

CVIČENÍ 1

1. Vyšetřete bodovou a stejnoměrnou konvergenci následujících posloupností funkcí

- a) $f_n(x) = \frac{2nx}{1+n^2x^2}$ na \mathbb{R} ; b) $f_n(x) = \frac{2nx}{1+n^2x^2}$ na $[1, \infty)$; c) $f_n(x) = \frac{2nx}{n^2+x^2}$ na $[0, 1]$ a na $[1, \infty)$;
d) $f_n(x) = n \cdot (\sqrt{x+1/n} - \sqrt{x})$ na $(0, \infty)$; e) $f_n(x) = \frac{(nx+2)^2}{n^2x^2+4}$ na $[0, 2]$ a na $[2, \infty)$;
f) $f_n(x) = \sqrt[n]{x^n+3^n}$ na $[0, \infty)$; g) $f_n(x) = \exp(n(|x-1|-2))$ na $(0, 1]$ a na $[1, 3)$;

2. Necht' $f_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ a $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ jsou spojité funkce. Rozhodněte o pravdivosti následujících tvrzení (tj. podejte důkaz že tvrzení ne/platí).

(Připomeňme, že funkce $g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ je 1-Lipschitzovská, pokud pro každé $x, y \in [0, 1]$ platí $|g(x) - g(y)| \leq |x - y|$.)

- a) Pokud funkce f_n jsou 1-Lipschitzovské a $f_n(x) \rightarrow f(x)$ pro $x \in [0, 1]$, pak funkce f je 1-Lipschitzovská.
b) Pokud funkce f_n jsou 1-Lipschitzovské a $f_n(x) \rightarrow f(x)$ pro $x \in [0, 1]$, pak $f_n \rightrightarrows f$ na $[0, 1]$.
c) Platí, že $f_n \rightrightarrows f$ na $[0, 1]$, právě když $f_n \rightrightarrows f$ na (a, b) pro každé $0 < a < b < 1$.

Další užitečné zdroje příkladů:

- Ilja Černý: Inteligentní kalkulus. Online zde:

<http://matematika.cuni.cz/ikalkulus.html>

- Řešené příklady od Ondřeje Bouchaly. Online zde: (viz. cvičení k Matematické analýze 3):

<https://www2.karlin.mff.cuni.cz/~bouchala/Vyuka/>

- Příklady od Kristýny Kuncové. Online zde:

<https://www2.karlin.mff.cuni.cz/~kuncova/>

CVIČENÍ 2

1. Vyšetřete bodovou, stejnoměrnou a lokálně stejnoměrnou konvergenci následujících posloupností funkcí

a) $f_n(x) = e^{-x^2/n}$ na \mathbb{R} ; b) $f_n(x) = n^2 \left(1 - \cos\left(\frac{x}{n}\right)\right)$ na \mathbb{R} ;

c) $f_n(x) = e^{n(x-1)}$ na $(0, 1)$; d) $f_n(x) = \frac{nx}{1+n+x}$ na $(0, \infty)$; e) $f_n(x) = \frac{\log nx}{n}$ na $(0, \infty)$;

f) $f_n(x) = \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$ na $[0, \infty)$; g) $f_n(x) = \frac{n^2 - x^2}{n^2 + x^2}$ na \mathbb{R} ; h) $f_n(x) = x^n e^{-x^2/n}$ na $(-1, 1)$;

i) $f_n(x) = nx \log\left(1 + \frac{1}{nx}\right)$ na $(0, \infty)$; j) $f_n(x) = n \sin \frac{x}{n}$ na \mathbb{R} ; k) $f_n(x) = \frac{\sqrt{n}}{x} \left(2^{\frac{x^2}{\sqrt{n}}} - 1\right)$ na $(0, \infty)$;

2. Necht' jsou dány funkce $f_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ a $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$. Rozhodněte o pravdivosti následujících tvrzení (tj. podejte důkaz že tvrzení ne/platí).

