MATEMATICKÁ ANALÝZA 1 – DRUHÁ ZÁPOČTOVÁ PÍSEMKA

Na písemku máte 90 minut.

Svůj postup stručně zdůvodněte (stačí napsat název použité věty).

Boduje se i postup, tj. vyplatí se odevzdat i jen částečně vyřešenou úlohu.

1. (10 bodů) Spočtěte limitu funkce

$$\lim_{x\to\pi} \frac{e^{(x-\pi)\sin x} + \cos x}{\sin^2 x}.$$

2. (10 bodů) Spočtěte limitu funkce

$$\lim_{x\to\infty} \left(\frac{x+1}{x+3}\right)^{\sqrt{x^2+1}}.$$

3. (10 bodů) Vyšetřete konvergenci a absolutní konvergenci řady

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sin\frac{1}{\sqrt{n}} \cdot \cos(3n).$$

ŘEŠENÍ

1. Použijeme „substituci $y = x - \pi$“ (přesněji řečeno, větu o limitě složené funkce s vnitřní funkcí $x - \pi$, která splňuje podmínku (P)). Dále využijeme rovností $\sin(y+\pi) = -\sin y$, $\cos(y+\pi) = -\cos y$ a upravíme.

$$\lim_{x\to\pi} \frac{e^{(x-\pi)\sin x} + \cos x}{\sin^2 x} = \lim_{y\to 0} \frac{e^{y\sin(y+\pi)} + \cos(y+\pi)}{\sin^2(y+\pi)} =$$
$$= \lim_{y\to 0} \frac{e^{-y\sin y} - \cos y}{\sin^2 y} = \lim_{y\to 0} -\frac{e^{-y\sin y} - 1}{-y\sin y} \cdot \frac{1}{\frac{\sin y}{y}} + \frac{1-\cos y}{y^2} \cdot \frac{1}{\left(\frac{\sin y}{y}\right)^2}$$

Nyní využijeme větu o limitě složené funkce s vnitřní funkcí $-y\sin y$ (která má v 0 limitu 0 a je nenulová na prstencovém okolí 0) a dostaneme $\lim\limits_{y\to 0} \dfrac{e^{-y\sin y} - 1}{-y\sin y} = \lim\limits_{z\to 0} \dfrac{e^z - 1}{z}$. Použitím známých limit a věty o aritmetice limit dostaneme výsledek $-1 \cdot 1 + \frac{1}{2} \cdot 1^2 = -\frac{1}{2}$

Altrenativní řešení. Použijeme dvakrát l'Hospitalovo pravidlo „$\frac{0}{0}$“, takto obdržená funkce je spojitá v π, a limita je její funkční hodnota.

$$\lim_{x\to\pi} \frac{e^{(x-\pi)\sin x} + \cos x}{\sin^2 x} = \lim_{x\to\pi} \frac{e^{(x-\pi)\sin x}(\sin x + (x-\pi)\cos x) - \sin x}{2\sin x\cos x} =$$
$$= \lim_{x\to\pi} \frac{e^{(x-\pi)\sin x}(\sin x + (x-\pi)\cos x)^2 + e^{(x-\pi)\sin x}(\cos x + \cos x - (x-\pi)\sin x) - \cos x}{2\cos^2 x - 2\sin^2 x}$$
$$= -\frac{1}{2}$$

2. Z definice obecné mocniny je $\left(\dfrac{x+1}{x+3}\right)^{\sqrt{x^2+1}} = e^{\sqrt{x^2+1}\log\frac{x+1}{x+3}}$, počítejme tedy nejprve limitu

$$\lim_{x\to\infty} \sqrt{x^2+1}\log\tfrac{x+1}{x+3} = \lim_{x\to\infty} \sqrt{x^2+1}\frac{\log\frac{x+1}{x+3}}{\frac{x+1}{x+3} - 1}\left(\frac{x+1}{x+3} - 1\right)$$

Z věty o limitě složené funkce (vnitřní funkce má v ∞ limitu 0 a je nenulová pro x kladná) a známe limity s logaritmem máme

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\log\frac{x+1}{x+3}}{\frac{x+1}{x+3} - 1} = \lim_{y\to 0} \frac{\log(y+1)}{y} = 1.$$

Dále dostaneme

$$\lim_{x\to\infty} \sqrt{x^2+1}\left(\frac{x+1}{x+3}-1\right) = \lim_{x\to\infty} \frac{-2\sqrt{x^2+1}}{x+3} = \lim_{x\to\infty} \frac{-2\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}{1+\frac{3}{x}} = -2.$$

Tedy $\lim\limits_{x\to\infty} \sqrt{x^2+1}\log\frac{x+1}{x+3} = -2$.
Použitím limity složené funkce a spojitosti exponenciely tak dostaneme

$$\lim_{x\to\infty} \left(\frac{x+1}{x+3}\right)^{\sqrt{x^2+1}} = e^{-2}.$$

3. Označme $a_n := \cos(3n)$, $b_n := \sin\frac{1}{\sqrt{n}}$. Platí:

- $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ je klesající a $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$,
- $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ má omezené částečné součty (známý fakt).

Tedy z Dirichletova kritéria řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sin\dfrac{1}{\sqrt{n}}\cos(3n)$ konverguje.
Absolutní konvergence:
Členy b_n jsou kladné. Použitím limitního srovnávacího kritéria na b_n a $\frac{1}{\sqrt{n}}$ dostaneme $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{b_n}{\frac{1}{\sqrt{n}}} = 1$ (využili jsme známé limity se sinem, faktu $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$ a Heineho věty), tedy $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ diverguje.
Odhadneme (jelikož $|a_n| \le 1$): $|a_n| \ge a_n^2 = \cos^2(3n) = \dfrac{1}{2} + \dfrac{\cos(6n)}{2}$.
Dále $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n \dfrac{\cos(6n)}{2}$ konverguje (podobně jako výše). Kdyby řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n| b_n$ konvergovala, pak by ze srovnávacího kritéria konvergovala i řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^2 b_n$, a protože $\frac{1}{2} = -\frac{\cos(6n)}{2} + a_n^2$, konvergovala by i řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2} b_n$, což není pravda. Proto $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n| b_n$ diverguje, neboli zadaná řada nekonverguje absolutně.