

1. Taylorův polynom

Definice. Necht f je funkce, $n \in \mathbb{N}$, $a \in \mathbb{R}$ a existuje vlastní $f^{(n)}(a)$. Pak polynom

$$T_n^{f,a}(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \dots + \frac{1}{n!}f^{(n)}(a)(x-a)^n$$

nazýváme **Taylorovým polynomem řádu n funkce f v bodě a** .

Úmluva. V dalším textu budeme symbol tvaru $(x-a)^0$ chápat jako 1, a to i tehdy, jestliže $x = a$. Symbolem $f^{(0)}$ (tedy „nultou derivací“ funkce f) budeme rozumět samotnou funkci f .

Lemma 1.1. Necht $n \in \mathbb{N}$, $a \in \mathbb{R}$, Q je polynom, st $Q \leq n$ a $\lim_{x \rightarrow a} \frac{Q(x)}{(x-a)^n} = 0$. Pak Q je nulový polynom.

Důkaz. Důkaz nebyl, nebude zkoušen. □

Věta 1.2 (Charakterizace Taylorova polynomu). Necht $n \in \mathbb{N}$, $a \in \mathbb{R}$ a necht má funkce f v bodě a vlastní n -tou derivaci. Potom

(a) Polynom $T_n^{f,a}(x)$ je jediný polynom stupně nejvýše n splňující

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - T_n^{f,a}(x)}{(x-a)^n} = 0.$$

(b) Polynom $P(x) = T_n^{f,a}(x)$ je jediný polynom stupně nejvýše n takový, že pro každé $i \in \{0 \dots n\}$ platí $f^{(i)}(a) = P^{(i)}(a)$.

Důkaz. Důkaz byl přednesen na přednášce a bude zkoušen. □

Důsledek 1.3. Necht $n \in \mathbb{N}$, $a \in \mathbb{R}$ a necht má funkce f v bodě a vlastní n -tou derivaci. Potom

$$f(x) = T_n^{f,a}(x) + \omega(x)(x-a)^n,$$

kde $\lim_{x \rightarrow a} \omega(x) = 0$.

Důkaz. Důkaz byl přednesen na přednášce a bude zkoušen. □

konec 1. přednášky (20.2.2024)

Věta 1.4 (Taylorův polynom základních funkcí). Necht $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, pak

$$\begin{aligned} T_n^{\exp,0}(x) &= 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} \\ T_{2n-1}^{\sin,0}(x) &= T_{2n}^{\sin,0}(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} \\ T_{2n}^{\cos,0}(x) &= T_{2n+1}^{\cos,0}(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} \\ T_n^{\log(1+x),0}(x) &= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} \\ \forall \alpha \in \mathbb{R} : T_n^{(1+x)^\alpha,0}(x) &= 1 + \frac{\alpha}{1!}x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \dots + \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!}x^n. \end{aligned}$$

Důkaz. Důkaz byl přednesen na přednášce a bude zkoušen. □

Věta 1.5 (Lagrangeův tvar zbytku). *Nechť $n \in \mathbb{N}$ a necht' $a, x \in \mathbb{R}$, $a < x$. Předpokládejme, že funkce f má v každém bodě intervalu $[a, x]$ vlastní derivaci řádu $(n + 1)$. Pak existuje $\xi \in (a, x)$ takové, že*

$$f(x) - T_n^{f,a}(x) = \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi)(x-a)^{n+1}.$$

Důkaz. Důkaz byl přednesen na přednášce a bude zkoušen. □

Poznámka. Věta 1.5 platí i v případě $x < a$.

Důsledek 1.6. *Nechť $n \in \mathbb{N}$, $a \in \mathbb{R}$, $r > 0$ a necht' má funkce f v každém bodě intervalu $(a-r, a+r)$ vlastní derivaci řádu $(n + 1)$. Pak*

$$\forall x \in (a-r, a+r): |f(x) - T_n^{f,a}(x)| \leq \frac{r^{n+1}}{(n+1)!} \sup_{|y-a|<r} |f^{(n+1)}(y)|.$$

Důkaz. Důkaz byl přednesen na přednášce a bude zkoušen. □

Důsledek 1.7. *Nechť $a \in \mathbb{R}$, $r > 0$ a necht' má funkce f v každém bodě intervalu $(a-r, a+r)$ vlastní derivaci řádu n pro každé $n \in \mathbb{N}$. Ať existuje konstanta $K > 0$ taková, že $\sup_{|y-a|<r} |f^{(n+1)}(y)| \leq K^{n+1}$ pro $n \in \mathbb{N}$. Pak platí:*

(a) *Pro každé $\varepsilon > 0$ existuje n_0 tak, že pro každé přirozené číslo $n \geq n_0$ platí*

$$\forall x \in (a-r, a+r): |f(x) - T_n^{f,a}(x)| \leq \varepsilon.$$

(b)

$$\forall x \in (a-r, a+r): f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x-a)^n.$$

Důkaz. Důkaz byl přednesen na přednášce a bude zkoušen. □

Definice. Necht' f je funkce, $a \in \mathbb{R}$ a $f^{(n)}(a) \in \mathbb{R}$ pro každé $n \in \mathbb{N}$. Potom řadu

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x-a)^n$$

nazýváme **Taylorovou řadou funkce f o středu a** . Ve speciálním případě $a = 0$ mluvíme o **Maclaurinově řadě**.

Věta 1.8 (Taylorovy řady elementárních funkcí). *Platí (například) následující vztahy mezi elementárními funkcemi a jejich Taylorovými řadami (středem Taylorovy řady je ve všech případech bod $a = 0$):*

$$(a) \forall x \in \mathbb{R}: \exp x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!},$$

$$(b) \forall x \in \mathbb{R}: \sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1},$$

$$(c) \forall x \in \mathbb{R}: \cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n},$$

$$(d) \forall x \in (-1, 1]: \log(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n,$$

$$(e) \forall x \in (-1, 1), \forall \alpha \in \mathbb{R}: (1+x)^\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n,$$

Důkaz. Důkaz (a), (b) a (c) byl přednesen na přednášce a bude zkoušen. Důkaz (d) a (e) nebyl a zkoušen nebude. \square

konec 3. přednášky (27.2.2024)

2. Primitivní funkce

Značení. Nechť I je interval a $n \in \mathbb{N}$. Budeme používat značení

$$\begin{aligned}\mathcal{C}(I) &:= \{f : I \rightarrow \mathbb{R}; f \text{ je spojitá na } I\}; \\ \mathcal{C}^n(I) &:= \{f : I \rightarrow \mathbb{R}; f \text{ má spojitou } n\text{-tou derivaci na } I\}.\end{aligned}$$

Symbol $f \in \mathcal{C}([a, b])$ znamená, že interval $[a, b]$ je omezený a funkce f je na tomto intervalu spojitá.

2.1. Základní vlastnosti

Definice. Nechť funkce f je definovaná na neprázdném otevřeném intervalu I . Řekneme, že funkce F je *primitivní funkcí k f na I* , jestliže pro každé $x \in I$ existuje $F'(x)$ a platí $F'(x) = f(x)$.

Věta 2.1 (vlastnosti primitivní funkce). *Nechť funkce F je primitivní funkce k funkci f na neprázdném otevřeném intervalu I . Pak:*

- (a) F je spojitá na I .
- (b) Pro každé $c \in \mathbb{R}$ je $F + c$ primitivní funkce k f na I .
- (c) Pokud G je primitivní funkce k f na I , pak existuje $c \in \mathbb{R}$ takové, že $F(x) = G(x) + c$ pro každé $x \in I$.

Důkaz. Důkaz byl přednesen na přednášce a bude zkoušen. □

Věta 2.2 (vztah spojitosti a existence primitivní funkce). *Nechť I je neprázdny otevřený interval a $f \in \mathcal{C}(I)$. Pak f má na I primitivní funkci.*

Důkaz. Důkaz nebyl, nebude zkoušen. □

Značení. Fakt, že F je primitivní funkce k f na neprázdném otevřeném intervalu I , značíme symbolem

$$\int f(x) dx \stackrel{c}{=} F(x), \quad x \in I.$$

Symbol $\int f(x) dx$ označuje množinu všech primitivních funkcí na $k f$ na I .

Věta 2.3 (linearita primitivní funkce). *Nechť funkce g, f mají na neprázdném otevřeném intervalu I primitivní funkci. Potom pro $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $(\alpha, \beta) \neq (0, 0)$ je*

$$\int \alpha f(x) + \beta g(x) dx = \alpha \int f(x) dx + \beta \int g(x) dx.$$

Důkaz. Důkaz byl přednesen na přednášce a bude zkoušen. □

Věta 2.4 (integrace per partes). *Nechť I je neprázdny otevřený interval a $f, g \in \mathcal{C}(I)$. Nechť F je primitivní funkce k f na I a G je primitivní funkce ke g na I . Pak platí*

$$\int g(x)F(x) dx = G(x)F(x) - \int G(x)f(x) dx, \quad x \in I.$$

Důkaz. Důkaz byl přednesen na přednášce a bude zkoušen. □

Věta 2.5 (první věta o substituci). *Nechť F je primitivní funkce k f na (a, b) . Nechť $\varphi : (\alpha, \beta) \rightarrow (a, b)$ je funkce, která má v každém bodě $t \in (\alpha, \beta)$ vlastní derivaci. Pak*

$$\int f(\varphi(t))\varphi'(t) dt \stackrel{c}{=} F(\varphi(t)), \quad t \in (\alpha, \beta).$$

Důkaz. Důkaz byl přednesen na přednášce a bude zkoušen. \square

konec 4. přednášky (28.2.2024)

Věta 2.6 (druhá věta o substituci). *Nechť $\varphi : (\alpha, \beta) \rightarrow (a, b)$ má v každém bodě nenulovou vlastní derivaci a $\varphi((\alpha, \beta)) = (a, b)$. Nechť f je funkce definovaná na intervalu (a, b) a platí*

$$\int f(\varphi(t))\varphi'(t) dt \stackrel{c}{=} G(t), \quad t \in (\alpha, \beta).$$

Pak

$$\int f(x) dx \stackrel{c}{=} G(\varphi^{-1}(x)), \quad x \in (a, b).$$

Důkaz. Důkaz byl přednesen na přednášce a bude zkoušen. \square

Věta 2.7 (lepení). *Nechť funkce f je spojitá na intervalu (a, b) , $c \in (a, b)$ a F je funkce spojitá v bodě c , splňující $F'(x) = f(x)$ pro $x \in (a, b) \setminus \{c\}$. Pak F je primitivní k f na (a, b) .*

Důkaz. Důkaz byl přednesen na přednášce a bude zkoušen. \square

konec 5. přednášky (5.3.2024)

2.2. Integrace racionálních funkcí

Definice. *Racionální funkcí* rozumíme podíl dvou polynomů, kde polynom ve jmenovateli není identicky roven nule. Racionální funkce $R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ je definovaná na libovolné podmnožině \mathbb{R} , která neobsahuje žádný kořen polynomu Q .