a) $f_n \rightrightarrows f$ na $[0, 1]$, právě když existuje množina $E \subset [0, 1]$ míry nula splňující že $f_n \rightrightarrows f$ na $[0, 1] \setminus E$.

b) Pokud jsou funkce f_n a f spojité, pak $f_n \rightrightarrows f$ na $[0, 1]$, právě když $\int_0^1 |f_n(t) - f(t)| dt \rightarrow 0$.

c) Pokud jsou funkce f_n a f spojité, pak $f_n \rightrightarrows f$ na $[0, 1]$, právě když existuje množina $E \subset [0, 1]$ míry nula splňující že $f_n \rightrightarrows f$ na $[0, 1] \setminus E$.

CVIČENÍ 3

1. Odpovězte na otázky: Pro jaké x řada konverguje? Na jakém intervalu konverguje řada stejnoměrně nebo lokálně stejnoměrně? Na jakém intervalu je součet řady spojitá funkce?

- a) $\sum_{n=1}^{\infty} x^n$; b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{nx}{1+n^5x^2}$; c) $\sum_{n=1}^{\infty} \log(1 + \frac{x^2}{n^2})$; d) $\sum_{n=1}^{\infty} \exp(-(n + x^2))$; e) $\sum_{n=1}^{\infty} (-x^2 + 6x - 8)^n$;
 f) $\sum_{n=1}^{\infty} x^2 e^{-n^2 x^2}$; g) $\sum_{n=1}^{\infty} \log(1 + \frac{x^2 \sin^2 x}{n^2})$; h) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+n^2 x^2}$; i) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{1+n^2 x^2}$;

2. Uvažujte funkci $f(x) := \sum_{n=0}^{\infty} (3/4)^n g(4^n x)$, kde $g(x)$ je 2-periodické rozšíření funkce $|x|$ (tj. $g(x+2) = g(x)$). Dokažte, že f je spojitá funkce, která nemá v žádném bodě vlastní derivaci.

Hint: Důkaz spojitosti je standardní. Pro důkaz neexistence derivace v bodě x ukažte, že pro každé $k \in \mathbb{N}$ existuje $\delta_k \in \{\pm \frac{1}{2 \cdot 4^k}\}$ takové, že

$$|g(4^n x + 4^n \delta_k) - g(4^n x)| \begin{cases} = 0 & n > k \\ = \frac{1}{2} & k = n \\ \leq 4^n \delta_k & n < k. \end{cases} \quad (1)$$

Použijte pak pro každé $k \in \mathbb{N}$ odhad

$$\left| \frac{f(x + \delta_k) - f(x)}{\delta_k} \right| \geq \left| \sum_{n=k}^{\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^n \frac{g(4^n x + 4^n \delta_k) - g(4^n x)}{\delta_k} \right| - \sum_{n=1}^{k-1} \left(\frac{3}{4}\right)^n \frac{|g(4^n x + 4^n \delta_k) - g(4^n x)|}{\delta_k}$$

a s pomocí (1) odvoďte, že $\left| \frac{f(x+\delta_k)-f(x)}{\delta_k} \right| \rightarrow \infty$ a tedy f nemá derivaci v bodě x .

CVIČENÍ 4

1. Dokažte, že funkce f daná předpisem

$$f(x) := \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\sin(1 + \frac{x}{n})}{\sqrt{n}}, \quad x \in \mathbb{R}$$

je spojitá na \mathbb{R} a vyjádřete $f'(0)$ jako součet řady.

2. Dokažte, že pro funkci f danou předpisem

$$f(x) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|x|}{n^2 + x^2}, \quad x \in [-1, 1]$$

platí $f \in \mathcal{C}([-1, 1])$. Spočtěte $f'(\frac{1}{2})$ a $f'(0)$.

3. Dokažte, že pro funkci $f(x) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x}$, $x \in (1, \infty)$ platí $f \in \mathcal{C}^{\infty}((1, \infty))$.

