3. DŮKAZOVÉ TECHNIKY

Dokažte následující tvrzení.

1. Pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí $n < 2^n$.

2. Pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 4$ platí $n^2 \leq 2^n$.

3. Pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí $(2n)! < 2^{2n}(n!)^2$.

4. Pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí následující vztahy:

(a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$, (b) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left(\sum_{k=1}^{n} k\right)^2$.

5. Číslo $\sqrt{2}$ je iracionální. Obecněji: Pro $n \in \mathbb{N}$ je $\sqrt{n}$ buď celé, nebo iracionální.

6. Existují iracionální čísla $a, b \in \mathbb{R}$ taková, že a^b je racionální.

7. (Binomická věta) Pro každé $n \in \mathbb{N}$, a každá $a, b \in \mathbb{R}$ platí

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k.$$

8. Pro všechna $n \in \mathbb{N}$ platí rovnost $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$.

9. Pro každé $n \in \mathbb{N}$ sečtěte výraz $\displaystyle\binom{2n}{0} + \binom{2n}{2} + \cdots + \binom{2n}{2n}$.

10. Nechť $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$. Potom platí $\displaystyle\left|\sum_{i=1}^{n} x_i\right| \leq \sum_{i=1}^{n} |x_i|$.

11. (Bernoulliova nerovnost) Nechť $x \in \mathbb{R}$, $x \geq -1$ a $n \in \mathbb{N}$. Potom

$$(1+x)^n \geq 1 + nx.$$

12. (AG nerovnost) Nechť $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$, $a_1, \ldots, a_n \geq 0$. Potom platí

$$\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n}.$$

VÝSLEDKY

9. 2^{2n-1}