Věta 2.8 (rozklad na parciální zlomky). *Nechť P, Q jsou polynomy s reálnými koeficienty takové, že*

- (i) $\text{st } P < \text{st } Q$,
- (ii) $Q(x) = a_n(x - x_1)^{p_1} \dots (x - x_k)^{p_k} (x^2 + \alpha_1 x + \beta_1)^{q_1} \dots (x^2 + \alpha_l x + \beta_l)^{q_l}$,
- (iii) $a_n, x_1, \dots, x_k, \alpha_1, \dots, \alpha_l, \beta_1, \dots, \beta_l \in \mathbb{R}$, $a_n \neq 0$, $k, l \in \mathbb{N} \cup \{0\}$,
- (iv) $p_1, \dots, p_k, q_1, \dots, q_l \in \mathbb{N}$,
- (v) žádný z mnohočlenů $x^2 + \alpha_1 x + \beta_1, \dots, x^2 + \alpha_l x + \beta_l$ nemá reálný kořen,
- (vi) žádné dva z polynomů $x - x_1, x - x_2, \dots, x - x_k, x^2 + \alpha_1 x + \beta_1, \dots, x^2 + \alpha_l x + \beta_l$ nemají společný kořen.

Pak existují jednoznačně určená čísla $A_1^1, \dots, A_{p_1}^1, \dots, A_1^k, \dots, A_{p_k}^k, B_1^1, C_1^1, \dots, B_{q_1}^1, C_{q_1}^1, \dots, B_1^l, C_1^l, \dots, B_{q_l}^l, C_{q_l}^l$ taková, že platí

$$\begin{aligned} \frac{P(x)}{Q(x)} &= \frac{A_1^1}{x - x_1} + \dots + \frac{A_{p_1}^1}{(x - x_1)^{p_1}} \\ &+ \dots + \frac{A_1^k}{x - x_k} + \dots + \frac{A_{p_k}^k}{(x - x_k)^{p_k}} \\ &+ \frac{B_1^1 x + C_1^1}{x^2 + \alpha_1 x + \beta_1} + \dots + \frac{B_{q_1}^1 x + C_{q_1}^1}{(x^2 + \alpha_1 x + \beta_1)^{q_1}} + \dots \\ &+ \frac{B_1^l x + C_1^l}{x^2 + \alpha_l x + \beta_l} + \dots + \frac{B_{q_l}^l x + C_{q_l}^l}{(x^2 + \alpha_l x + \beta_l)^{q_l}} \end{aligned}$$

pro všechna $x \in \mathbb{R}$ splňující $Q(x) \neq 0$.

Důkaz. Důkaz nebyl, nebude zkoušen. \square

Poznámka (postup při integraci racionální funkce). Nechť je zadána racionální funkce $R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$, kde P a Q jsou polynomy, $Q \neq 0$. Při výpočtu primitivní funkce $\int R(x) dx$ na libovolném intervalu I , který neobsahuje žádný z kořenů polynomu Q , pak postupujeme podle následující osnovy:

1. krok: vyjádříme funkci $R(x)$ ve tvaru $R(x) = P_1(x) + \frac{P_2(x)}{Q(x)}$, kde $\text{st } P_2 < \text{st } Q$ pro všechna $x \in \mathbb{R}$, $Q(x) \neq 0$;
2. krok: provedeme rozklad funkce $\frac{P_2(x)}{Q(x)}$ na parciální zlomky podle Věty 2.8;
3. krok: integrujeme jednotlivé parciální zlomky podle následujícího návodu.

(a) Je-li

$$I = \int \frac{A}{(x-a)^n} dx,$$

kde $A \in \mathbb{R}$ a $n \in \mathbb{N}$, pak

$$I \stackrel{c}{=} \begin{cases} \frac{1}{1-n} \frac{A}{(x-a)^{n-1}}, & x \in (-\infty, a) \text{ nebo } x \in (a, \infty), \text{ je-li } n > 1; \\ A \log |x-a|, & x \in (-\infty, a) \text{ nebo } x \in (a, \infty), \text{ je-li } n = 1. \end{cases}$$

(b) Je-li

$$I = \int \frac{Bx + C}{(x^2 + \alpha x + \beta)^q} dx,$$

kde $q \in \mathbb{N}$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ a $\beta - \frac{1}{4}\alpha^2 > 0$, pak nejprve vyjádříme I ve tvaru

$$I = \frac{B}{2} \int \frac{2x + \alpha}{(x^2 + \alpha x + \beta)^q} dx + \left(C - \frac{B\alpha}{2}\right) \int \frac{1}{(x^2 + \alpha x + \beta)^q} dx.$$

Označíme-li

$$I_1 = \int \frac{2x + \alpha}{(x^2 + \alpha x + \beta)^q} dx \quad \text{a} \quad I_2 = \int \frac{1}{(x^2 + \alpha x + \beta)^q} dx,$$

potom

$$I_1 \stackrel{c}{=} \begin{cases} \frac{1}{(1-q)(x^2 + \alpha x + \beta)^{q-1}}, & x \in \mathbb{R}, \text{ je-li } q > 1, \\ \log(x^2 + \alpha x + \beta), & x \in \mathbb{R}, \text{ je-li } q = 1. \end{cases}$$

Dále platí

$$I_2 = \int \frac{1}{\left(\left(x + \frac{\alpha}{2}\right)^2 + \beta - \frac{\alpha^2}{4}\right)^q} dx = \frac{1}{\left(\beta - \frac{\alpha^2}{4}\right)^q} \int \frac{1}{\left[\left(\frac{2x + \alpha}{\sqrt{4\beta - \alpha^2}}\right)^2 + 1\right]^q} dx.$$

Pro výpočet posledního integrálu využijeme první větu o substituci. Položíme $\varphi(x) = \frac{2x + \alpha}{\sqrt{4\beta - \alpha^2}}$, takže $\varphi'(x) = \frac{2}{\sqrt{4\beta - \alpha^2}}$, a obdržíme

$$\int \frac{1}{\left[\left(\frac{x + \frac{\alpha}{2}}{\sqrt{\beta - \frac{\alpha^2}{4}}}\right)^2 + 1\right]^q} dx = \frac{2}{\sqrt{4\beta - \alpha^2}} \int \frac{1}{(y^2 + 1)^q} dy.$$

Pro integrál $\int \frac{1}{(y^2 + 1)^q} dy$ je k dispozici rekurentní vzorec získaný integrací per partes (důkaz vzorce byl na přenašce předveden a bude zkoušen):

$$\int \frac{1}{(y^2 + 1)^q} dy \stackrel{c}{=} \arctg(y),$$
$$\int \frac{1}{(y^2 + 1)^{q+1}} dy = \frac{y}{2q(y^2 + 1)^q} + \frac{2q-1}{2q} \int \frac{1}{(y^2 + 1)^q} dy, \quad q > 1.$$

konec 6. přednášky (6.3.2024)

2.3. Některé užitečné substituce

Poznámka (racionalisace integrálů s exponenciálou a s logaritmem). Ať R je racionální funkce.

(a) Pro převod integrálů tvaru $\int R(e^{at}) dt$ (kde $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$) na integraci racionální funkce lze využít substituci $\varphi(t) = e^{at}$.

(b) Pro převod integrálů tvaru $\int \frac{R(\log t)}{t} dt$ na integraci racionální funkce lze využít substituci $\varphi(t) = \log t$.

Značení. Ve zbytku této kapitoly budeme symbolem $R(x, y)$ značit *racionální funkci dvou proměnných*, tj. $R(x, y) = \frac{P(x, y)}{Q(x, y)}$, kde

$$P(x, y) = \sum_{i, j=0}^{N_1} a_{ij} x^i y^j, \quad Q(x, y) = \sum_{i, j=0}^{N_2} b_{ij} x^i y^j.$$

Poznámka (racionalisace trigonometrických integrálů). Pro převod integrálů tvaru $\int R(\sin x, \cos x) dx$ na integraci racionální funkce lze využít jedné z následujících substitucí:

(a) vždy lze užít substituci $t = \operatorname{tg}(\frac{x}{2})$, $x \in (-\pi, \pi) + 2k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$),

(b) pokud $R(a, -b) = -R(a, b)$, lze užít substituci $t = \sin x$, $x \in \mathbb{R}$,

(c) pokud $R(-a, b) = -R(a, b)$, pak lze užít substituci $t = \cos x$, $x \in \mathbb{R}$,

(d) pokud $R(-a, -b) = R(a, b)$, pak lze užít substituci $t = \operatorname{tg} x$, $x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) + k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$).

konec 7. přednášky (12.3.2024)

Poznámka (racionalisace integrálů s odmocninou). Nechť $q \in \mathbb{N}$, $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, $ad \neq bc$. Potom pro převod integrálů tvaru $\int R(x, (\frac{ax+b}{cx+d})^{\frac{1}{q}}) dx$, na integraci racionální funkce lze využít substituci $t = (\frac{ax+b}{cx+d})^{\frac{1}{q}}$.

