13. MOCNINNÉ ŘADY

Určete poloměr konvergence mocninné řady.

1. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^3}$

2. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2 x^n}{(2n)!}$

3. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n!}}{n!}$

4. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} x^n,\ p \in \mathbb{R}$

5. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n + (-2)^n}{n} (x+1)^n$

6. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2} x^n$

7. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a^{\sqrt{n}}} x^n,\ a > 0$

8. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3 + (-1)^n)^n}{n} x^n$

9. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{a^n + b^n},\ a, b > 0$

10. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(na^n + \frac{b^n}{n^2}\right) x^n,\ 0 < a < b$

11. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} x^{n^2}$

12. Rozviňte funkci $\frac{1}{2-x}$ do mocninné řady se středem (a) 0, (b) 1.

Rozviňte následující funkce do mocninné řady se středem 0.

13. e^{-x^2}

14. $\dfrac{x^2+1}{x^2-1}$

15. $\dfrac{1}{(1+x^2)^2}$

16. $\sin^2 x$

17. $\operatorname{arctg} x$

18. Mějme funkci $f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & \text{pro } x \neq 0, \\ 0 & \text{pro } x = 0. \end{cases}$

Sestavte Taylorovu řadu funkce f se středem 0. Pro která x Taylorova řada konverguje, a pro která x je její součet roven $f(x)$?

Sečtěte řady.

19. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^{n-1}}$

20. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+3}$

21. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (n^2 + 2n) \frac{1}{3^n}$

22. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2 - 1}$

VÝSLEDKY

1. 1

2. 4

3. 1

4. 1

5. $\frac{1}{3}$

6. $\frac{1}{e}$

7. 1

8. $\frac{1}{4}$

9. $\max\{a, b\}$

10. $\frac{1}{b}$

11. 1

12. (a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{2^{n+1}}$, $x \in (-2, 2)$

(b) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (x-1)^n$, $x \in (0, 2)$

13. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{n!}$, $x \in \mathbb{R}$

14. $\displaystyle -1 - \sum_{n=0}^{\infty} 2x^{2n}$, $x \in (-1, 1)$

15. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (n+1) x^{2n}$, $x \in (-1, 1)$

16. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{2^{2n-1}}{(2n)!} x^{2n}$, $x \in \mathbb{R}$

17. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1}$, $x \in [-1, 1]$

18. Je $f(0) = 0$, $f^{(n)}(0) = 0$ pro $n \in \mathbb{N}$, Taylorova řada f se středem v 0 je tedy 0. Konverguje tedy pro každé $x \in \mathbb{R}$ a její součet je roven $f(x)$ pouze pro $x = 0$.

19. 4

20. $1 - \frac{\pi}{4}$

21. 3

22. $\frac{1}{2}$