MATEMATICKÁ ANALÝZA 2 – PRVNÍ ZÁPOČTOVÁ PÍSEMKA

Na písemku máte 60 minut.

Svůj postup stručně zdůvodněte (stačí napsat název použité věty).

Boduje se i postup, tj. vyplatí se odevzdat i jen částečně vyřešenou úlohu.

1. (10 bodů)

(a) Pro funkci $f(x) = e^{\sin(x^2)}$ spočtěte Taylorův polynom $T_4^{f,0}$.

(b) Pomocí (a) určete $n \in \mathbb{N}$ tak, aby následující limita vyšla konečná nenulová a tuto limitu spočtěte:

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^{\sin(x^2)} - \cos x - \frac{3}{2}x^2}{x^n}$$

2. (10 bodů) Vyšetřete konvergenci mocninné řady, tzn. určete střed, poloměr konvergence, a rozhodněte o konvergenci v krajních bodech intervalu konvergence:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1 + (-1)^n)^n}{\operatorname{arctg} n} (x - 1)^n$$

ŘEŠENÍ

1. (a) Je známo, že

$$e^y = 1 + y + \tfrac{1}{2}y^2 + o(y^2), y \to 0; \qquad \sin y = y + o(y^2), y \to 0.$$

Pomocí tvrzení o „o“ a složené funkci dostaneme $\sin x^2 = x^2 + o(x^4), x \to 0$ a dále také

$$\begin{aligned} e^{\sin(x^2)} &= 1 + \sin(x^2) + \tfrac{1}{2}\sin^2(x^2) + o(\sin^2(x^2)) = \\ &= 1 + x^2 + o(x^4) + \tfrac{1}{2}(x^2 + o(x^4))^2 + o(x^2 + o(x^4)) = \\ &= 1 + x^2 + \tfrac{1}{2}x^4 + o(x^4), x \to 0. \end{aligned}$$

Z věty o nejlepší aproximaci Taylorovým polynomem proto dostáváme $T_4^{f,0}(x) = 1 + x^2 + \frac{1}{2}x^4$.

(b) Jelikož $\cos x = 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 + o(x^4), x \to 0$, máme

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{\sin(x^2)} - \cos x - \frac{3}{2}x^2}{x^n} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{11}{24}x^4 + o(x^4)}{x^n} = \lim_{x\to 0} \left(\frac{11}{24}x^{4-n} + \frac{o(x^4)}{x^n} \right),$$

limita tedy vyjde konečná nenulová právě když $n = 4$ a v tomto případě je limita rovna $\frac{11}{24}$.

2. Střed mocninné řady je $x_0 = 1$.

Označme $a_n = \dfrac{(1 + (-1)^n)^n}{\operatorname{arctg} n}$. Potom $\sqrt[n]{|a_n|} = \sqrt[n]{a_n} = \dfrac{1 + (-1)^n}{\sqrt[n]{\operatorname{arctg} n}}$.

Použitím odhadu $(-1)^n \leq 1$ dostaneme (jelikož[1] $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\operatorname{arctg} n} = 1$):

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} \leq \lim_{n\to\infty} \frac{2}{\sqrt[n]{\operatorname{arctg} n}} = 2.$$

Naopak, jelikož limes superior lze zdola odhadnout limitou libovolné vybrané posloupnosti, máme

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} \geq \lim_{n\to\infty} \sqrt[2n]{a_{2n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1 + (-1)^{2n}}{\sqrt[2n]{\operatorname{arctg} 2n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{2}{\sqrt[2n]{\operatorname{arctg} 2n}} = 2.$$

---

[1] Pro $n \in \mathbb{N}$ je $\sqrt[n]{\frac{\pi}{4}} \leq \sqrt[n]{\operatorname{arctg} n} \leq \sqrt[n]{\frac{\pi}{2}}$ a $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{\pi}{4}} = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{\pi}{2}} = 1$, věta o dvou strážnících dává $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\operatorname{arctg} n} = 1$.

Tedy $\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = 2$ a poloměr konvergence řady je $R = \frac{1}{2}$. Řada absolutně konverguje pro $x \in (\frac{1}{2}, \frac{3}{2})$ a diverguje pro $x \notin [\frac{1}{2}, \frac{3}{2}]$.
Zbývá vyšetřit konvergenci pro $x = \frac{1}{2}$, $x = \frac{3}{2}$. V obou případech je limita podposloupnosti sudých členů řady rovna

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\operatorname{arctg} n} = \frac{2}{\pi}.$$

Proto není splněna nutná podmínka konvergence a řada v obou případech diverguje.