Poznámka (racionalisace integrálů tvaru $\int R(x, \sqrt{ax^2 + bx + c}) dt$). Nechť $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$. Potom pro převod integrálů tvaru $\int R(x, \sqrt{ax^2 + bx + c}) dx$ na integraci racionální funkce rozlišujeme následující případy:

(a) Nechť má trojčlen $ax^2 + bx + c$ dvojnásobný reálný kořen α a platí $ax^2 + bx + c = a(x - \alpha)^2$. Má-li mít úloha smysl, musí platit $a > 0$. Pak ale

$$\sqrt{ax^2 + bx + c} = \sqrt{a}|x - \alpha|.$$

(b) Nechť má trojčlen $ax^2 + bx + c$ dva různé reálné kořeny α_1, α_2 , $\alpha_1 < \alpha_2$ a platí $ax^2 + bx + c = a(x - \alpha_1)(x - \alpha_2)$. Je-li $a > 0$, pak pro $t \in (-\infty, \alpha_1)$ a $t \in (\alpha_2, \infty)$ platí

$$\begin{aligned} \sqrt{ax^2 + bx + c} &= \sqrt{a(x - \alpha_1)(x - \alpha_2)} \\ &= \sqrt{a}|x - \alpha_1| \sqrt{\frac{x - \alpha_2}{x - \alpha_1}}. \end{aligned}$$

Je-li $a < 0$, pak pro $x \in (\alpha_1, \alpha_2)$ platí

$$\begin{aligned} \sqrt{ax^2 + bx + c} &= \sqrt{(-a)(x - \alpha_1)(\alpha_2 - x)} \\ &= \sqrt{-a}(x - \alpha_1) \sqrt{\frac{\alpha_2 - x}{x - \alpha_1}}. \end{aligned}$$

V obou případech jsme tedy zadání převedli na úlohu nalézt primitivní funkci $\int R(x, (\frac{ax+b}{cx+d})^{\frac{1}{q}}) dx$, jejíž řešení již známe. Povšimněme si, že v obou případech je splněna podmínka $ad \neq bc$, neboť v prvním případě platí $ad = -\alpha_1$ a $bc = -\alpha_2$, zatímco ve druhém případě platí $ad = \alpha_1$ a $bc = \alpha_2$.

(c) Polynom $ax^2 + bx + c$ nemá reálné kořeny, nebo má dva různé reálné kořeny. Má-li mít úloha smysl, musí platit $a > 0$ a $c > 0$. V tomto případě lze užít takzvanou *Eulerovu substituci* $t = \pm\sqrt{ax} + \sqrt{ax^2 + bx + c}$.

konec 8. přednášky (13.3.2024)

Fakt 2.9. Jsou-li $a > 0$, $b, c \in \mathbb{R}$ taková, že $b^2 - 4ac \neq 0$, pak funkce $\psi(x) := \pm\sqrt{ax} + \sqrt{ax^2 + bx + c}$ definovaná na množině $\{x \in \mathbb{R}; ax^2 + bx + c > 0\}$ je prostá na každém intervalu I svého definičního oboru a označíme-li $\varphi := (\psi|_I)^{-1}$, pak $\varphi(t) = \frac{t^2 - c}{b \pm 2\sqrt{at}}$ má nenulovou vlastní derivaci na svém definičním oboru danou předpisem $\varphi'(t) = 2 \frac{\pm\sqrt{at^2 + bt} \pm \sqrt{ac}}{(b \pm 2\sqrt{at})^2}$.

Důkaz. Důkaz byl přednesen na přednášce a bude zkoušen. □

Z výše uvedeného faktu vyplývá, že Eulerovu substituci můžeme použít kdykoliv $a > 0$ a $b^2 - 4ac \neq 0$ a že v takovém případě jsou předpoklady 2. věty o substituci automaticky splněny (kde $x = \varphi(t)$ a $dx = \varphi'(t) dt$).

3. Newtonův, Riemannův a Riemannův-Stieltjesův integrál

3.1. Newtonův integrál

Definice. Necht' $a, b \in \mathbb{R}^*$, $a < b$. Řekneme, že *Newtonův integrál z funkce f na intervalu (a, b) existuje*, jestliže

- f má na (a, b) primitivní funkci (označme ji F),
- existují limity $\lim_{x \rightarrow a^+} F(x)$ a $\lim_{x \rightarrow b^-} F(x)$ (nikoli nutně vlastní);
- rozdíl těchto dvou limit je definován jako prvek množiny \mathbb{R}^* .

Hodnotou Newtonova integrálu z funkce f na intervalu (a, b) pak rozumíme prvek

$$(N) \int_a^b f(x) dx = \lim_{x \rightarrow b^-} F(x) - \lim_{x \rightarrow a^+} F(x).$$

Pokud $a > b$, pak klademe $(N) \int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx$. Pro $a \in \mathbb{R}^*$ definujeme $(N) \int_a^a f(x) dx = 0$. Jestliže $(N) \int_a^b f(x) dx$ existuje vlastní, pak říkáme, že integrál je *konvergentní*. Není-li integrál konvergentní, říkáme, že je *divergentní*.

Poznámka. Necht' $a, b \in \mathbb{R}^*$, $a < b$, a necht' f je funkce definovaná na intervalu (a, b) . Pak nastává právě jedna z následujících možností:

$$(N) \int_a^b f(x) dx \begin{cases} \text{neexistuje,} \\ \text{existuje} \begin{cases} = \infty, \\ = -\infty, \\ \in \mathbb{R}. \end{cases} \end{cases}$$

Značení. Necht' $a, b \in \mathbb{R}^*$, $a < b$. Množinu všech funkcí $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$, které mají na intervalu (a, b) konvergentní Newtonův integrál, značíme symbolem $\mathcal{N}(a, b)$.

Úmluva. Je-li $(a, b) \subset D(f)$, pak symbol $f \in \mathcal{N}(a, b)$ znamená $f|_{(a, b)} \in \mathcal{N}(a, b)$.

Značení. Necht' funkce F je definovaná na (a, b) a existují (vlastní nebo nevlastní) jednostranné limity $\lim_{x \rightarrow a^+} F(x)$ a $\lim_{x \rightarrow b^-} F(x)$. Potom budeme značit $F(a+) = \lim_{x \rightarrow a^+} F(x)$, $F(b-) = \lim_{x \rightarrow b^-} F(x)$ a $[F]_a^b = F(b-) - F(a+)$, pokud má rozdíl smysl. Budeme občas psát \int místo $(N) \int$.

Příklad.

$$(N) \int_0^1 x^\alpha dx = \begin{cases} [\frac{1}{\alpha+1} x^{\alpha+1}]_0^1 = \frac{1}{\alpha+1}, & \alpha \in (-1, \infty) \quad (\text{konverguje}), \\ [\frac{1}{\alpha+1} x^{\alpha+1}]_0^1 = \infty, & \alpha \in (-\infty, -1) \quad (\text{diverguje}), \\ [\log x]_0^1 = \infty, & \alpha = -1 \quad (\text{diverguje}). \end{cases}$$

$$(N) \int_1^\infty x^\alpha dx = \begin{cases} [\frac{1}{\alpha+1} x^{\alpha+1}]_1^\infty = \infty, & \alpha \in (-1, \infty) \quad (\text{diverguje}), \\ [\frac{1}{\alpha+1} x^{\alpha+1}]_1^\infty = \frac{-1}{\alpha+1}, & \alpha \in (-\infty, -1) \quad (\text{konverguje}), \\ [\log x]_1^\infty = \infty, & \alpha = -1 \quad (\text{diverguje}). \end{cases}$$

Značení. Nemůže-li dojít ke zmatení, píšeme $\int_a^b f$ místo $(N) \int_a^b f(x) dx$.

konec 9. přednášky (19.3.2024)

Věta 3.1 (vlastnosti Newtonova integrálu). *Nechť $a, b \in \mathbb{R}^*$, $a < b$.*

(a) *Pro $\alpha \in \mathbb{R}$ platí následující rovnosti, pokud pravé strany rovností mají smysl*

$$\int_a^b f + g = \int_a^b f + \int_a^b g, \quad \int_a^b \alpha f = \alpha \int_a^b f.$$

(b) *Jestliže $f, g \in \mathcal{N}(a, b)$ a $f \leq g$, pak $\int_a^b f \leq \int_a^b g$.*

(c) *At $f \in \mathcal{N}(a, b)$ a $m \leq f(x) \leq M$ pro $x \in [a, b]$. Pak*

$$m(b-a) \leq \int_a^b f \leq M(b-a).$$

(d) *Jestliže $f \in \mathcal{N}(a, b) \cap \mathcal{C}((a, b))$, pak $\int_a^b |f|$ existuje a $|\int_a^b f| \leq \int_a^b |f|$.*

(e) *Nechť $a, b, c \in \mathbb{R}^*$, $a < b < c$. Jestliže $f \in \mathcal{N}(a, c)$, pak $f \in \mathcal{N}(a, b) \cap \mathcal{N}(b, c)$ a platí*

$$\int_a^c f = \int_a^b f + \int_b^c f.$$

(f) *Nechť $a, b, c \in \mathbb{R}^*$, $a < b < c$. Nechť f je spojitá v b . Pak $f \in \mathcal{N}(a, b) \cap \mathcal{N}(b, c) \Leftrightarrow f \in \mathcal{N}(a, c)$.*

(g) *At $f \in \mathcal{N}(a, b)$. At $\{a_n\}, \{b_n\}$ jsou posloupnosti z (a, b) splňující $\lim a_n = a$, $\lim b_n = b$. Pak*

$$\int_a^b f = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{a_n}^{b_n} f.$$

(h) *At $f \in \mathcal{N}(a, b)$, $c \in (a, b)$. Pak $(x \mapsto \int_c^x f(t) dt)' = f(x)$ pro $x \in (c, b)$.*

Důkaz. Důkaz byl přednesen na přednášce a bude zkoušen. □

Věta 3.2 (per partes pro Newtonův integrál). *Nechť $a, b \in \mathbb{R}^*$, $a < b$, a necht f a g jsou funkce definované na (a, b) . Necht F je primitivní funkce k funkci f na (a, b) a G je primitivní funkce k funkci g na (a, b) . Potom platí*

$$\int_a^b Fg = [FG]_a^b - \int_a^b fG,$$

jestliže má pravá strana smysl.

Důkaz. Důkaz nebyl, nebude zkoušen. □

Věta 3.3 (substituce pro Newtonův integrál). *Nechť $a, b, \alpha, \beta \in \mathbb{R}^*$, $a < b$ a $\alpha < \beta$. Necht f je funkce definovaná na (a, b) a necht φ je funkce definovaná na (α, β) . Necht φ má vlastní nenulovou derivaci na (α, β) a necht platí $\varphi((\alpha, \beta)) = (a, b)$. Potom*

$$\int_a^b f = \int_\alpha^\beta (f \circ \varphi) |\varphi'|,$$

má-li alespoň jedna strana smysl.

