13. TAYLORŮV POLYNOM

Nalezněte Taylorův polynom řádu n funkce f v bodě 0.

1. $f(x) = e^x$, $n \in \mathbb{N}$

2. $f(x) = e^{-\frac{x^2}{2}}$, $n = 4$

3. $f(x) = \sin x$, $n = 6$

4. $f(x) = \sin(2x^2)$, $n = 6$

5. $f(x) = \operatorname{tg}(x)$, $n = 4$

6. $f(x) = \cos(\sin x)$, $n = 5$

7. $f(x) = \sin(\sin x)$, $n = 6$

8. $f(x) = \sin(1 - \cos x)$, $n = 3$

9. $f(x) = \dfrac{1 + x + x^2}{1 - x + x^2}$, $n = 4$

10. Vyčíslete s přesností 10^{-3} hodnotu (a) $\cos \frac{1}{10}$ (b) $\sqrt{5}$ (c) e

Spočtěte limity s využitím Taylorova polynomu.

11. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{1 - \cos x}{x^2}$

12. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sin x - x}{x^3}$

13. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\cos x - e^{-\frac{x^2}{2}}}{x^4}$

14. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{e^x \sin x - x(1+x)}{x^3}$

15. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{1}{x} - \frac{1}{\sin x}$

16. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{1}{x} \left(\frac{1}{x} - \operatorname{cotg} x \right)$

17. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{a^x + a^{-x} - 2}{x^2}$, kde $a > 0$

18. $\displaystyle\lim_{x\to \infty} x - x^2 \log\left(1 + \tfrac{1}{x}\right)$

19. $\displaystyle\lim_{x\to \infty} \sqrt[6]{x^6 + x^5} - \sqrt[6]{x^6 - x^5}$

20. $\displaystyle\lim_{x\to \infty} x^{\frac{3}{2}} \left(\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1} - 2\sqrt{x} \right)$

Najděte $n \in \mathbb{N}$ takové, aby limita vyšla konečná a nenulová, limitu spočtěte:

21. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{(1+x)^x - 1}{x^n}$

22. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\cos x - \cos(\operatorname{tg} x)}{x^n}$

23. Najděte $a, b \in \mathbb{R}$, aby $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{x - (a + b\cos x)\sin x}{x^4} = 0.$

24. Najděte $a, b \in \mathbb{R}$, aby $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{x - a\sin x - b\operatorname{tg} x}{x^5}$ vyšla konečná nenulová.

Vyšetřete konvergenci řad s využitím Taylorova polynomu.

25. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \sin \tfrac{1}{n} - \log\left(1 + \tfrac{1}{n}\right)$

26. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \cos \tfrac{1}{\sqrt{n}} - \tfrac{2n-1}{2n}$

27. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \tfrac{1}{\sqrt{n}} + \log\left(\sqrt{1 + \tfrac{1}{n}} - \tfrac{1}{\sqrt{n}} \right)$

28. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} 2\operatorname{tg} \tfrac{1}{\sqrt[5]{n}} - 2\sin \tfrac{1}{\sqrt[5]{n}} - \tfrac{1}{\sqrt[5]{n^3}}$

VÝSLEDKY

1. $1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \cdots + \frac{x^n}{n!}$

2. $1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{8}x^4$

3. $x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{120}x^5$

4. $2x^2 - \frac{4}{3}x^6$

5. $x + \frac{1}{3}x^3$

6. $1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{5}{24}x^4$

7. $x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{10}x^5$

8. $\frac{1}{2}x^2$

9. $1 + 2x + 2x^2 - 2x^4$

10. (a) 0,995 (b) 2,236 (c) 2,718

11. $\frac{1}{2}$

12. $-\frac{1}{6}$

13. $-\frac{1}{12}$

14. $\frac{1}{3}$

15. 0

16. $\frac{1}{3}$

17. $\log^2 a$

18. $\frac{1}{2}$

19. $\frac{1}{3}$

20. $-\frac{1}{4}$

21. $n = 2$, limita je rovna 1

22. $n = 4$, limita je rovna $\frac{1}{3}$

23. $a = \frac{4}{3}$, $b = -\frac{1}{3}$

24. $a = \frac{2}{3}$, $b = \frac{1}{3}$, limita vyjde $-\frac{1}{20}$

25. Konverguje.

26. Konverguje.

27. Konverguje.

28. Diverguje.