4. Dokažte, že pro funkci f danou předpisem

$$f(x) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \cdot \log\left(\frac{2x-2}{n^3} + 3\right), \quad x \in (0, \infty)$$

platí $f \in \mathcal{C}((0, \infty))$. Ukažte, že tato funkce má vlastní derivaci na intervalu $[1, \infty)$ a že $\sup_{x \geq 1} |f'(x)| < \infty$.

5. Nechť funkce f je dána předpisem

$$f(x) := \sum_{n=1}^{\infty} \left(\cos\left(\frac{2x-1}{3}\pi\right) \right)^n.$$

Nalezněte definiční obor f (tj. ta x pro která je řada konvergentní). Dále dokažte, že funkce f je na intervalu $(\frac{1}{2}, 2)$ spojitá, má na tomto intervalu vlastní derivaci a najděte maximum funkce f na intervalu $[1, \frac{5}{4}]$.

6. Ať $g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$. Rozhodněte, jaké implikace platí mezi následujícími tvrzeními.

- Funkce g je spojitá skoro všude a $|g(x)| < 1$ pro každé $x \in [0, 1]$.
- Řada $\sum_{n=1}^{\infty} (g(x))^n$ je stejnoměrně konvergentní na $[0, 1]$.
- Funkce g je spojitá a $|g(x)| < 1$ pro každé $x \in [0, 1]$.

CVIČENÍ 5

1. Dokažte, že funkce f daná předpisem

$$f(x) := \sum_{n=1}^{\infty} n^2 \left(\sin\left(\frac{x}{n}\right) - \frac{x}{n} + \frac{x^3}{6n^3} \right), \quad x \in \mathbb{R}$$

je spojitá na \mathbb{R} .

2. Dokažte, že funkce f daná předpisem

$$f(x) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt[4]{n}} \operatorname{arctg} \left(2 + \frac{3x-x}{n^2} \right), \quad x \in \mathbb{R}$$

je spojitá na \mathbb{R} a vyjádřete $f'(1)$ jako součet řady.

3. Dokažte, že funkce f daná předpisem

$$f(x) := \sum_{n=1}^{\infty} \log \left(1 + \frac{2x}{x^2 + n^2} \right), \quad x \in \mathbb{R}$$

je spojitá na $[0, \infty)$.

BONUSOVÁ OTÁZKA: Je řada stejnoměrně konvergentní na $[0, \infty)$?

4. Uvažujte funkci f definovanou předpisem

$$f(x) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\operatorname{sgn}(\operatorname{tg} x))^n \sqrt{n} 3^n (\operatorname{tg} x)^{2n}}{n+1}.$$

Nalezněte definiční obor zadané funkce a dokažte, zda je tato funkce na svém definičním oboru spojitá.

5. Nalezněte poloměr konvergence následujících mocninných řad. Určete oblasti absolutní konvergence, neabsolutní konvergence a divergence.

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^7}{n+20} x^n$ b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n + (-2)^n}{n} (x+1)^n$ c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{6^n + (-2)^n}{n^2} (x-1)^n$ d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{a^n + b^n}$ ($a, b > 0$)
 e) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2} x^n$ f) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a\sqrt{n}} x^n$ ($a > 0$)

6. Najděte mocninnou řadu, která

(a) Diverguje pro $x = 0$.

(b) Konverguje pro $x = 5$, ale nikde jinde.

(c) Má střed konvergence v 0, poloměr konvergence roven 2 a konverguje pro 2, ale diverguje pro -2 .

CVIČENÍ 6

1. Nalezněte poloměr konvergence následujících mocninných řad. Určete oblasti absolutní konvergence, neabsolutní konvergence a divergence.

