METRICKÉ PROSTORY II.

1. Rozhodněte, zda následující prostory (se standardními metrikami) jsou separabilní.

(a) $\mathbb{R}^n$

(b) $\mathcal{C}([0,1])$

(c) ℓ^1

(d) ℓ^∞

(e) c_0

(f) $L^1([0,1])$

(g) $L^\infty([0,1])$

2. Je uzavřená jednotková koule v ℓ^1 (nebo v ℓ^p, $L^p([0,1])$, $\mathcal{C}([0,1])$, $\ldots$) totálně omezená?

3. Uzávěr totálně omezené množiny je totálně omezený. Dokažte.

4. Je množina $\{(x, \sin(1/x)) : x \in (0,1]\} \cup (\{0\} \times [-1,1])$ souvislá, křivkově souvislá?

5. Spojte protější rohy čtverce disjunktními souvislými množinami. Přesněji řečeno: Najděte disjunktní souvislé množiny $A, B \subset [0,1]^2$ takové, že $(0,0) \in A$, $(1,1) \in A$, $(1,0) \in B$, $(0,1) \in B$.

6. *Cantorův děravý stan* je souvislý metrický prostor takový, že po odebrání jednoho bodu je totálně nesouvislý (tzn. každá jeho alespoň dvoubodová množina je nesouvislá).

7. (nad rámec MA4) Existuje na zadaném prostoru metrika ρ mající danou vlastnost? Může být taková metrika generována normou?

(a) $\mathbb{R}^m$: $\quad x_n \xrightarrow{\rho} a \iff x_{n,i} \to a_i, \quad i = 1, \ldots, m$

(b) [1] $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$: $\quad x_n \xrightarrow{\rho} a \iff x_{n,i} \to a_i, \quad i \in \mathbb{N}$

(c) [2] $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$: $\quad f_n \xrightarrow{\rho} f \iff f_n \to f$ na $\mathbb{R}$ (bodová konvergence)

(d) $\mathcal{C}([0,1])$: $\quad f_n \xrightarrow{\rho} f \iff f_n \rightrightarrows f$ na $[0,1]$

(e) $\mathcal{C}(\mathbb{R})$: $\quad f_n \xrightarrow{\rho} f \iff f_n \overset{\text{loc}}{\rightrightarrows} f$ na $\mathbb{R}$

---

[1] $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ je prostor všech posloupností reálných čísel

[2] $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ je prostor všech reálných funkcí na $\mathbb{R}$

VÝSLEDKY

1.
(a) ano
(b) ano
(c) ano
(d) ne
(e) ano
(f) ano
(g) ne

2. ne

4. Je souvislá, nikoli křivkově.

7.
(a) ano, můžeme vzít Eukleidovskou normu
(b) ano, nemůže být generována normou
(c) ne
(d) ano, můžeme vzít supremovou normu
(e) ano, nemůže být generována normou