Důkaz. Důkaz nebyl, nebude zkoušen. □

konec 10. přednášky (20.3.2024)

3.2. Riemannův integrál

Definice. Konečnou posloupnost $\{x_j\}_{j=0}^n$ nazýváme **dělením intervalu** $[a, b]$, jestliže platí

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b.$$

Body x_0, \dots, x_n nazýváme **dělicími body**. **Normou dělení** $D = \{x_j\}_{j=0}^n$ rozumíme číslo

$$\nu(D) = \max\{x_j - x_{j-1}; j = 1, \dots, n\}.$$

Definice. Necht f je omezená funkce definovaná na intervalu $[a, b]$ a $D = \{x_j\}_{j=0}^n$ je dělení $[a, b]$. Označme

$$\overline{S}(f, D) = \sum_{j=1}^n M_j(x_j - x_{j-1}), \text{ kde } M_j = \sup\{f(x); x \in [x_{j-1}, x_j]\},$$

$$\underline{S}(f, D) = \sum_{j=1}^n m_j(x_j - x_{j-1}), \text{ kde } m_j = \inf\{f(x); x \in [x_{j-1}, x_j]\},$$

$$\overline{\int_a^b} f(x) dx = \inf\{\overline{S}(f, D); D \text{ je dělení intervalu } [a, b]\},$$

$$\underline{\int_a^b} f(x) dx = \sup\{\underline{S}(f, D); D \text{ je dělení intervalu } [a, b]\}.$$

Definice. Řekneme, že omezená funkce f na intervalu $[a, b]$, $a < b$, má **Riemannův integrál od a do b** , pokud $\overline{\int_a^b} f(x) dx = \underline{\int_a^b} f(x) dx$. Hodnota integrálu f od a do b je rovna této společné hodnotě. Značíme ji $(R) \int_a^b f$. Nemůže-li dojít ke zmatení, píšeme $\int_a^b f$ místo $(R) \int_a^b f(x) dx$. Jestliže $a > b$, definujeme $\int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx$. V případě, že $a = b$, definujeme $\int_a^b f(x) dx = 0$.

Poznámka. Necht f je omezená funkce definovaná na intervalu $[a, b]$, která má Riemannův integrál od a do b . Pak hodnotu integrálu můžeme určit následujícím způsobem.

- pro každé $n \in \mathbb{N}$ zvolíme dělení $D_n = \{x_{n,k}\}_{k=1}^{k_n}$ tak, že $\lim_{n \rightarrow \infty} \nu(D_n) = 0$;
- pro každé $n \in \mathbb{N}$ a $i \in \{1, \dots, k_n\}$ zvolíme $c_{n,i} \in [x_{n,i-1}, x_{n,i}]$;

Pak $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^{k_n} f(c_{n,i})(x_{n,i} - x_{n,i-1}) = \int_a^b f(x) dx$.

Definice. Necht $a, b \in \mathbb{R}$. Množinu všech funkcí, které mají Riemannův integrál od a do b , značíme $\mathcal{R}([a, b])$. Pokud $[a, b] \subset D(f)$, potom symbol $f \in \mathcal{R}([a, b])$ znamená, že $f|_{[a,b]} \in \mathcal{R}([a, b])$.

Příklady. (a) Existuje omezená funkce na $[0, 1]$, která není Riemannovsky integrovatelná (například charakteristická funkce racionálních čísel).

Důkaz. Důkaz byl přednesen na přednášce a bude zkoušen. □

konec 11. přednášky (26.3.2024)

(b) Existuje funkce, která je Riemannovsky integrovatelná, ale není Newtonovsky integrovatelná (například $|\operatorname{sgn} x|$ na intervalu $[-1, 1]$).

Důkaz. Důkaz byl přednesen na přednášce a bude zkoušen. □

(c) Existuje funkce, která je Newtonovsky integrovatelná, ale není Riemannovsky integrovatelná (například $\frac{1}{\sqrt{x}}$ na intervalu $(0, 1]$ dodefinovaná libovolnou hodnotou v bodě 0).

Důkaz. Důkaz byl přednesen na přednášce a bude zkoušen. □

Věta 3.4 (spojitost a Riemannův integrál). *Nechť $f \in \mathcal{C}([a, b])$. Potom $f \in \mathcal{R}([a, b])$.*

Důkaz. Důkaz nebyl, nebude zkoušen. □

Věta 3.5 (vztah Riemannova a Newtonova integrálu). *Nechť $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, a nechť $f \in \mathcal{R}([a, b]) \cap \mathcal{N}(a, b)$. Potom*

$$(R) \int_a^b f(x) dx = (N) \int_a^b f(x) dx.$$

Důkaz. Důkaz byl přednesen na přednášce a bude zkoušen. Část, která nebyla dokázána je následující

Fakt: Pokud $f \in \mathcal{R}([a, b])$, pak pro každé $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ splňující, že kdykoliv $D = \{x_i\}_{i=0}^n$ je dělení $[a, b]$ a $\nu(D) < \delta$ a kdykoliv zvolíme $t_i \in [x_{i-1}, x_i]$, $i = 1, \dots, n$, pak

$$\left| (R) \int_a^b f(x) dx - \sum_{i=1}^n f(t_i)(x_i - x_{i-1}) \right| < \varepsilon.$$

□

Důsledek 3.6 (spojitost a existence Riemannova a Newtonova integrálu). *Nechť $f \in \mathcal{C}([a, b])$. Potom $f \in \mathcal{R}([a, b]) \cap \mathcal{N}(a, b)$ a*

$$(R) \int_a^b f(x) dx = (N) \int_a^b f(x) dx.$$

Důkaz. Důkaz byl přednesen na přednášce a bude zkoušen. □

3.3. Konvergence Newtonova integrálu

Věta 3.7 (vztah spojitosti a konvergence Newtonova integrálu). *Nechť $a, b \in \mathbb{R}$ a $f \in \mathcal{C}((a, b))$ je omezená. Potom $f \in \mathcal{N}(a, b)$.*

Speciálně, pokud $f \in \mathcal{C}((a, b))$, $f(a+) \in \mathbb{R}$ a $f(b-) \in \mathbb{R}$, pak $f \in \mathcal{N}(a, b)$.

Důkaz. Důkaz nebyl, nebude zkoušen. □

konec 12. přednášky (27.3.2024)

Věta 3.8 (srovnávací kritérium pro konvergenci Newtonova integrálu). *Nechť $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}^*$ a nechť $a < b$. Nechť funkce $f, g : [a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ splňují $0 \leq f(x) \leq g(x)$ pro každé $x \in [a, b)$. Nechť je $f \in \mathcal{C}([a, b))$ a $g \in \mathcal{N}(a, b)$. Potom $f \in \mathcal{N}(a, b)$.*

Důkaz. Důkaz byl přednesen na přednášce a bude zkoušen. □

Věta 3.9 (limitní srovnávací kritérium pro konvergenci Newtonova integrálu). *Nechť $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}^*$, $a < b$. Nechť f, g jsou spojité nezáporné funkce na $[a, b)$. Jestliže $\lim_{x \rightarrow b-} \frac{f(x)}{g(x)} \in (0, \infty)$, pak $f \in \mathcal{N}(a, b)$ právě tehdy, když $g \in \mathcal{N}(a, b)$.*

Důkaz. Důkaz byl přednesen na přednášce a bude zkoušen. □

Poznámka. Tvrzení Vět 3.8 a 3.9 platí s příslušnými úpravami i pro intervaly typu $(a, b]$.

Věta 3.10 (vztah absolutní konvergence a konvergence Newtonova integrálu). *Nechť $a, b \in \mathbb{R}^*$, $a < b$, a nechť je dána funkce $f \in \mathcal{C}((a, b))$ splňující $|f| \in \mathcal{N}(a, b)$. Potom $f \in \mathcal{N}(a, b)$.*

Důkaz. Důkaz byl přednesen na přednášce a bude zkoušen. □

konec 13. přednášky (2.4.2024)

Věta 3.11 (Abelovo-Dirichletovo kritérium konvergence Newtonova integrálu). *Nechť $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}^*$, $a < b$. Nechť $f, g \in \mathcal{C}([a, b])$ a g je monotónní na $[a, b]$. Nechť F je primitivní funkce k funkci f na (a, b) .*

(a) *Jestliže $f \in \mathcal{N}(a, b)$ a g je omezená na $[a, b]$, potom $fg \in \mathcal{N}(a, b)$.*

(b) *Jestliže F je omezená na (a, b) a $\lim_{x \rightarrow b^-} g(x) = 0$, potom $fg \in \mathcal{N}(a, b)$.*

Důkaz. Důkaz nebyl, nebude zkoušen. □

Poznámka. Tvrzení Věty 3.11 platí s příslušnými úpravami i pro intervaly typu $(a, b]$.

konec 14. přednášky (3.4.2024)

3.4. Riemannův-Stieltjesův integrál

Úmluva. V této sekci $[a, b]$ značí omezený interval, $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ a $\varphi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ jsou omezené funkce.

Následující definice je přímočaým zobecněním Riemannova integrálu.

Definice. Nechť $D = \{x_j\}_{j=0}^n$ je dělení $[a, b]$ a $\varphi : [a, b]$ je neklesající. Označme

$$\overline{S}(f, D, \varphi) = \sum_{j=1}^n M_j(\varphi(x_j) - \varphi(x_{j-1})), \text{ kde } M_j = \sup\{f(x); x \in [x_{j-1}, x_j]\},$$

$$\underline{S}(f, D, \varphi) = \sum_{j=1}^n m_j(\varphi(x_j) - \varphi(x_{j-1})), \text{ kde } m_j = \inf\{f(x); x \in [x_{j-1}, x_j]\},$$

$$\overline{\int_a^b} f(x) d\varphi(x) = \inf\{\overline{S}(f, D, \varphi); D \text{ je dělením intervalu } [a, b]\},$$

$$\underline{\int_a^b} f(x) d\varphi(x) = \sup\{\underline{S}(f, D, \varphi); D \text{ je dělením intervalu } [a, b]\}.$$

Řekneme, že f má **Riemannův-Stieltjesův integrál od a do b vzhledem k funkci φ** , pokud $\overline{\int_a^b} f(x) d\varphi(x) = \underline{\int_a^b} f(x) d\varphi(x)$. Hodnota integrálu f od a do b vzhledem k funkci φ je rovna této společné hodnotě. Značíme ji $(RS) \int_a^b f d\varphi(x)$.

Tuto definici je ale možné dále zobecnit.

Definice. Nechť $D = \{x_j\}_{j=0}^n$ je dělení $[a, b]$ a $c_j \in [x_{j-1}, x_j]$ pro $j = 1, \dots, n$. Pak *Riemannova-Stieltjesova suma* $S(f, D, \varphi, (c_j)_{j=1}^n)$ je definována jako

$$S(f, D, \varphi, (c_j)_{j=1}^n) = \sum_{j=1}^n f(c_j)(\varphi(x_j) - \varphi(x_{j-1})).$$

Většinou místo $S(f, D, \varphi, (c_j)_{j=1}^n)$ píšeme kratší zápis $S(f, D, \varphi)$.

