

8. ŘADY – NEABSOLUTNÍ KONVERGENCE

Vyšetřete konvergenci a absolutní konvergenci následujících řad.

$$1. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$$

$$5. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^n}{n} \text{ pro } x \in \mathbb{R}$$

$$2. \sum_{n=3}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\log(\log n)}$$

$$6. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3n - 100\sqrt{n}}$$

$$3. \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \text{ pro } x \in \mathbb{R}$$

$$7. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^\alpha} \text{ pro } \alpha \in \mathbb{R}$$

$$4. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \left(\sqrt[n]{3} - 1 \right)$$

$$8. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^{\alpha + \frac{1}{n}}} \text{ pro } \alpha \in \mathbb{R}$$

9. Ukažte, že následující řady mají pro $x \in \mathbb{R}$ omezené částečné součty:

$$(a) \sum_{k=1}^{\infty} \sin(kx),$$

$$(b) \sum_{k=1}^{\infty} \cos(kx).$$

Vyšetřete konvergenci následujících řad a kromě příkladů 11, 15 i absolutní konvergenci.

$$10. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{n}$$

$$14. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\sin^2 n}{n}$$

$$11. \sum_{n=3}^{\infty} \frac{\sin \frac{\pi n}{3}}{\log(\log n)}$$

$$15. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{n + 10 \sin n}$$

$$12. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n}{3n - 100\sqrt{n}}$$

$$16. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n}{n^2 + 1} \cos \frac{1}{n}$$

$$13. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{\sqrt{n}} \arctg n$$

$$17. \sum_{n=1}^{\infty} \binom{2n}{n} x^n \text{ pro } x \in \mathbb{R}$$

VÝSLEDKY

„AK“ znamená, že řada absolutně konverguje,

„NAK“ znamená, že řada konverguje, ale ne absolutně („neabsolutně konverguje“),

„K“ znamená, že řada konverguje (a o absolutní konvergenci zde nic neříkáme),

„D“ znamená, že řada diverguje.

1. NAK

2. NAK

3. AK pro všechna $x \in \mathbb{R}$. Poznámka: Platí $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x$, $x \in \mathbb{R}$.

4. NAK

5. AK pro $x \in (-1, 1)$, K pro $x = 1$, jinak D.

Poznámka: Platí $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^n}{n} = \log(1+x)$, $x \in (-1, 1]$.

6. NAK

7. AK pro $\alpha > 1$, NAK pro $\alpha \in (0, 1]$, D pro $\alpha \leq 0$.

8. AK pro $\alpha > 1$, NAK pro $\alpha \in (0, 1]$, D pro $\alpha \leq 0$.

9. (a) $\sum_{k=1}^n \sin(kx) \leq \frac{1}{\left| \sin \frac{x}{2} \right|}$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$.

10. NAK

11. K

12. NAK

13. NAK

14. NAK

15. K

16. NAK

17. AK pro $x \in \left(-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right)$, NAK pro $x = -\frac{1}{4}$, D pro $x \notin \left[-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right)$