5. SUPREMUM A INFIMUM MNOŽINY

1. Nechť množina $M \subset \mathbb{R}$ má maximum. Potom má i supremum, které je rovno jejímu maximu.
Podobně, pokud M má minimum, potom má i infimum, které je rovno jejímu minimu.

2. Každá konečná množina reálných čísel má maximum i minimum.

3. Nalezněte suprema a infima následujících množin:

(a) $A = \left\{ \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N} \right\}$

(b) $B = \left\{ \frac{1}{\sqrt{n}} : n \in \mathbb{N} \right\}$

(c) $C = [0, 1)$

(d) $D = \left\{ 2^{-n} + 3^{-n} : n \in \mathbb{N} \right\}$

(e) $E = \left\{ \frac{p}{p+q} : p, q \in \mathbb{N} \right\}$

(f) $F = \{ n^2 - m^2 : m, n \in \mathbb{N} \}$

(g) $G = \{ 5^{(-1)^j} 3^k : j, k \in \mathbb{Z} \}$

4. Mějme dvě množiny $A, B \subset \mathbb{R}$, které jsou omezené (shora i zdola). Co lze obecně říci o supremu a infimu následujících množin?

(a) $A \cup B$

(b) $A \cap B$

(c) $A + B = \{ a + b : a \in A, b \in B \}$

(d) $A \setminus B$

VÝSLEDKY

3. (a) $\sup A = 1$, $\inf A = 0$

(b) $\sup B = 1$, $\inf B = 0$

(c) $\sup C = 1$, $\inf C = 0$

(d) $\sup D = \frac{5}{6}$, $\inf D = 0$

(e) $\sup E = 1$, $\inf E = 0$

(f) F je shora i zdola neomezená (tzn. $\sup F = \infty$, $\inf F = -\infty$)

(g) G je shora neomezená (tzn. $\sup G = \infty$), $\inf G = 0$

4. (a) $\sup(A \cup B) = \max\{\sup A, \sup B\}$, $\inf(A \cup B) = \min\{\inf A, \inf B\}$,

(b) Pokud $A \cap B \neq \emptyset$, pak

$$\sup(A \cap B) \leq \max\{\sup A, \sup B\}, \qquad \inf(A \cap B) \geq \min\{\inf A, \inf B\}$$

(c) $\sup(A + B) = \sup A + \sup B$, $\inf(A + B) = \inf A + \inf B$

(d) Pokud $A \setminus B \neq \emptyset$, pak

$$\sup(A \setminus B) \leq \sup A, \qquad \inf(A \setminus B) \geq \inf A.$$