Fakt 3.12. *Nechť φ je neklesající a $A \in \mathbb{R}$. Pak $(RS) \int_a^b f d\varphi(x) = A$ právě tehdy, když pro každé $\varepsilon > 0$ existuje D dělení $[a, b]$ takové, že kdykoliv $D' \supset D$ je dělení $[a, b]$ a kdykoliv $S(f, D', \varphi)$ je Riemannova-Stieltjesova suma, pak $|S(f, D', \varphi) - A| < \varepsilon$.*

Důkaz. Důkaz nebyl, nebude zkoušen. □

Tento fakt nás motivuje k následující definici.

Definice. Řekneme, že f má **Riemannův-Stieltjesův integrál od a do b vzhledem k funkci φ** (kde φ není nutně neklesající), pokud existuje $A \in \mathbb{R}$ takové, že pro každé $\varepsilon > 0$ existuje D dělení $[a, b]$ takové, že kdykoliv $D' \supset D$ je dělení $[a, b]$ a kdykoliv $S(f, D', \varphi)$ je Riemannova-Stieltjesova suma, pak $|S(f, D', \varphi) - A| < \varepsilon$.

V takovém případě je číslo A určeno jednoznačně, značíme jej $(RS) \int_a^b f d\varphi(x)$ a říkáme, že $(RS) \int_a^b f d\varphi(x)$ je **Riemannův-Stieltjesův integrál od a do b vzhledem k funkci φ** . Nemůže-li dojít ke zmatení, píšeme $\int_a^b f d\varphi(x)$ místo $(RS) \int_a^b f(x) d\varphi(x)$. Jestliže $a > b$, definujeme $\int_a^b f(x) d\varphi(x) = -\int_b^a f(x) d\varphi(x)$. V případě, že $a = b$, definujeme $\int_a^b f(x) d\varphi(x) = 0$.

Definice. Množinu všech funkcí, které mají Riemannův-Stieltjesův integrál od a do b vzhledem k funkci φ , značíme $\mathcal{RS}_\varphi([a, b])$. Pokud $[a, b] \subset D(f)$, potom symbol $f \in \mathcal{RS}_\varphi([a, b])$ znamená, že $f|_{[a, b]} \in \mathcal{RS}_\varphi([a, b])$.

Věta 3.13 (bilinearita RS integrálu). (i) *Je-li $f, g \in \mathcal{RS}_\varphi([a, b])$ a $c, d \in \mathbb{R}$, pak $cf + dg \in \mathcal{RS}_\varphi([a, b])$ a platí*

$$\int_a^b (cf + dg)(x) d\varphi(x) = c \int_a^b f(x) d\varphi(x) + d \int_a^b g(x) d\varphi(x).$$

(ii) *Jestliže $\psi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ je omezená funkce, $f \in \mathcal{RS}_\varphi([a, b]) \cap \mathcal{RS}_\psi([a, b])$ a $c, d \in \mathbb{R}$, pak $f \in \mathcal{RS}_{c\varphi + d\psi}([a, b])$ a platí*

$$\int_a^b f(x) d(c\varphi + d\psi)(x) = c \int_a^b f(x) d\varphi(x) + d \int_a^b f(x) d\psi(x).$$

Důkaz. Důkaz byl přednesen na přednášce a bude zkoušen. □

Věta 3.14 (aditivita RS integrálu vzhledem k intervalům). *Nechť $c \in (a, b)$. Pak $f \in \mathcal{RS}_\varphi([a, b])$ právě tehdy, když $f \in \mathcal{RS}_\varphi([a, c]) \cap \mathcal{RS}_\varphi([c, b])$ a pokud $f \in \mathcal{RS}_\varphi([a, b])$ pak platí*

$$\int_a^b f(x) d\varphi(x) = \int_a^c f(x) d\varphi(x) + \int_c^b f(x) d\varphi(x).$$

Důkaz. Na přednášce byl ukázán důkaz jen jedné implikace a tento bude zkoušen. □

Věta 3.15 (spojitost a RS integrál). *Nechť navíc φ je neklesající. Jestliže množina bodů nespojitosti funkce f je konečná a je-li v každém z těchto bodů funkce φ spojitá, pak $f \in \mathcal{RS}_\varphi([a, b])$.*

Důkaz. Důkaz nebyl, nebude zkoušen. □

Poznámka. Speciálně, je-li f spojitá až na konečně mnoho bodů, pak existuje Riemannův integrál funkce f . Jedná se tedy o zesílení a zobecnění věty 3.4.

Důsledek 3.16. *Nechť $f \in \mathcal{C}([a, b])$ a φ je monotónní. Pak $f \in \mathcal{RS}_\varphi([a, b])$.*

Důkaz. Důkaz byl přednesen na přednášce a bude zkoušen. □

Věta 3.17 (per partes pro RS integrál). *Funkce f má Riemannův-Stieltjesův integrál od a do b vzhledem k funkci φ právě tehdy, když funkce φ má Riemannův-Stieltjesův integrál od a do b vzhledem k funkci f a pokud oba integrály existují pak*

$$\int_a^b f(x) d\varphi(x) = [f(x)\varphi(x)]_a^b - \int_a^b \varphi(x) df(x),$$

kde symbol $[f(x)\varphi(x)]_a^b$ značí rozdíl $f(b)\varphi(b) - f(a)\varphi(a)$.

Důkaz. Důkaz nebyl, nebude zkoušen. □

Důsledek 3.18. *Nechť f je monotónní a $\varphi \in \mathcal{C}([a, b])$. Pak $f \in \mathcal{RS}_\varphi([a, b])$.*

Důkaz. Důkaz byl přednesen na přednášce a bude zkoušen. □

Poznámka. Speciálně, je-li f monotónní, pak existuje Riemannův integrál funkce f . To je nový pro nás nový poznatek i pro Riemannův integrál.

konec 15. přednášky (9.4.2024)

Věta 3.19 (vztah Riemannova a Riemannova-Stieltjesova integrálu). *Nechť $f \in \mathcal{R}([a, b])$ a $\varphi \in \mathcal{C}^1([a, b])$. Pak $f\varphi' \in \mathcal{R}([a, b])$, $f \in \mathcal{RS}_\varphi([a, b])$ a platí*

$$(RS) \int_a^b f(x) d\varphi(x) = (R) \int_a^b f(x)\varphi'(x) dx.$$

Důkaz. Důkaz nebyl, nebude zkoušen. □

Lemma 3.20. *Nechť $f \in \mathcal{C}([a, b])$ a φ je neklesající. Označme $m := \min\{f(x) : x \in [a, b]\}$ a $M := \max\{f(x) : x \in [a, b]\}$. Pak*

$$m(\varphi(b) - \varphi(a)) \leq \int_a^b f(x) d\varphi(x) \leq M(\varphi(b) - \varphi(a)).$$

Důkaz. Důkaz byl přednesen na přednášce a bude zkoušen. □

Věta 3.21 (integrál a funkce shodné skoro všude). *Nechť $f \in \mathcal{C}([a, b])$, $\varphi \in \mathcal{C}^1([a, b])$ a $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ je funkce která je shodná s f až na konečný počet bodů. Pak $g \in \mathcal{RS}_\varphi([a, b])$ a platí*

$$\int_a^b f(x) d\varphi(x) = \int_a^b g(x) d\varphi(x).$$

Důkaz. Důkaz byl přednesen na přednášce a bude zkoušen. □

konec 16. přednášky (10.4.2024)

3.5. Aplikace určitého integrálu

Teorie integrálu se používá jako teoretický nástroj v matematice, ale také v geometrii, fyzice a v mnoha dalších vědách, kde se matematika aplikuje. Někjaké základní příklady jsou níže.

(a) Integrální kritérium konvergence řad

Nechť $n_0 \in \mathbb{N}$ a $f \in \mathcal{C}([n_0, +\infty))$ je nezáporná a nerostoucí. Pak $\int_{n_0}^{\infty} f(x) dx$ konverguje právě tehdy, když $\sum_{n=n_0}^{\infty} f(n)$ konverguje.

Příklad. Vyšetřete konvergenci řad $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \log n}$ a $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \log^2 n}$.

Řešení: první řada diverguje, druhá konverguje

(b) Obsah podgrafu spojitě funkce

Nechť $f \in \mathcal{C}([a, b])$, $f \geq 0$. Pak obsah podgrafu f je roven číslu $\int_a^b f(x) dx$. Přesněji,

$$\text{obsah} \left(\{(x, y); x \in [a, b], 0 \leq y \leq f(x)\} \right) = \int_a^b f(x) dx.$$

Příklad. Vypočítejte obsah podgrafu funkce $\sin x$, $x \in [0, \pi]$.

Řešení: 2

(c) **Obsah množiny vytvořené grafy funkcí**

Nechť $f, g \in \mathcal{C}([a, b])$. Pak obsah množiny bodů ležících mezi grafy funkcí f a g je roven číslu $\int_a^b |g(x) - f(x)| dx$. Přesněji,

$$\text{obsah} \left(\{(x, y); x \in [a, b], f(x) \leq y \leq g(x) \text{ nebo } g(x) \leq y \leq f(x)\} \right) = \int_a^b |g(x) - f(x)| dx.$$

Příklad. Vypočítejte obsah plochy ohraničené grafy funkcí $f(x) = x^2$ a $g(x) = \sqrt{x}$ pro $x \in [0, 1]$
Řešení: $\frac{1}{3}$

(d) **Délka grafu funkce**

Nechť $f \in \mathcal{C}^1([a, b])$. Pak

$$\text{délka grafu funkce } f = \int_a^b \sqrt{1 + f'(x)^2} dx.$$

Příklad. Spočítejte délku křivky $y = \arcsin x + \sqrt{1 - x^2}$, $x \in (-1, 1)$.
Řešení: 4

(e) **Změna polohy a ujetá vzdálenost**

Jestliže se bod pohybuje po přímce (např. po ose x) a značí-li $s(t)$ souřadnici bodu v čase t , je $s'(t)$ okamžitá rychlost $v(t)$ v čase t a $v'(t) = s''(t)$ okamžité zrychlení v čase t . Je-li dána závislost rychlosti na čase funkcí $v(t)$, není

$$\int_a^b v(t) dt = s(b) - s(a)$$

ujetá vzdálenost, ale změna polohy pohybujícího se bodu. Ujetá délka cesty od okamžiku $t = a$ do okamžiku $t = b$ se spočte jako

$$\int_a^b |v(t)| dt.$$

Příklad. Vypočítejte dráhu dešťové kapky za prvních 6 sekund, kde okamžitá rychlost (v metrech za sekundu) kapky je dána vzorcem $v(t) = g \cdot t$, kde $g = 9.81$.