- a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{a^{n^2}} x^n$ ($a > 1$) b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3+(-1)^n)^n}{n} x^n$ c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1+2\cos\frac{\pi n}{4})^n}{n} x^n$ d) $\sum_{n=1}^{\infty} (\frac{a^n}{n} + \frac{b^n}{n^2}) x^n$ ($a, b > 0$)
 e) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{n!} x^n$ (Hint: na kruhu konvergence použijte Stirlingův vzorec: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \left(\frac{e}{n}\right)^n n! = \sqrt{2\pi}$) f) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} x^{n^2}$

2. Vyjádřete následující funkce jako mocninnou řadu o středu 0:

- a) e^{-x^2} b) $(1+x)\log(1+x)$ c) $\frac{1}{(1-x)^2}$ d) $\arctg x$ e) $\arctg\left(\frac{2-2x}{1+4x}\right)$

3. Sečtěte řady všude uvnitř kruhu konvergence:

- a) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{4n+5}}{n!}$ b) $\sum_{n=1}^{\infty} nx^n$ c) $\sum_{n=1}^{\infty} n^2 x^n$ d) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} n^2 x^n$ e) $\sum_{n=1}^{\infty} (n-1)(n+3)x^{2n}$

4. Řekneme, že reálná funkce f je vyjádřitelná na okolí nuly jako mocninná řada (zkráceně “je (MR)”), pokud existuje $\delta > 0$ a posloupnost $(a_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ splňující, že $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, $x \in (-\delta, \delta)$. Určete, jaké implikace platí mezi následujícími tvrzeními o reálné funkci f definované na okolí nuly a své tvrzení dokažte.

(a) f je (MR).

(b) f je (MR) a existuje $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ splňující $f^{(k)}(0) \neq 0$.

(c) Existuje $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ a g která je (MR) a $g(0) \neq 0$ tak, že na nějakém otevřeném okolí nuly platí $f(x) = x^k g(x)$.

(d) f má na okolí nuly spojité derivace všech řádů (tj. $f \in C^{\infty}((-\delta, \delta))$ pro nějaké $\delta > 0$).

CVIČENÍ 7

1. Rozviňte funkce $f(x) = \frac{1}{1-x}$, $g(x) = \frac{1}{(1-x)^2}$ v mocninné řady se středem v bodě $x_0 = -1$ a stanovte poloměr konvergence těchto řad.

2. Rozviňte funkci $\exp(x)$ v mocninnou řadu se středem v bodě $x_0 = 1$ a stanovte poloměr konvergence této řady.

3. Sečtěte řady všude na intervalu konvergence:

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n(n+1)}$ b) $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$ c) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^{2n}}{n(2n-1)}$

4. Rozviňte funkce $f(x) = \frac{1}{x-3}$, $g(x) = \frac{x}{x-3}$ v mocninné řady se středem v bodech $x_0 = 0$ a $x_0 = 1$ a stanovte poloměr konvergence těchto řad.

5. Rozviňte funkce $f(x) = \exp(x)$, $g(x) = x \exp(x)$ v mocninné řady se středem v bodě $x_0 = -17$ a stanovte poloměr konvergence těchto řad.

6. Sečtěte následující řady všude na intervalu konvergence

a) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}$ b) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{4n}}{(4n)!}$ c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2-1}{3^n n!} x^n$

7. Vyjádřete následující funkci jako mocninnou řadu o středu 0: a) $\frac{4}{(x-3)(x+1)}$

CVIČENÍ 9

1. Sečtěte řady:

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n}$ c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$ d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(n+1)}{2^n}$ e) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n^3}{3^n}$ f) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{4^n(2n+1)}$
 g) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{4n^2-1}$ h) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2n+3}{(n+1)2^n}$ i) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n^2}{2^n n!}$

2. Sečtěte řady všude na intervalu konvergence:

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n!} x^{n+2}$ b) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{3n+1}{2n^2+n} x^{2n+1}$ c) $\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{n-1}{n!} x^n$

