7. ŘADY

1. (Geometrická řada) Pro $x \in \mathbb{R}$, $|x| < 1$ nalezněte součet řady $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} x^n$.

Vyšetřete konvergenci následujících řad s nezápornými členy.

2. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+3n+4}{n^2+5}$

3. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n^4+1}$

4. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n^3+1}$

5. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n^2+6n+7}{3n^4+4n+8}$

6. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+7n}{n^3+2n^2+1}$

7. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sqrt[3]{n^2+5} - \sqrt[3]{n^2+1}\right)$

8. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sqrt{n^2+3} - \sqrt[3]{n^3+n}\right)$

9. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1}}{n}$

10. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+\sqrt[3]{n^2}}{1+\sqrt{n^3}}$

11. $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\log n)^{\alpha}}$, kde $\alpha > 0$

12. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{c^n}{n!}$, kde $c > 0$

13. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2^n}$

14. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1+\cos n}{2+\cos n}\right)^n$

15. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{2^{n^2}}$

16. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\cdot 5\cdot 8\cdots(3n-1)}{1\cdot 5\cdot 9\cdots(4n-3)}$

17. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{c^n}{3^n\sqrt{n}}$, kde $c \geq 0$

18. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n+(-1)^n\cdot n}{3^n+(-1)^n\cdot n}$

19. $\displaystyle\sum_{n=3}^{\infty} \frac{3}{2^n-2n}$

20. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{c^n}{n^2}$, kde $c \geq 0$

Vzorová zkoušková úloha:

21. Vyšetřete konvergenci řady $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{arctg}(n)\sin\left(\frac{1}{n^2+1}\right) n^{\alpha}$

(a) pro $\alpha = 1$, (b) pro libovolné $\alpha \in \mathbb{R}$.

VÝSLEDKY

„K“ znamená, že řada konverguje,
„D“ znamená, že řada diverguje.

1. $\dfrac{1}{1-x}$

2. D

3. K

4. D

5. K

6. D

7. K

8. D

9. K

10. D

11. K pro $\alpha > 1$, jinak D.

12. K

13. K

14. K

15. K

16. K

17. K pro $c < 3$, jinak D.

18. K

19. K

20. K pro $c \leq 1$, jinak D.