Řešení: 176.58 metrů (176.58 = 9.81 · 18)

4. Diferenciální rovnice

Definice. *Diferenciální rovnici* rozumíme rovnici tvaru

$$F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0, \quad (4.1)$$

kde F je reálná funkce $n + 2$ proměnných. *Řád diferenciální rovnice* (4.1) je nejvyšší řád derivace funkce y vyskytující se v (4.1).

Řešením diferenciální rovnice (4.1) rozumíme funkci y definovanou na nějakém neprázdném otevřeném intervalu I , která má v každém bodě intervalu I vlastní n -tou derivaci a jejíž hodnoty spolu s hodnotami derivací splňují rovnici (4.1) v každém bodě intervalu I , tj. pro každé $x \in I$ platí

$$F(x, y(x), y'(x), y''(x), \dots, y^{(n)}(x)) = 0.$$

Definice. Je-li funkce y řešením rovnice (4.1) na intervalu I a funkce \tilde{y} řešením rovnice (4.1) na intervalu \tilde{I} , kde $I \subset \tilde{I}$, $I \neq \tilde{I}$ a $y(x) = \tilde{y}(x)$ pro všechna $x \in I$, pak říkáme, že řešení \tilde{y} je *prodloužením řešení* y na interval \tilde{I} .

Řešení rovnice (4.1), které nemá prodloužení, nazýváme *maximálním řešením* rovnice (4.1). *Obecným řešením* rozumíme množinu všech maximálních řešení. Maximálnímu řešení někdy také říkáme *partikulární řešení*.

Definice. Rovnice tvaru

$$y^{(n)} = f(x, y, y', y'', \dots, y^{(n-1)}),$$

kde f je reálná funkce $n + 1$ proměnných, se nazývá *diferenciální rovnice (n -tého řádu) vyřešená vzhledem k nejvyšší derivaci*.

4.1. Obyčejné diferenciální rovnice prvního řádu

Rovnice se separovanými proměnnými

Definice (Rovnice se separovanými proměnnými). *Diferenciální rovnice se separovanými proměnnými* je rovnice tvaru

$$y' = g(y)h(x). \quad (4.2)$$

Lemma 4.1 (Lemma o lepení řešení). *Nechť $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, $a < b$, $c < d$, nechť $h : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ a $g : (c, d) \rightarrow \mathbb{R}$ jsou spojité funkce, $x_0 \in (a, b)$ a $A \in (c, d)$. Nechť y_l je řešením diferenciální rovnice (4.2) na intervalu $(x_0 - \delta, x_0)$ pro nějaké $\delta > 0$ a y_r je řešením diferenciální rovnice (4.2) na intervalu $(x_0, x_0 + \eta)$ pro nějaké $\eta > 0$. Nechť platí*

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} y_l(x) = A = \lim_{x \rightarrow x_0^+} y_r(x).$$

Pak funkce

$$y(x) := \begin{cases} y_l(x) & x \in (x_0 - \delta, x_0) \\ A & x = x_0 \\ y_r(x) & x \in (x_0, x_0 + \eta) \end{cases}$$

je řešením rovnice (4.2) na intervalu $(x_0 - \delta, x_0 + \eta)$.

Důkaz. Důkaz byl přednesen na přednášce a bude zkoušen. □

Lemma 4.2. *Nechť $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, $a < b$, $c < d$, nechť $h : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ a $g : (c, d) \rightarrow \mathbb{R}$ jsou spojité funkce, g je nenulová, $x_0 \in (a, b)$ a $y_0 \in (c, d)$. Označme*

$$H(x) := \int_{x_0}^x h(t) dt, \quad x \in (a, b)$$

a

$$G(y) := \int_{y_0}^y \frac{1}{g(t)} dt, \quad y \in (c, d).$$

Potom existuje právě jedno maximální řešení y rovnice (4.2) splňující podmínku $y(x_0) = y_0$. Definičním intervalem I tohoto řešení je maximální interval ze všech intervalů tvaru $(x_0 - \delta, x_0 + \eta)$, které splňují $(x_0 - \delta, x_0 + \eta) \subset (a, b)$ a

$$H(x) \in G((c, d)), \quad x \in I.$$

Důkaz. Na přednášce bylo pouze dokázáno, že pokud existuje maximální řešení jehož definičním oborem je interval I jako ve znění, pak je toto řešení právě jedno a platí $y(x) = G^{-1}(H(x))$, $x \in I$. Tato část důkazu bude zkoušena, zbytek ne. \square

konec 17. přednášky (16.4.2024)

Metoda řešení pro g, h spojité na svých definičních oborech.

- (a) Určíme maximální otevřené intervaly obsažené v definičním oboru funkce h . (Tím máme vymezeny maximální intervaly, na kterých můžeme hledat řešení.)
- (b) Najdeme všechny nulové body funkce g . Je-li $g(c) = 0$, pak na každém intervalu z 1. kroku je funkce $y(x) = c$ tzv. *singulárním* (též *stacionárním*) řešením rovnice (4.2).
- (c) Určíme maximální otevřené intervaly, na kterých je funkce g nenulová.
- (d) Vezmeme interval I z 1. kroku a interval J z 3. kroku. Tedy h je na I spojitá a g je na J spojitá a nenulová. Budeme hledat řešení rovnice (4.2), jejichž definiční obor je obsažen v intervalu I a mají hodnoty v intervalu J . Je-li y takové řešení, pak pro každé $x \in D(y)$ platí

$$\frac{y'(x)}{g(y(x))} = h(x).$$

Nechť H je primitivní funkce k funkci h na intervalu I a G je primitivní funkce k funkci $1/g$ na J . Potom existuje konstanta $C \in \mathbb{R}$ taková, že platí

$$G(y(x)) = H(x) + C$$

na definičním oboru řešení y , který nalezneme v následujícím kroku.

- (e) Nyní zafixujeme C a nalezneme maximální neprázdné otevřené intervaly obsažené v množině

$$\{x \in I; H(x) + C \in G(J)\}.$$

Na každém z těchto intervalů řešení musí mít tvar

$$y(x) = G^{-1}(H(x) + C),$$

kde G^{-1} značí funkci inverzní k funkci G . Ta existuje, neboť G je na intervalu J buď rostoucí nebo klesající.

- (f) Z řešení nalezených v 5. kroku a singulárních řešení z 2. kroku „slepíme“ všechna maximální řešení rovnice (4.2) pomocí Lemmatu 4.1

Homogenní rovnice

Definice (Homogenní rovnice). *Homogenní diferenciální rovnice 1. řádu* se nazývá rovnice tvaru $y' = f(x, y)$, kde pro každé $\lambda \neq 0$ máme $f(x, y) = f(\lambda x, \lambda y)$.

konec 18. přednášky (17.4.2024)

Metoda převodu homogenní rovnice na rovnici se separovanými proměnnými.

- (a) Definujme pro $x \neq 0$ funkci $z(x) = \frac{y(x)}{x}$. Pak pro $x \neq 0$ máme

$$\begin{aligned}y(x) &= xz(x), \\y'(x) &= xz'(x) + z(x).\end{aligned}$$

Rovnice tak přechází na $xz' + z = f(x, xz) = f(1, z)$, tj.

$$z' = \frac{1}{x} (f(1, z) - z),$$

což je rovnice se separovanými proměnnými.

- (b) Vyřešíme rovnici se separovanými proměnnými na otevřených podintervalech $(-\infty, 0)$ a $(0, \infty)$. Pak položíme $y(x) = x \cdot z(x)$.
- (c) Protože jsme na začátku vyloučili případ $x = 0$, je potřeba na závěr ověřit, zda nalezená řešení můžeme prodloužit do počátku.

Lineární rovnice 1. řádu

Definice (Lineární rovnice). *Lineární diferenciální rovnici prvního řádu* rozumíme rovnici tvaru

$$y' + p(x)y = q(x), \tag{4.3}$$

kde p, q jsou funkce definované na intervalu (a, b) . Je-li $q = 0$, nazývá se rovnice *homogenní*, v opačném případě *nehomogenní*.

Metoda řešení pro p, q spojitě na svých definičních oborech.

- (a) Obecné řešení homogenní rovnice je tvořeno funkcemi

$$y(x) = Ke^{-P(x)}, \quad x \in (a, b), K \in \mathbb{R},$$

kde P je primitivní funkce k p na intervalu (a, b) .

- (b) Obecné řešení rovnice (4.3) je tvořeno funkcemi

$$y(x) = y_p(x) + Ke^{-P(x)}, \quad x \in (a, b), K \in \mathbb{R},$$

kde P je primitivní funkce k p na intervalu (a, b) a $y_p(x)$ je libovolné (tzv. "partikulární") maximální řešení rovnice (4.3).

Navíc, je-li $c(x)$ primitivní funkce k $q(x)e^{P(x)}$ na intervalu (a, b) , pak funkce $y_p(x) = c(x)e^{-P(x)}$, $x \in (a, b)$ je maximální řešení rovnice (4.3).

- (c) Maximální řešení rovnice (4.3) splňující *počáteční podmínku* $y(x_0) = y_0$ nalezneme vhodnou volbou konstanty $K \in \mathbb{R}$.

Přesněji, pokud je obecné řešení rovnice (4.3) tvaru $y(x) = y_p(x) + Ke^{-P(x)}$, pak pro volbu $K = (y_0 - y_p(x_0))e^{P(x_0)}$ dostáváme, že toto řešení vyhovuje podmínce $y(x_0) = y_0$.

Důkaz. Podrobné odvození výše popsaného návodu na řešení lineárních diferenciálních rovnic prvního řádu bylo na přednášce předvedeno a bude zkoušeno. \square

Poznámka. Pro každé $x_0 \in (a, b)$ a každé $y_0 \in \mathbb{R}$ existuje právě jedno maximální řešení rovnice (4.3), které splňuje podmínku $y(x_0) = y_0$. Toto řešení je navíc definováno na celém (a, b) .

konec 19. přednášky (23.4.2024)

4.2. Obyčejné diferenciální rovnice druhého řádu

Lineární rovnice 2. řádu

Definice (Lineární rovnice 2. řádu). *Lineární diferenciální rovnici druhého řádu* rozumíme rovnici tvaru

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = r(x), \quad (4.4)$$

kde p, q, r jsou funkce spojité na intervalu (a, b) .