3. Určete, zda mají následující funkce f konečnou variaci na $[0, 1]$

a) $f(x) = \sqrt{x}$ b) $f(x) = \begin{cases} 1 & x \in [0, 1] \cap \mathbb{Q} \\ 0 & x \in [0, 1] \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$ c) $f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x} & x \in (0, 1] \\ 0 & x = 0 \end{cases}$ d) $f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x^2} & x \in (0, 1] \\ 0 & x = 0 \end{cases}$
 e) $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{1-x} & x \in [0, 1) \\ 0 & x = 1 \end{cases}$

Výsledky:

1. a) $-\log 2$ b) 2 c) $\frac{\pi}{4} - 1$ d) 8 e) $\frac{3}{128}$ f) $2 \operatorname{arctg}(1/2) - 1$ g) $\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}$ h) $-2 \log(\frac{2}{3}) - \frac{5}{3}$ i) $-\frac{1}{4\sqrt{e}}$
 2. a) $e^x(x^4 + x^3)$, $x \in \mathbb{R}$ b) $-x + \arctan x - x \log(1 + x^2)$, $x \in [-1, 1]$ c) $(1 + x)e^{-x} - 1$, $x \in \mathbb{R}$

1. Určete, jaké implikace platí mezi následujícími tvrzeními o funkci $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$.

- (a) f má konečnou variaci na $[0, 1]$,
- (b) $|f|$ má konečnou variaci na $[0, 1]$,
- (c) f je omezená.

2. Určete, které z následujících funkcí $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ mají konečnou variaci, které jsou absolutně spojité a které jsou Lipchitzovské.

a) $f(x) = x$ b) $f(x) = x^2$ c) $f(x) = \sqrt{x}$ d) $f(x) = \begin{cases} 1 & x \in [0, \frac{1}{2}] \\ 0 & x \in (\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$ e) $f(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x} & x \in (0, 1] \\ 0 & x = 0 \end{cases}$

3. Určete, jaké implikace platí mezi následujícími tvrzeními o funkci $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$.

- (a) f je absolutně spojitá na $[0, 1]$,
- (b) $|f|$ je absolutně spojitá na $[0, 1]$,
- (c) f má omezenou derivaci na $[0, 1]$.

4. Ukažte, že

1. $BV([0, 1])$ je vektorový podprostor prostoru $\ell_\infty([0, 1]) = \{f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R} : f \text{ je omezená}\}$,
2. předpis $\|f\|_{BV} := \|f\|_\infty + V(f)$ definuje normu na $BV([0, 1])$,
3. Je-li ρ metrika na $BV([0, 1])$ generovaná normou $\|\cdot\|_{BV}$, pak $(BV([0, 1]), \rho)$ je úplný metrický prostor.
Hint: můžete použít, že $(\ell_\infty([0, 1]), \|\cdot\|_\infty)$ je úplný

5. Ukažte, že

1. $AC([0, 1])$ je vektorový podprostor prostoru $BV([0, 1])$,
2. předpis $\|f\|_{AC} := \|f\|_\infty + \|f'\|_{L_1}$ definuje normu na $AC([0, 1])$,
3. je-li ρ metrika na $AC([0, 1])$ generovaná normou $\|\cdot\|_{AC}$, pak $(AC([0, 1]), \rho)$ je úplný metrický prostor,
Hint: použijte úplnost prostoru L_1 , Newton-Leibnitzovu formuli pro absolutně spojitě funkce a záměnu limity a integrálu
4. pro $f \in AC([0, 1])$ platí $\|f\|_{AC} = \|f\|_{BV}$.
Hint: je třeba ukázat, že $V(f) = \|f'\|_{L_1}$. Pro důkaz nerovnosti \leq použijte definici variace a Newton-Leibnitzovu formuli pro absolutně spojitě funkce. Pro důkaz nerovnosti \geq postupujte takto: Nechť $F(t) = V(f; 0, t)$ je variace f na $[0, t]$. Pak F je neklesající, $|f(s) - f(t)| \leq F(s) - F(t)$ pro $0 \leq t \leq s \leq 1$. Tedy $|f'| \leq F'$ skoro všude na $[0, 1]$. Odtud odvoďte, že $\|f'\|_{L_1} \leq F(1) - F(0) = V(f)$.

