MATEMATICKÁ ANALÝZA 2 – DRUHÁ ZÁPOČTOVÁ PÍSEMKA

Na písemku máte 90 minut.

Svůj postup stručně zdůvodněte (stačí napsat název použité věty).

Boduje se i postup, tzn. vyplatí se odevzdat i jen částečně vyřešenou úlohu.

1. (10 bodů)
Nalezněte primitivní funkci (na maximálních intervalech, kde existuje)

$$\int \frac{\cos x + 2}{\sin x \cos x} \, \mathrm{d}x.$$

2. (10 bodů)
Spočtěte určitý integrál

$$\int_0^\pi e^{\frac{x}{2}} \sin(3x) \, \mathrm{d}x.$$

3. (10 bodů)
V závislosti na $\alpha \in \mathbb{R}$ vyšetřete konvergenci Newtonova integrálu

$$\int_0^\pi \frac{x^\alpha \sin x}{(\pi - x)^\alpha} \, \mathrm{d}x.$$

ŘEŠENÍ

1. Upravíme $\displaystyle\int \frac{\cos x + 2}{\sin x \cos x}\,\mathrm{d}x = \int \frac{\cos x + 2}{(1-\cos^2 x)\cos x}\sin x\,\mathrm{d}x$, použitím substituce $y = \cos x$ převedeme úlohu na integraci racionální funkce

$$\int -\frac{y+2}{(1-y^2)y}\,\mathrm{d}y = \int \frac{y+2}{y(y-1)(y+1)}\,\mathrm{d}y.$$

Rozklad na parciální zlomky:

$$\frac{y+2}{y(y-1)(y+1)} = \frac{A}{y} + \frac{B}{y-1} + \frac{C}{y+1}$$
$$y+2 = A(y-1)(y+1) + By(y+1) + Cy(y-1).$$

Postupným dosazením hodnot 0, 1, -1 dostaneme $A = -2$, $B = \frac{3}{2}$, $C = \frac{1}{2}$. Primitivní funkce je tedy

$$\int \frac{-2}{y} + \frac{\frac{3}{2}}{y-1} + \frac{\frac{1}{2}}{y+1}\,\mathrm{d}y \overset{C}{=} -2\log|y| + \tfrac{3}{2}\log|y-1| + \tfrac{1}{2}\log|y+1|$$

na $(-\infty,-1)$, $(-1,0)$, $(0,1)$, $(1,\infty)$. Použitím první věty o substituci je tedy hledaná primitivní funkce

$$\int \frac{\cos x + 2}{\sin x \cos x}\,\mathrm{d}x \overset{C}{=} -2\log|\cos x| + \tfrac{3}{2}\log|\cos x - 1| + \tfrac{1}{2}\log|\cos x + 1|$$

na intervalech $\left(k\frac{\pi}{2}, (k+1)\frac{\pi}{2}\right)$, $k \in \mathbb{Z}$.

2. Dvakrát použijeme integraci per partes pro určitý integrál a dostaneme

$$\int_0^\pi e^{\frac{x}{2}}\sin(3x)\,\mathrm{d}x = \underbrace{\left[2e^{\frac{x}{2}}\sin(3x)\right]_0^\pi}_{=0} - \int_0^\pi 6e^{\frac{x}{2}}\cos(3x)\,\mathrm{d}x =$$
$$= -\left[12e^{\frac{x}{2}}\cos(3x)\right]_0^\pi - \int_0^\pi 36e^{\frac{x}{2}}\sin(3x)\,\mathrm{d}x.$$

Přičtením $\displaystyle\int_0^\pi 36e^{\frac{x}{2}}\sin(3x)\,\mathrm{d}x$ a vydělením 37 dostaneme

$$\int_0^\pi e^{\frac{x}{2}}\sin(3x)\,\mathrm{d}x = -\frac{12}{37}\left[e^{\frac{x}{2}}\cos(3x)\right]_0^\pi = \frac{12}{37}\left(e^{\frac{\pi}{2}}+1\right).$$

3. Funkce $f(x) = \dfrac{x^\alpha \sin x}{(\pi - x)^\alpha}$ je spojitá a kladná na intervalu $(0, \pi)$. Vyšetříme tedy konvergenci integrálu na intervalech $(0, \pi/2]$ („u bodu 0“), $[\pi/2, \pi)$ („u bodu $\pi/2$“) pomocí limitního srovnávacího kritéria.

<u>Konvergence u 0</u>: Položme $g(x) = x^{\alpha+1}$. Potom

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\sin x}{x} \frac{1}{(\pi - x)^\alpha} = \frac{1}{\pi^\alpha} \in (0, \infty),$$

tedy z limitního srovnávacího kritéria

$$\int_0^{\pi/2} f(x)\,\mathrm{d}x \text{ konverguje} \iff \int_0^{\pi/2} x^{\alpha+1}\,\mathrm{d}x \text{ konverguje} \iff \alpha > -2.$$

<u>Konvergence u $\pi/2$</u>: Substitucí $y = \pi - x$ převedeme

$$\int_{\pi/2}^{\pi} \frac{x^\alpha \sin x}{(\pi - x)^\alpha} = -\int_{\pi/2}^{0} \frac{(\pi - y)^\alpha \sin(\pi - y)}{y^\alpha}\,\mathrm{d}y = \int_0^{\pi/2} \frac{(\pi - y)^\alpha \sin(y)}{y^\alpha}\,\mathrm{d}y.$$

Srovnání s funkcí $y^{1-\alpha}$ dá

$$\lim_{y\to 0^+} (\pi - y)^\alpha \frac{\sin y}{y} = \pi^\alpha \in (0, \infty),$$

proto platí

$$\int_{\pi/2}^{\pi} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^{\pi/2} \frac{(\pi - y)^\alpha \sin(y)}{y^\alpha}\,\mathrm{d}y \text{ konverguje} \iff$$
$$\iff \int_0^{\pi/2} y^{1-\alpha}\,\mathrm{d}y \text{ konverguje} \iff \alpha < 2.$$

<u>Závěr</u>: Zadaný integrál konverguje, právě když $-2 < \alpha < 2$.