23. FUNKCE VÍCE PROMĚNNÝCH II.

Spočtěte parciální derivace funkce h v bodě a.

1. $h(x_1, x_2) = g(f_1(x_1, x_2), f_2(x_1, x_2))$, $a = (1, 0)$, kde
$f_1(x_1, x_2) = x_1x_2$, $f_2(x_1, x_2) = 2x_1+x_2$, $g(y_1, y_2) = y_1^2y_2+y_1y_2^2+e^{y_2}$.

2. $h(x, y) = f(u(x, y), v(x, y))$, $a = (1, 0)$, kde
$u(x, y) = x\cos y - 1$, $v(x, y) = y\sin x$,
$Df(0, 0)$ existuje a $\nabla f(0, 0) = (2, 7)$

3. $h(x, y) = g(x^2 - y^2, e^{xy}, \sin x + \cos y)$, $a = (0, 0)$, kde
$Dg(0, 1, 1)$ existuje a $\nabla g(0, 1, 1) = (3, -2, 1)$.

4. $h(r, \phi) = g(f_1(r, \phi), f_2(r, \phi))$, $a = (r, \phi) \in \mathbb{R}^2$, kde
$f_1(r, \phi) = r\cos\phi$, $f_2(r, \phi) = r\sin\phi$, $g(x, y) = x^2 + y^2$

5. Mějme zobrazení $f\colon \mathbb{R}^3 \to R^2$, $g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^4$ taková, že

$$f(x, y, z) = (x^2 + e^y + z, \sin x + z^2), \quad (x, y, z) \in \mathbb{R}^3,$$

derivace $Dg(1, 0)$ existuje a je reprezentována maticí

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}.$$

Dokažte existenci derivace $D(g \circ f)(0, 0, 0)$ a spočtěte její reprezentující matici.

6. Buď $f = (f_1, f_2)\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ zobrazení definované předpisem

$$f(x, y, z) = ((x + 1)(y + 1)^2(z + 1)^3, \sin x\cos(y + 2z)), \quad (x, y, z) \in \mathbb{R}^3.$$

Zobrazení $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ má v bodě $(1, 0)$ derivaci reprezentovanou maticí

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(a) Dokažte existenci derivace $D(g \circ f)(0, 0, 0)$ a spočtěte její reprezentující matici.

(b) Spočtěte $\dfrac{\partial f_1}{\partial(2, 0, 1)}(0, 0, 0)$, tzn. derivaci funkce f_1 v bodě $(0, 0, 0)$ podle vektoru $(2, 0, 1)$.

VÝSLEDKY

1. $\frac{\partial h}{\partial x_1}(1,0) = 2e^2$, $\frac{\partial h}{\partial x_2}(1,0) = 4 + e^2$

2. $\frac{\partial h}{\partial x}(1,0) = 2$, $\frac{\partial h}{\partial y}(1,0) = 7\sin 1$

3. $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 1$, $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$

4. $\frac{\partial h}{\partial \phi}(r,\phi) = 0$, $\frac{\partial h}{\partial r}(r,\phi) = 2r$

5. $D(g \circ f)(0,0,0)$ má reprezentující matici $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 4 & 3 & 3 \\ 6 & 5 & 5 \\ 8 & 7 & 7 \end{pmatrix}$.

6. (a) $D(g \circ f)(0,0,0)$ má reprezentující matici $\begin{pmatrix} 3 & 4 & 6 \\ 0 & -2 & -3 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

(b) $\dfrac{\partial f_1}{\partial(2,0,1)}(0,0,0) = 5$

23. FUNKCE VÍCE PROMĚNNÝCH II.

Spočtěte parciální derivace funkce h v bodě a.

1. $h(x_1,x_2) = g(f_1(x_1,x_2), f_2(x_1,x_2))$, $a = (1,0)$, kde
$f_1(x_1,x_2) = x_1x_2$, $f_2(x_1,x_2) = 2x_1+x_2$, $g(y_1,y_2) = y_1^2y_2+y_1y_2^2+e^{y_2}$.

2. $h(x,y) = f(u(x,y), v(x,y))$, $a = (1,0)$, kde
$u(x,y) = x\cos y - 1$, $v(x,y) = y\sin x$,
$Df(0,0)$ existuje a $\nabla f(0,0) = (2,7)$

3. $h(x,y) = g(x^2-y^2, e^{xy}, \sin x + \cos y)$, $a = (0,0)$, kde
$Dg(0,1,1)$ existuje a $\nabla g(0,1,1) = (3,-2,1)$.

4. $h(r,\phi) = g(f_1(r,\phi), f_2(r,\phi))$, $a = (r,\phi) \in \mathbb{R}^2$, kde
$f_1(r,\phi) = r\cos\phi$, $f_2(r,\phi) = r\sin\phi$, $g(x,y) = x^2+y^2$

5. Mějme zobrazení $f\colon \mathbb{R}^3 \to R^2$, $g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^4$ taková, že

$$f(x,y,z) = (x^2+e^y+z, \sin x + z^2), \quad (x,y,z) \in \mathbb{R}^3,$$

derivace $Dg(1,0)$ existuje a je reprezentována maticí

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}.$$

Dokažte existenci derivace $D(g\circ f)(0,0,0)$ a spočtěte její reprezentující matici.

6. Buď $f = (f_1,f_2)\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ zobrazení definované předpisem

$$f(x,y,z) = ((x+1)(y+1)^2(z+1)^3, \sin x\cos(y+2z)), \quad (x,y,z) \in \mathbb{R}^3.$$

Zobrazení $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ má v bodě $(1,0)$ derivaci reprezentovanou maticí

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(a) Dokažte existenci derivace $D(g\circ f)(0,0,0)$ a spočtěte její reprezentující matici.

(b) Spočtěte $\dfrac{\partial f_1}{\partial(2,0,1)}(0,0,0)$, tzn. derivaci funkce f_1 v bodě $(0,0,0)$ podle vektoru $(2,0,1)$.

VÝSLEDKY

1. $\frac{\partial h}{\partial x_1}(1,0) = 2e^2$, $\frac{\partial h}{\partial x_2}(1,0) = 4 + e^2$

2. $\frac{\partial h}{\partial x}(1,0) = 2$, $\frac{\partial h}{\partial y}(1,0) = 7\sin 1$

3. $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 1$, $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$

4. $\frac{\partial h}{\partial \phi}(r,\phi) = 0$, $\frac{\partial h}{\partial r}(r,\phi) = 2r$

5. $D(g \circ f)(0,0,0)$ má reprezentující matici $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 4 & 3 & 3 \\ 6 & 5 & 5 \\ 8 & 7 & 7 \end{pmatrix}$.

6. (a) $D(g \circ f)(0,0,0)$ má reprezentující matici $\begin{pmatrix} 3 & 4 & 6 \\ 0 & -2 & -3 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

(b) $\dfrac{\partial f_1}{\partial (2,0,1)}(0,0,0) = 5$