1. Sestavte Fourierovu řadu k 2π -periodickému prodloužení následujících funkcí

a) $f(x) = e^x, x \in (-\pi, \pi]$ b) $f(x) = x, x \in [-\pi, \pi)$ c) $f(x) = x^2, x \in [0, 2\pi)$

d) $f(x) = \sin^4 x, x \in [0, 2\pi)$ (Hint: vyjádřete funkci jako trigonometrickou řadu, nemusíte pak počítat žádný integrál)

e) $f(x) = \begin{cases} 0 & x \in [-\pi, -\frac{\pi}{6}] \cup [\frac{\pi}{6}, \pi] \\ \cos(3x) & x \in (-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}) \end{cases}$ f) $f(x) = \operatorname{sgn}(x), x \in (-\pi, \pi]$ g) $f(x) = \begin{cases} -x & x \in [-\pi, 0), \\ x & x \in [0, \pi) \end{cases}$

h) $f(x) = \operatorname{sgn}(x) + \sin^2 x, x \in [-\pi, \pi)$

2. Které koeficienty Fourierovy řady funkce $f \in \mathcal{P}_{2\pi}$ jsou nulové, jestliže platí

(a) $f(x + \pi) = -f(x)$

(b) $f(x + \pi) = f(x)$

(c) $f(-x) = f(x)$ a $f(x + \pi) = -f(x)$

—————VÝSLEDKY—————

1. a) b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(-1)^{n+1}}{n} \sin(nx)$ c) $\frac{4\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} (\frac{4}{n^2} \cos(nx) - \frac{4\pi}{n} \sin(nx))$ d) $\frac{3}{8} - \frac{1}{2} \cos(2x) + \frac{1}{8} \cos(4x)$

e) $\frac{1}{3\pi} + \frac{1}{6} \cos(3x) + \sum_{n=1, n \neq 3}^{\infty} \frac{6 \cos(n\pi/6)}{(9-n^2)\pi} \cos(nx)$ f) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{\pi(2n-1)} \sin((2n-1)x)$

g) $\frac{\pi}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-4}{\pi(2n-1)^2} \cos((2n-1)x)$ h) $\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos(2x) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{\pi(2n-1)} \sin((2n-1)x)$

1. Uvažujte 2π -periodické prodloužení následujících funkcí a rozhodněte zda příslušná Fourierova řada konverguje bodově/lokálně stejnoměrně/stejně na \mathbb{R} a určete její součet.

- a) $f(x) = e^x, x \in (-\pi, \pi]$ b) $f(x) = \sin^4 x, x \in [0, 2\pi)$ c) $f(x) = x^2, x \in [0, 2\pi)$ d) $f(x) = \operatorname{sgn}(x), x \in (-\pi, \pi]$
 e) $f(x) = \begin{cases} -x & x \in [-\pi, 0), \\ x & x \in [0, \pi) \end{cases}$, f) $f(x) = \begin{cases} 0 & x \in [-\pi, -\frac{\pi}{6}] \cup [\frac{\pi}{6}, \pi] \\ \cos(3x) & x \in (-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}) \end{cases}$ g) $f(x) = \operatorname{sgn}(x) + \sin^2 x, x \in [-\pi, \pi)$

2. Rozviňte následující funkce do sinové/kosinové Fourierovy řady. Nalezněte intervaly, kde řada konverguje (bodově/stejně/lokálně stejnoměrně) a určete její součet. Určete pak součet číselných řad, pokud je v zadání číselná řada uvedena.

