

7. LIMITA POSLOUPNOSTI – POKRAČOVÁNÍ

1. Spočtěte $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{((n+2)^2 - (n+1)^2)^{n+1}}{((n+1)^3 - n^3 - 3n^2)^{n-1}}}$.

2. Spočtěte $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[n]{a^n + b^n}}{\sqrt[n]{a^{2n} + b^{2n}}}$, kde $a > b > 0$.

Spočtěte následující limity.

3. $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n!}$

8. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^k}{a^n}$ pro $k \in \mathbb{N}$, $a > 1$.

4. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{n^n}$

9. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n [kx]$, kde $x \in \mathbb{R}$.

5. $\lim_{n \rightarrow \infty} x^n$, kde $|x| < 1$.

(Symbol $[\cdot]$ značí celou část čísla.)

6. $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$, kde $a_1 = 10$

a $a_{n+1} = 6 - \frac{5}{a_n}$, $n \in \mathbb{N}$.

10. $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)}$

7. $\lim_{n \rightarrow \infty} \underbrace{\sqrt{2 + \sqrt{2 + \dots + \sqrt{2 + \sqrt{2}}}}}_{n\text{-krát}}$

11. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{2^2}\right) \left(1 - \frac{1}{3^2}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)$

12. Pro posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ určete limes superior a limes inferior.

(a) $a_n = (-1)^n$

(c) $a_n = n^{(-1)^n}$

(b) $a_n = \frac{(-1)^n}{n} + \frac{1 + (-1)^n}{2}$

(d) $a_n = \sqrt[n]{1 + 2^{n(-1)^n}}$

13. Nalezněte množinu hromadných hodnot posloupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$.

(a) $a_n = \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)$

(b) $a_n = 1 + \frac{n}{n+1} \cos \frac{n\pi}{2}$

(c) $a_n = 1 + 2(-1)^{n+1} + 3(-1)^{\frac{n(n+1)}{2}}$

14. Najděte posloupnost reálných čísel, jejíž množina hromadných hodnot je interval $[0, 1]$.

15. Neexistuje posloupnost reálných čísel, jejíž množina hromadných hodnot je interval $(0, 1)$.

VÝSLEDKY

1. $\frac{2}{3}$
2. $\frac{1}{a}$
3. ∞
4. 0
5. 0
6. 5
7. 2
8. 0
9. $\frac{x}{2}$
10. 1
11. $\frac{1}{2}$
12. (a) $\limsup_{n \rightarrow \infty} a_n = 1, \liminf_{n \rightarrow \infty} a_n = -1$
(b) $\limsup_{n \rightarrow \infty} a_n = 1, \liminf_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$
(c) $\limsup_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty, \liminf_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$
(d) $\limsup_{n \rightarrow \infty} a_n = 2, \liminf_{n \rightarrow \infty} a_n = 1$
13. (a) $\{-1, 0, 1\}$
(b) $\{0, 1, 2\}$
(c) $\{-4, 0, 2, 6\}$
14. $\frac{\sqrt{3}}{3}$
15. $\frac{1}{2}$
16. Limita neexistuje.