

## 22. FUNKCE VÍCE PROMĚNNÝCH I.

Rozhodněte, zda existují následující limity a pokud ano, spočtěte je.

1.  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$

6.  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} (x^2 + y^2)^{x^2 y^2}$

2.  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^3}{x^2 + y^2}$

7.  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\arctg(x^2) \sin x}{x^2 + y^2}$

3.  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy}{x^2 + y^2}$

8.  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x + y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$

4.  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$

9.  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} (x^2 + y^2) \sin \frac{1}{x^2 + y^2}$

5.  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^4 + y^4}{x^2 + y^2}$

10.  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{2 - \cos x - \cos y}{x^2 + y^2}$

Spočtěte parciální derivace funkcí všude, kde existují.

11.  $f(x, y) = x^m y^n$ , kde  $m, n \in \mathbb{N}$

15.  $f(x, y, z) = \left(\frac{x}{y}\right)^z$

12.  $f(x, y) = e^{xy}$

13.  $f(x, y, z) = xy + yz + zx$

16.  $f(x, y, z) = x^{\frac{y}{z}}$

14.  $f(x, y) = |x| \cdot |y|$

17.  $f(x, y) = \sqrt{x + y^2}$

Rozhodněte, zda funkce  $f$  má totální diferenciál v bodě  $(0, 0)$  a pokud ano, spočtěte jej. (Pokud funkce není v  $(0, 0)$  definována, spojitě ji dodefinujte, pokud to lze.)

18.  $f(x, y) = x^2 y^3$

19.  $f(x, y) = \frac{x^2 y}{x^2 + y^2}$

20.  $f(x, y) = \frac{y^3}{\sqrt{x^2 + y^2}}$

21.  $f(x, y) = |xy|$

22.  $f(x, y) = (x^2 + y^2) \sin \frac{1}{x^2 + y^2}$

23.  $f(x, y) = \sqrt[3]{x^3 + y^3}$

24.  $f(x, y) = e^{\frac{-1}{x^2 + xy + y^2}}$

## VÝSLEDKY

- |  |  |
|--|--|
| <p>1. ne</p> <p>2. ano, 0</p> <p>3. ne</p> <p>4. ne</p> <p>5. ano, 0</p> | <p>6. ano, 1</p> <p>7. ano, 0</p> <p>8. ne</p> <p>9. ano, 0</p> <p>10. ano, <math>\frac{1}{2}</math></p> |
|--|--|
11.  $\frac{\partial f}{\partial x} = mx^{m-1}y^n$ ,  $\frac{\partial f}{\partial y} = nx^m y^{n-1}$  pro  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ .
12.  $\frac{\partial f}{\partial x} = ye^{xy}$ ,  $\frac{\partial f}{\partial y} = xe^{xy}$  pro  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ .
13.  $\frac{\partial f}{\partial x} = y + z$ ,  $\frac{\partial f}{\partial y} = x + y$ ,  $\frac{\partial f}{\partial z} = x + y$  pro  $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ .
14.  $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = |y| \operatorname{sgn} x$  pro  $x \neq 0$ .  $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = |x| \operatorname{sgn} y$  pro  $y \neq 0$ .  
 $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = 0$ .  $\frac{\partial f}{\partial x}(0, y)$  pro  $y \neq 0$  a  $\frac{\partial f}{\partial y}(x, 0)$  pro  $x \neq 0$  neexistují.
15. Pokud  $x, y > 0$  nebo  $x, y < 0$ , pak  $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{z}{y} \cdot \left(\frac{x}{y}\right)^{z-1}$ ;  $\frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{zx}{y^2} \cdot \left(\frac{x}{y}\right)^{z-1}$ ;  $\frac{\partial f}{\partial z} = \left(\frac{x}{y}\right)^z \cdot \log \frac{x}{y}$ .
16. Pokud  $x > 0$  a  $z \neq 0$ , pak  $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{y}{z} \cdot x^{\frac{y}{z}-1}$ ;  $\frac{\partial f}{\partial y} = x^{\frac{y}{z}} \cdot \log x \cdot \frac{1}{z}$ ;  
 $\frac{\partial f}{\partial z} = -x^{\frac{y}{z}} \cdot \log x \cdot \frac{y}{z^2}$ .
17. Pokud  $x > -y^2$ , pak  $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{2\sqrt{x+y^2}}$ ;  $\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{y}{\sqrt{x+y^2}}$ . Jinak parciální derivace neexistují.
18. ano,  $Df(0, 0)(h) = 0$ . (Pro  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$  :  $Df(x, y)(h) = 2xy^3h_1 + 3x^2y^2h_2$ .)
19. ne
20.  $Df(0, 0)(h) = 0$
21. ne
22. ano,  $Df(0, 0)(h) = 0$ .
23. ne
24. ano