Homogenní rovnici příslušnou k rovnici (4.4) rozumíme rovnici

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0. \quad (4.5)$$

Věta 4.3 (Existence řešení pro lineární rovnice 2. řádu). *Nechť $t_0 \in (a, b)$ a $z_0, z_1 \in \mathbb{R}$. Pak existuje právě jedno maximální řešení y rovnice (4.4), které splňuje podmínky $y(t_0) = z_0, y'(t_0) = z_1$. Navíc, toto řešení je definováno na celém intervalu (a, b) .*

Důkaz. Důkaz nebyl, nebude zkoušen. □

Věta 4.4 (Struktura řešení lineární rovnice 2. řádu).

(a) *Obecné řešení rovnice (4.5) tvoří vektorový podprostor prostoru $C^2((a, b))$ dimenze 2.*

(b) *Nechť y_p je partikulární řešení rovnice (4.4). Pak obecné řešení rovnice (4.4) je*

$$\{y_h + y_p; y_h \text{ je řešení rovnice (4.5) na intervalu } (a, b)\}.$$

Důkaz. Důkaz byl přednesen na přednášce a bude zkoušen. □

Poznámky.

- Báze prostoru maximálních řešení rovnice (4.5) se nazývá *fundamentální systém řešení* rovnice (4.5).
- Jsou-li funkce y_1, y_2 lineárně nezávislá maximální řešení rovnice (4.5), pak již tvoří fundamentální systém.
- Abychom vyřešili nehomogenní rovnici (4.4), najdeme fundamentální systém y_1, y_2 pro rovnici (4.5) a jedno („partikulární“) řešení y_p rovnice (4.4). Obecné řešení rovnice (4.4) pak je $\{y_p + C_1y_1 + C_2y_2; C_1, C_2 \in \mathbb{R}\}$.

Věta 4.5 (Obecné řešení homogenní rovnice). *Nechť y_1, y_2 jsou dvě řešení rovnice (4.5) na (a, b) . Pak následující tvrzení jsou ekvivalentní:*

(a) *Funkce y_1, y_2 jsou lineárně nezávislé;*

(b) *Tzv. Wronského determinant*

$$\begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix}$$

je nenulový alespoň v jednom bodě intervalu (a, b) (pak je nenulový v každém bodě (a, b)).

Důkaz. Důkaz byl přednesen na přednášce a bude zkoušen (bez části o tom, že pak je Wronského determinant nenulový v každém bodě). □

konec 20. přednášky (24.4.2024)

Věta 4.6 (variacie konstant). *Nechť funkce y_1, y_2 tvoří fundamentální systém řešení rovnice (4.5). Pokud existují funkce c_1, c_2 mající na (a, b) vlastní derivaci a splňující soustavu rovnic*

$$\begin{aligned} c_1'y_1 + c_2'y_2 &= 0 \\ c_1'y_1' + c_2'y_2' &= r \end{aligned}$$

na intervalu (a, b) , pak funkce $y_p(x) = c_1(x)y_1(x) + c_2(x)y_2(x)$, $x \in (a, b)$ je řešením rovnice (4.4).

Důkaz. Důkaz byl přednesen na přednášce a bude zkoušen. □

konec 21. přednášky (30.4.2024)

Lineární rovnice 2. řádu s konstantními koeficienty

Definice (Lineární rovnice 2. řádu s konstantními koeficienty). *Lineární diferenciální rovnici druhého řádu s konstantními koeficienty* rozumíme rovnici tvaru

$$y'' + py' + qy = r(x), \quad (4.6)$$

kde $p, q \in \mathbb{R}$ a r je funkce spojitá na intervalu (a, b) .

Homogenní rovnici příslušnou k rovnici (4.6) rozumíme rovnici

$$y'' + py' + qy = 0. \quad (4.7)$$

Poznámka. Maximální řešení rovnice (4.7) jsou definována na celém \mathbb{R} .

Definice. *Charakteristickým polynomem* rovnice (4.7) rozumíme polynom

$$\chi(\lambda) := \lambda^2 + p\lambda + q.$$

Věta 4.7 (tvar fundamentálního systému). *Nechť $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$ jsou kořeny charakteristického polynomu rovnice (4.7).*

- *Pokud jsou λ_1, λ_2 různé reálné kořeny, pak fundamentální systém řešení rovnice (4.7) tvoří funkce $y_1(x) = e^{\lambda_1 x}$ a $y_2(x) = e^{\lambda_2 x}$.*
- *Pokud $\lambda_1 = \lambda_2$, pak fundamentální systém řešení rovnice (4.7) tvoří funkce $y_1(x) = e^{\lambda_1 x}$ a $y_2(x) = xe^{\lambda_1 x}$.*
- *Pokud jsou $\lambda_1 = \alpha + \beta i, \lambda_2 = \alpha - \beta i$ různé komplexní kořeny, pak fundamentální systém řešení rovnice (4.7) tvoří funkce $y_1(x) = e^{\alpha x} \sin(\beta x)$ a $y_2(x) = e^{\alpha x} \cos(\beta x)$.*

Důkaz. Důkaz byl přednesen na přednášce a bude zkoušen. □

Věta 4.8 (speciální pravá strana). *Nechť*

$$r(x) = e^{ax} \cdot (P(x) \cos bx + Q(x) \sin bx), \quad x \in \mathbb{R},$$

kde $a, b \in \mathbb{R}$ a P, Q jsou polynomy. *Pak existuje řešení rovnice (4.6) ve tvaru*

$$y_p(x) = x^m e^{ax} (R(x) \sin bx + S(x) \cos bx), \quad x \in \mathbb{R},$$

kde R, S jsou polynomy stupně ne většího než $\max\{\text{st } P, \text{st } Q\}$ a $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ udává, jakou násobnost má číslo $a + bi$ jakožto kořen charakteristického polynomu příslušné homogenní rovnice.

Důkaz. Důkaz nebyl, nebude zkoušen. □

konec 22. přednášky (7.5.2024)

4.3. Aplikace diferenciálních rovnic prvního řádu

Příklad (Malthusův populační model). Mějme nějakou izolovanou populaci. Nechť $p(t)$ je počet jedinců této populace v čase t . Slovem izolovaná míníme, že nedochází ke stěhování mezi naší populací a vnějším světem. Takovou populací mohou být například bakterie v Petriho misce. Předpokládejme, že přírůstek populace v krátkém čase je přímo úměrný velikosti populace (tj. počet bakterií, které se rozdělí, je přímo úměrný jejich celkovému počtu). To znamená, že existuje konstanta $a > 0$ taková, že přírůstek za krátký časový úsek h , tj. $p(t+h) - p(t)$, je přibližně roven $ap(t)h$. Poněvadž $p'(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{p(t+h) - p(t)}{h}$, vede tato přibližná úvaha k diferenciální rovnici

$$p'(t) = a \cdot p(t).$$

Jedná se o homogenní lineární diferenciální rovnici, jejímž obecným řešením je $p(t) = Ke^{at}$, $t \in \mathbb{R}$ ($K \in \mathbb{R}$). Dosazením $t = 0$ vidíme, že $K = p(0)$, proto má obecné řešení tvar

$$p(t) = p(0)e^{at}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Příklad (Radioaktivní rozpad). Mějme nějakou radioaktivní látku. Nechť $M(t)$ je množství radioaktivní látky v čase t . Předpokládejme, že rychlost rozpadu libovolného radioaktivního prvku je přímo úměrná dosud nerozpadlému množství. To znamená, že existuje konstanta $a > 0$ taková, že úbytek za krátký časový úsek h , tj. $M(t+h) - M(t)$, je přibližně roven $-aM(t)h$. Pak podobně jako výše odvodíme, že funkce $t \mapsto M(t)$ by měla splňovat diferenciální rovnici

$$M'(t) = -aM(t),$$

jejíž obecné řešení má tvar

$$M(t) = M(0) \cdot e^{-at}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

K popisu radioaktivního štěpení se používá veličina poločas rozpadu $T = \frac{\log 2}{a}$, což je doba, za kterou se rozpadne polovina původního množství látky (tj. $M(T) = \frac{M(0)}{2}$).

Úloha: kolik procent původního množství radioaktivního uhlíku ^{14}C zůstane po 200 letech v zkoumaném biologickém materiálu? Poločas rozpadu radioaktivního izotopu uhlíku ^{14}C je 5730 let.

Odpověď: Po 200 letech zůstane

$$M(200) = M(0) \cdot \exp\left(-\frac{\log 2}{5730} \cdot 200\right) \approx M(0) \cdot 0.976,$$

tj. 97.6% materiálu.

Příklad (Lineární dietní model). Hmotnost člověka závisí na mnoha věcech, ale v prvním přiblížení je funkcí přísunu energie v potravinách a její „spotřeby“ (běh, učení atd.). Denní spotřeba energie je v průměru 35 kcal denně na každý kilogram váhy jedince. Předpokládejme tedy, že změna váhy $w(t)$ je přímo úměrná nedostatku/přebytku energie, tj. existuje konstanta $a > 0$, že přírůstek/úbytek váhy za krátký časový úsek h , tj. $w(t+h) - w(t)$, je přibližně roven $a \cdot (c - 35w(t)) \cdot h$, kde c je množství kalorií, které přijmu za den. Předpokládejme, že každých 7000 kcal přebytku v celkovém přísunu energie vyvolá následné zvýšení váhy o 1 kg, tj. $a = \frac{1}{7000}$. Podobně jako výše odvodíme, že funkce $t \mapsto w(t)$ by měla splňovat diferenciální rovnici

$$w'(t) = \frac{c - 35w(t)}{7000}.$$

Řešení rovnice: jedná se o lineární diferenciální rovnici. Její obecné řešení se dá popsat jako

$$w(t) = \frac{c}{35} + (w(0) - \frac{c}{35})e^{-0.005t}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

(viz. zápisky k přednášce)

Úloha: Pan Tlustý váží 100 kg a chce omezit příjem kalorií na 2625 ($= \frac{3500}{75}$, tj. na 75%). Za jak dlouho dosáhne váhy 90 kg?

Řešení úlohy: Máme $w(t) = 75 + (100 - 75)e^{-0.005t} = 75 + 25e^{-0.005t}$ (kde t jsou dny). Tedy pokud $w(t) = 90$, pak

$$\begin{aligned}90 &= 75 + 25e^{-0.005t} \\e^{0.005t} &= \frac{15}{25} \\0.005t &= \log \frac{3}{5} \\t &= 200 \log \frac{5}{3} \approx 102.\end{aligned}$$

Tedy podle našeho modelu pan Tlustý dosáhne váhy 90 kg za 102 dní.

