1. OPAKOVÁNÍ STŘEDOŠKOLSKÉ LÁTKY

1. Řešte následující rovnice a nerovnice v $\mathbb{R}$:

(a) $\dfrac{x-2}{2x-8} \geq 1$,

(b) $\log_{\frac{1}{3}}(x^2 - 3x + 3) \geq 0$,

(c) $\dfrac{x+2}{x+3} > \dfrac{2x+3}{x+6}$,

(d) $\log(x^2+1) = 2\log(3-x)$,

(e) $\sin 2x = \sin x$,

(f) $x \leq \left|\dfrac{x+2}{x-3}\right|$.

2. Načrtněte grafy následujících funkcí:

(a) $f(x) = 1 - \left|\cos \frac{x}{2}\right|$,

(b) $g(x) = \Big|\big|\big||x|-1\big|-1\big|-1\Big|$.

3. V závislosti na $c \in \mathbb{R}$ nalezněte všechna $x \in \mathbb{R}$ splňující:

(a) $ce^x \in (-1, 0]$,

(b) $cx^2 + x + 1 > 0$.

4. Dokažte, že pro všechna $a, b \in \mathbb{R}$ platí:

(a) $|a+b| \leq |a| + |b|$, (Trojúhelníková nerovnost)

(b) $\big||a| - |b|\big| \leq |a-b|$.

5. Dokažte, že pro všechna $n \in \mathbb{N}$ a $q \in \mathbb{R}$, $q \neq 1$ platí

(a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k = 1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$,

(b) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} q^k = 1 + q + q^2 + \cdots + q^n = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$.

6. Pro každé $n \in \mathbb{N}$ sečtěte výraz $\sin x + \sin 2x + \cdots + \sin nx$.

VÝSLEDKY

1. (a) $(4,6]$

(b) $[1,2]$

(c) $(-6;-3)\cup\left(\frac{-1-\sqrt{13}}{2},\frac{-1+\sqrt{13}}{2}\right)$

(d) $\frac{4}{3}$

(e) $k\pi, \frac{\pi}{3}+2k\pi, \frac{5\pi}{3}+2k\pi$ pro $k\in\mathbb{Z}$

(f) $(-\infty,3)\cup(3,2+\sqrt{6}]$

3. (a)

$$\begin{array}{ll} c>0: & \text{žádné řešení} \\ c=0: & x\in\mathbb{R} \\ c<0: & x<\log(-1/c) \end{array}$$

(b)

$$\begin{array}{ll} c>1/4: & x\in\mathbb{R} \\ c\in(0,1/4]: & x\in\left(-\infty,\frac{-1-\sqrt{1-4c}}{2c}\right)\cup\left(\frac{-1+\sqrt{1-4c}}{2c},\infty\right) \\ c=0: & x>-1 \\ c<0: & x\in\left(\frac{-1+\sqrt{1-4c}}{2c},\frac{-1-\sqrt{1-4c}}{2c}\right) \end{array}$$

6. Pro $x=2k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$ je součet 0, jinak je roven $\dfrac{\cos\frac{x}{2}-\cos(n+\frac{1}{2})x}{2\sin\frac{x}{2}}$.