- a) x^2 na $(0, \pi)$ do sinové řady b) $\operatorname{sgn}(\sin(3x))$ na $[0, \pi)$ do cosinové řady. Určete součet $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(3k+1)(3k+2)}$
 c) $\cos(ax)$ pro $a > 0$ na $[0, \pi)$ do sinové řady

3. Uvažujme funkci

$$f(x) = \begin{cases} x & x \in [0, \frac{1}{3}] \\ 0 & x \in (\frac{1}{3}, \pi] \end{cases}$$

Rozviňte ji v cosinovou Fourierovu řadu, tj. nalezněte koeficienty $a_k, k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ takové, že platí

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(kx), \quad x \in (0, \pi) \setminus \{\frac{1}{3}\}.$$

(nejprve nalezněte příslušné koeficienty a pak s pomocí vět z přednášky dokažte, že splňují žádanou rovnost)

4. Uvažujme funkci

$$f(x) = \begin{cases} x & x \in [-\pi, \pi) \setminus \mathbb{Q} \\ 0 & x \in [-\pi, \pi) \cap \mathbb{Q} \end{cases}$$

2π -periodicky dodefinovanou na \mathbb{R} . Nalezněte Fourierovu řadu této funkce a určete součet Fourierovy řady na \mathbb{R} .

5. Sečtěte $\sum_{n=1}^{\infty} q^n \sin(nx)$ pro $q \in (-1, 1)$. Je tato řada Fourierovou řadou svého součtu?

(Hint: použijte komplexní čísla, tj. $\sin(nx) = \operatorname{Im}(e^{inx})$)

—————VÝSLEDKY—————

Výsledky týkající se konvergence jsou uvedeny na uzavřených intervalech délky 2π .

1. a) $s^f(x) = \begin{cases} f(x) & x \in (-\pi, \pi) \\ \frac{e^\pi + e^{-\pi}}{2} & x \in \{\pm\pi\} \end{cases}$, konvergence je lokálně stejnoměrná na $(-\pi, \pi)$ b) $s^f(x) = f(x)$, konvergence

- je stejnoměrná na $[0, 2\pi]$ c) $s^f(x) = \begin{cases} f(x) & x \in (0, 2\pi) \\ 2\pi^2 & x \in \{0, 2\pi\} \end{cases}$, konvergence je lokálně stejnoměrná na $(0, 2\pi)$ d) $s^f(x) =$

- $\begin{cases} f(x) & x \in (-\pi, \pi) \\ 0 & x \in \{\pm\pi\} \end{cases}$, konvergence je lokálně stejnoměrná na $(-\pi, 0)$ a na $(0, \pi)$ e) $s^f(x) = f(x)$, konvergence je stej-

- noměrná na $[-\pi, \pi]$ f) $s^f(x) = f(x)$, konvergence je stejnoměrná na $[-\pi, \pi]$ g) $s^f(x) = \begin{cases} f(x) & x \in (-\pi, \pi) \\ 0 & x \in \{\pm\pi\} \end{cases}$,

konvergence je lokálně stejnoměrná na $(-\pi, 0)$ a na $(0, \pi)$

2. a) $s^f(x) = \begin{cases} \operatorname{sgn}(x)f(x) & x \in (-\pi, \pi) \\ 0 & x \in \{\pm\pi\} \end{cases}$, konvergence je lokálně stejnoměrná na $(-\pi, \pi)$, $s^f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{2\pi}{k}(-1)^{k+1} +$

$$\frac{4}{\pi k^3}((-1)^k - 1) \sin(kx) \quad \text{b) } s^f(x) = \begin{cases} f(|x|) & x \in (-\pi, 0) \cup (0, \pi) \\ 1 & x \in \{\pm\pi, 0\} \end{cases}, \text{ konvergence je lokálně stejnoměrná na } (0, \frac{\pi}{3}) + k\frac{\pi}{3},$$

$$s^f(x) = \frac{1}{3} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{4\sqrt{3}}{\pi} \left(\frac{\cos((6k+2)x)}{6k+2} - \frac{\cos((6k+4)x)}{6k+4} \right), \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(3k+1)(3k+2)} = \frac{\pi}{3\sqrt{3}}$$

