4. MNOŽINY, ZOBRAZENÍ, MOHUTNOST

1. Nechť $f(x) = \dfrac{2\sqrt{x}}{4-\sqrt{x}}$. Určete[1] definiční obor D_f, obor hodnot H_f a inverzní funkci f^{-1}.

2. Mějme zobrazení $f\colon X \to Y$. Dokažte, že platí

(a) $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$ pro každé $A, B \subset X$,

(b) $f^{-1}(A \cup B) = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$ pro každé $A, B \subset Y$,

(c) $f^{-1}(A \cap B) = f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$ pro každé $A, B \subset Y$,

(d) $f^{-1}(A \setminus B) = f^{-1}(A) \setminus f^{-1}(B)$ pro každé $A, B \subset Y$.

3. Mějme zobrazení $f\colon X \to Y$ a množiny $A, B \subset X$. Ukažte, že obecně neplatí

(a) $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$,

(b) $f(A \setminus B) = f(A) \setminus f(B)$.

4. Charakterizujte zobrazení $f\colon X \to Y$, pro která platí:

(a) $\forall A \subset X : f^{-1}(f(A)) = A$,

(b) $\forall B \subset Y : f(f^{-1}(B)) = B$.

5. Nechť $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$. Rozhodněte o platnosti následujících tvrzení.

(a) Je-li $f(\mathbb{N})$ konečná, není f prosté.

(b) Je-li $f(\mathbb{N})$ nekonečná, je f prosté.

(c) Je-li $f(\mathbb{N}) = \mathbb{N}$, je f prosté.

(d) Je-li f prosté, je $f(\mathbb{N}) = \mathbb{N}$.

6. Rozhodněte, zda jsou následující množiny spočetné (a své tvrzení dokažte):

(a) $\mathbb{Z}$

(b) $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$

(c) $\mathbb{Q}$

(d) $\mathbb{R}$

(e) $\big\{f\colon \mathbb{N} \to \{0,1\}\big\}$

(f) $\{$otevřené intervaly v $\mathbb{R}\}$

(g) $\{M \subset \mathbb{N} : M$ je konečná$\}$

(h) $\{M \subset \mathbb{N} : M$ je nekonečná$\}$

[1] Zde předpokládáme, že funkce f je definována pro všechna $x \in \mathbb{R}$, pro která má výraz vpravo smysl.

1. $D_f = [0, \infty) \setminus \{16\}$, $H_f = (-\infty, -2) \cup [0, \infty)$, $f^{-1}(y) = \left(\dfrac{4y}{y+2}\right)^2$

4. (a) Prostá zobrazení.

(b) Zobrazení na.

5. (a) plati

(b) neplatí

(c) neplatí

(d) neplatí

6. (a) ano

(b) ano

(c) ano

(d) ne

(e) ne

(f) ne

(g) ano

(h) ne