte množinu hromadných bodů posloupnosti $(a_n)_{n=1}^{\infty}$.

(a) $a_n = \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)$

(b) $a_n = 1 + \frac{n}{n+1} \cos \frac{n\pi}{2}$

(c) $a_n = 1 + 2(-1)^{n+1} + 3(-1)^{\frac{n(n+1)}{2}}$

VÝSLEDKY

1. 0

2. 5

3. 2

4. ∞

5. 0

6. $\frac{x}{2}$

7. 1

8. $\frac{1}{2}$

9. (a) $\limsup_{n \rightarrow \infty} a_n = 1, \liminf_{n \rightarrow \infty} a_n = -1$

(b) $\limsup_{n \rightarrow \infty} a_n = 1, \liminf_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$

(c) $\limsup_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty, \liminf_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$

(d) $\limsup_{n \rightarrow \infty} a_n = 2, \liminf_{n \rightarrow \infty} a_n = 1$

10. (a) $\{-1, 0, 1\}$

(b) $\{0, 1, 2\}$

(c) $\{-4, 0, 2, 6\}$