16. URČITÝ INTEGRÁL

Spočtěte následující integrály.

1. $\displaystyle\int_0^{\pi} \sin^4 x \,\mathrm{d}x$

2. $\displaystyle\int_0^{2} |1-x| \,\mathrm{d}x$

3. $\displaystyle\int_0^{2\pi} x^2 \cos x \,\mathrm{d}x$

4. $\displaystyle\int_0^{\sqrt{3}} x \operatorname{arctg} x \,\mathrm{d}x$

5. $\displaystyle\int_{1/e}^{e} |\log x| \,\mathrm{d}x$

6. $\displaystyle\int_0^{100\pi} \sqrt{1-\cos 2x} \,\mathrm{d}x$

7. $\displaystyle\int_0^{\infty} x^n e^{-x} \,\mathrm{d}x$, kde $n \in \mathbb{N}$

8. $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{1}{1+\alpha\cos x} \,\mathrm{d}x$, kde $\alpha \in [0,1)$

9. $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin x}{x^4+\cos x} \,\mathrm{d}x$

10. $\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{1}{1+\cos^2 x} \,\mathrm{d}x$

11. Spočtěte $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^4(1-x)^4}{1+x^2} \,\mathrm{d}x$, jako důsledek dokažte nerovnost $\pi < \frac{22}{7}$. Bonus: drobnou úpravou funkce v integrálu ukažte, že dokonce platí $\frac{22}{7} - \frac{1}{630} < \pi < \frac{22}{7} - \frac{1}{1260}$.

12. Spočtěte limitu $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{1^p + 2^p + \cdots + n^p}{n^{p+1}}$ pro $p > 1$ s využitím Riemannova integrálu.

VÝSLEDKY

1. $\frac{3\pi}{8}$

2. 1

3. 4π

4. $\frac{2\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2}$

5. $2 - \frac{2}{e}$

6. $200\sqrt{2}$

7. $n!$

8. $\dfrac{2\pi}{\sqrt{1-\alpha^2}}$

9. 0

10. $\frac{\pi}{\sqrt{2}}$

11. $\frac{22}{7} - \pi$.
Integrovaná funkce je spojitá a kladná na $(0,1)$, proto je integrál kladný.

12. Limita je rovna $\displaystyle\int_0^1 x^p \,\mathrm{d}x = \frac{1}{p+1}$.