Příklad (Logistický populační model). Ukazuje se, že Malthusův model dobře popisuje skutečnost, pokud populace není příliš velká (či přesněji příliš hustá). V hustých populacích se objevuje další faktor – konkurence. Tato skutečnost se projeví zpomalením růstu. Proto zahrneme do rovnice další člen, který bude přímo úměrný možnému počtu střetů, tj. p^2 . To vede k rovnici

$$p' = ap - bp^2,$$

kde a, b jsou kladné parametry, přičemž b bývá obvykle velmi malé vůči a .

Řešení rovnice: jedná se o diferenciální rovnici se separovanými proměnnými. Její obecné řešení se dá popsat jako $p(t) = \frac{a}{b}$, $t \in \mathbb{R}$ nebo pro každé $K \in \mathbb{R}$ je

$$p(t) = \frac{aK}{e^{-at} + bK}$$

řešením definovaným na intervalu, kde $p(t) \geq 0$ (viz. zápisky k přednášce).

Pokud je řešení definováno pro $t = 0$ pak $p(0) = \frac{aK}{1+bK}$ a tedy po úpravě dostaneme $K = \frac{p(0)}{a-bp(0)}$

a

$$p(t) = \frac{ap(0)}{(a - bp(0))e^{-at} + bp(0)}.$$

5. Funkce více proměnných

Definice. Euklidovskou metrikou (vzdáleností) na \mathbb{R}^n rozumíme funkci $\rho : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow [0, \infty)$ definovanou pro $x, y \in \mathbb{R}^n$ předpisem

$$\rho(x, y) := \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2}.$$

Číslo $\rho(x, y)$ nazýváme *vzdáleností bodu x od bodu y* .

Lemma 5.1. Definujme funkci $\rho_{\max} : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow [0, \infty)$ pro $x, y \in \mathbb{R}^n$ předpisem $\rho_{\max}(x, y) := \max\{|x_i - y_i|; i = 1, \dots, n\}$. Pak pro $x, y \in \mathbb{R}^n$ platí

$$\rho_{\max}(x, y) \leq \rho(x, y) \leq \sqrt{n} \cdot \rho_{\max}(x, y).$$

Lemma 5.2 (základní vlastnosti Euklidovské metriky). Nechť $x, y, z \in \mathbb{R}^n$ a $\lambda \in \mathbb{R}$. Pak platí:

- (a) $\rho(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$;
- (b) $\rho(\lambda x, \lambda y) = |\lambda| \rho(x, y)$;
- (c) $\rho(x, y) \leq \rho(x, z) + \rho(z, y)$;
- (d) $\rho(x + z, y + z) = \rho(x, y)$

Definice. Nechť $x \in \mathbb{R}^n$ a $R > 0$. Pak množinu

$$B(x, R) := \{y \in \mathbb{R}^n; \rho(x, y) < R\}$$

nazýváme *otevřenou koulí o středu x a poloměru R* .

Definice. Nechť $A \subset \mathbb{R}^n$. Řekneme, že $x \in \mathbb{R}^n$ je *vnitřním bodem množiny A* , jestliže existuje takové $R > 0$, že $B(x, R) \subset A$. Množina $A \subset \mathbb{R}^n$ je *otevřená*, pokud každý bod $x \in A$ je jejím vnitřním bodem. *Vnitřkem* množiny A rozumíme množinu všech vnitřních bodů množiny A a značíme jej $\text{Int } A$.

Definice. O množině $I \subset \mathbb{R}^n$ řekneme, že to je (otevřený) *interval*, pokud existují (otevřené) intervaly $I_1, \dots, I_n \subset \mathbb{R}$ takové, že $I = I_1 \times I_2 \times \dots \times I_n$.

Poznámky. (a) Z Lemmatu 5.1 plyne, že $A \subset \mathbb{R}^n$ je otevřená právě tehdy, když pro každé $x \in A$ existuje takový interval I , že $x \in I$ a $I \subset A$.

(b) Otevřená koule je otevřená množina, otevřený interval je otevřená množina.

Věta 5.3 (vlastnosti otevřených množin).

- (a) Prázdná množina a celý prostor \mathbb{R}^n jsou otevřené v \mathbb{R}^n .
- (b) Sjednocení libovolného systému otevřených množin je otevřená množina.
- (c) Průnik konečně mnoha otevřených množin je otevřená množina.

Definice. Nechť $\{x_k\}$ je posloupnost v \mathbb{R}^n a $x \in \mathbb{R}^n$. Řekneme, že $\{x_k\}$ *konverguje* k x , jestliže $\lim_{k \rightarrow \infty} \rho(x_k, x) = 0$. Značíme $x_k \rightarrow x$, nebo také $\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = x$, případně $\lim x_k = x$. Prvek x nazýváme *limitou posloupnosti $\{x_k\}$* v \mathbb{R}^n . *Konvergentní posloupnosti* rozumíme posloupnost, která má limitu v \mathbb{R}^n .

Lemma 5.4 (vlastnosti konvergence). Nechť $\{x_k\}$ je posloupnost prvků z \mathbb{R}^n a $x \in \mathbb{R}^n$. Pak platí:

- (a) $\{x_k\}$ má nejvýše jednu limitu;
- (b) $\{x_k\}$ konverguje k x právě tehdy když konverguje po složkách, tj. pro každé $i = 1, \dots, n$ platí $x_k(i) \rightarrow x(i)$.

Definice. Množina $A \subset \mathbb{R}^n$ je uzavřená, pokud platí následující implikace:

$$\{x_k\} \subset A, \quad x_k \rightarrow x, \quad x \in \mathbb{R}^n \quad \Rightarrow \quad x \in A.$$

Věta 5.5 (vztah otevřených a uzavřených množin). *Nechť $A \subset \mathbb{R}^n$. Potom A je uzavřená právě tehdy, když $\mathbb{R}^n \setminus A$ je otevřená.*

Věta 5.6 (vlastnosti uzavřených množin).

- (a) Prázdná množina a celý prostor \mathbb{R}^n jsou uzavřené v \mathbb{R}^n .
- (b) Sjednocení konečně mnoha uzavřených množin je uzavřená množina.
- (c) Průnik libovolného systému uzavřených množin je uzavřená množina.

Definice. Nechť f je funkce n proměnných a $x \in \mathbb{R}^n$. Řekneme, že f je spojitá v bodě x , jestliže platí

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall y \in B(x, \delta): |f(y) - f(x)| < \varepsilon.$$

Nechť $A \subset \mathbb{R}^n$ a $x \in A$. Řekneme, že f je spojitá v bodě x vzhledem k A , pokud platí

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall y \in B(x, \delta) \cap A: |f(y) - f(x)| < \varepsilon.$$

Řekneme, že f je spojitě na množině A , jestliže je spojitě v každém bodě $a \in A$ vzhledem k A a že f je spojitě, jestliže je spojitě na \mathbb{R}^n .

Lemma 5.7. *Pro každé $i = 1, \dots, n$ je funkce $(x_1, \dots, x_n) \mapsto x_i$ spojitá.*

Věta 5.8 (zachování spojitosti při aritmetických operacích). *Nechť $A \subset \mathbb{R}^n$, $x \in A$, $f: A \rightarrow \mathbb{R}$, $g: A \rightarrow \mathbb{R}$ a $\alpha \in \mathbb{R}$. Jestliže f a g jsou spojitě v bodě x vzhledem k A , potom také funkce αf , $f + g$ a f/g jsou spojitě vzhledem k A . Pokud navíc funkce g je nenulová v bodě x , pak je spojitá i funkce f/g v bodě x vzhledem k A .*

Věta 5.9 (složení spojitých funkcí je spojitá funkce). *Nechť $r, s \in \mathbb{N}$, $A \subset \mathbb{R}^s$, $B \subset \mathbb{R}^r$ a $y \in A$. Nechť $\varphi_1, \dots, \varphi_r$ jsou funkce definované na A , spojitě v bodě y vzhledem k A a $(\varphi_1(x), \dots, \varphi_r(x)) \in B$ pro každé $x \in A$. Nechť $f: B \rightarrow \mathbb{R}$ je spojitá v bodě $(\varphi_1(y), \dots, \varphi_r(y))$ vzhledem k B . Potom složená funkce $F: A \rightarrow \mathbb{R}$ daná předpisem*

$$F(x) := f((\varphi_1(x), \dots, \varphi_r(x))), \quad x \in A$$

je spojitá v y vzhledem k A .

Věta 5.10. *Nechť f je spojitá funkce na \mathbb{R}^n a $c \in \mathbb{R}$. Potom platí:*

- (a) Množina $\{x \in \mathbb{R}^n; f(x) > c\}$ je otevřená v \mathbb{R}^n .
- (b) Množina $\{x \in \mathbb{R}^n; f(x) < c\}$ je otevřená v \mathbb{R}^n .
- (c) Množina $\{x \in \mathbb{R}^n; f(x) \leq c\}$ je uzavřená v \mathbb{R}^n .
- (d) Množina $\{x \in \mathbb{R}^n; f(x) \geq c\}$ je uzavřená v \mathbb{R}^n .
- (e) Množina $\{x \in \mathbb{R}^n; f(x) = c\}$ je uzavřená v \mathbb{R}^n .

Definice. Řekneme, že funkce f o n proměnných má v bodě $a \in \mathbb{R}^n$ limitu rovnou $A \in \mathbb{R}^*$, jestliže platí

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in B(a, \delta) \setminus \{a\}: f(x) \in B(A, \varepsilon).$$

Poznámky. (a) Každá funkce má v daném bodě nejvýše jednu limitu, píšeme $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$.

(b) f je spojitá v a , právě když $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$.

(c) Pro limity funkcí více proměnných platí obdobné věty jako pro limity funkcí jedné proměnné (aritmetika, policajti, ...).

Definice. Necht' f je reálná funkce n proměnných, $a \in \mathbb{R}^n$ a $1 \leq i \leq n$. Pak *parciální derivaci funkce f v bodě a podle i -té proměnné* definujeme jako limitu

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(a + te^i) - f(a)}{t} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(a_1, \dots, a_{i-1}, a_i + t, a_{i+1}, \dots, a_n) - f(a_1, \dots, a_n)}{t}, \end{aligned}$$

pokud tato limita existuje vlastní. Symbolem $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ označujeme **parciální derivaci funkce f podle i -té proměnné**, tj. funkci definovanou předpisem

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} : x \mapsto \frac{\partial f}{\partial x_i}(x).$$