$$\text{c) } s^f(x) = \begin{cases} \operatorname{sgn}(x) \cos(ax) & x \in [-\pi, 0) \cup (0, \pi] \\ 0 & x = 0 \end{cases}, \text{ konvergence je lokálně stejnoměrná na } [-\pi, 0) \text{ a na } (0, \pi], s^f(x) =$$

$$\sum_{k=1, k \neq a}^{\infty} \frac{2k}{\pi(k^2 - a^2)} (1 - (-1)^k \cos(a\pi)) \sin(kx)$$

$$\mathbf{3.} \quad a_0 = \frac{1}{9\pi}, \quad a_k = \frac{2}{\pi} \left(\frac{\sin(k/3)}{3k} + \frac{\cos(k/3)}{k^2} - \frac{1}{k^2} \right) \quad \mathbf{4.} \quad s^f(x) = \begin{cases} x & x \in [-\pi, \pi) \\ 0 & x = \pi \end{cases}, \quad s^f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{k} (-1)^{k+1} \sin(kx)$$

$$\mathbf{5.} \quad \text{ano, řada je Fourierovou řadou svého součtu; součet je roven } \frac{q \sin x}{1 + q^2 - 2q \cos x}$$

CVIČENÍ 13

1. S pomocí Parsevalovy rovnosti odvoďte z rozvoje funkce $f(x)$ do Fourierovy řady na $[-\pi, \pi]$, čemu je roven součet řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

a) $f(x) = x^2$, $a_n = \frac{1}{n^4}$

b) $f(x) = \begin{cases} \sin 2x, & x \in (-\pi/2, \pi/2), \\ 0, & x \in [-\pi, -\pi/2] \cup [\pi/2, \pi], \end{cases}$ $a_n = \left(\frac{4}{\pi((2n-1)^2-4)} \right)^2$

(Hint: můžete použít vzorce $\sin x \sin y = \frac{1}{2} \cos(x-y) - \frac{1}{2} \cos(x+y)$ a $\sin(\pi+x) = -\sin(x)$)

c) f je sudá a na intervalu $[0, \pi]$ je definována předpisem $f(x) = \frac{\pi}{2} - |x - \frac{\pi}{2}|$, $x \in [0, \pi)$, $a_n = \left(\frac{4}{(4n+2)^2} \right)^2$

2. Nalezněte spočetnou hustou podmnožinu metrického prostoru $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

3. Na množině \mathbb{R} nalezněte 4 metriky d_1, d_2, d_3, d_4 takové, že (\mathbb{R}, d_i) není homeomorfní (\mathbb{R}, d_j) pro $i \neq j$.

4. Nalezněte metrický prostor M a klesající posloupnost neprázdných uzavřených množin $F_1 \supset F_2 \supset \dots$ takovou, že $\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n = \emptyset$.

5. Na \mathbb{R} uvažujte metriku ρ danou předpisem $\rho(x, x) = 0$ pro $x \in \mathbb{R}$, $\rho(x, 0) = \frac{1}{|x|}$ pro $x \neq 0$, $\rho(0, y) = \frac{1}{|y|}$ pro $y \neq 0$ a $\rho(x, y) = \frac{1}{|x|} + \frac{1}{|y|}$ pokud $xy \neq 0$. Zjistěte, zda (\mathbb{R}, ρ) je úplný a zda je kompaktní. Najděte všechny otevřené podmnožiny a všechny kompaktní podmnožiny. Jsou jednobodové množiny otevřené?

6. Ukažte, že c_0 je separabilní Banachův prostor, jehož jednotková koule není totálně omezená.

—————VÝSLEDKY—————

1. a) $\frac{\pi^4}{90}$ b) $-\frac{1}{2}$ c) $(\frac{\pi^2}{6} - \frac{4}{\pi^2} - \frac{\pi}{4})\frac{\pi^2}{4}$