I. Banachovy a Hilbertovy prostory

1. Základní vlastnosti

$\mathbb{K}$ je $\mathbb{R}$ nebo $\mathbb{C}$

Definice 1. Nechť X je vektorový prostor nad $\mathbb{K}$. Funkci $\|\cdot\|\colon X \to [0,\infty)$ nazýváme *normou* na X, pokud

(i) $\|x\| = 0$ právě tehdy, když $x = 0$,

(ii) $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$ pro všechna $x, y \in X$,

(iii) $\|\alpha x\| = |\alpha| \cdot \|x\|$ pro všechna $x \in X$ a $\alpha \in \mathbb{K}$.

Dvojici $(X, \|\cdot\|)$ nazýváme *normovaným lineárním prostorem*.

Tvrzení 2. *Nechť $(X, \|\cdot\|)$ je normovaný lineární prostor nad $\mathbb{K}$.*

(a) Funkce $\rho(x,y) = \|x-y\|$ pro $x, y \in X$ je translačně invariantní metrika na X.

(b) Norma je 1-lipschitzovská (a tedy spojitá) funkce na X.

(c) Zobrazení $+\colon X \times X \to X$ a $\cdot\colon \mathbb{K} \times X \to X$ jsou spojitá.

- Uzavřenou kouli o středu $x \in X$ a poloměru $r > 0$ budeme značit $B_X(x,r)$, tj. $B_X(x,r) = \{y \in X;\ \|x-y\| \leq r\}$.
- Otevřenou kouli o středu $x \in X$ a poloměru $r > 0$ budeme značit $U_X(x,r)$, tj. $U_X(x,r) = \{y \in X;\ \|x-y\| < r\}$.
- Množina $B_X = B_X(0,1)$ se nazývá jednotková koule v X.
- Množina $U_X = U_X(0,1)$ se nazývá otevřená jednotková koule v X.
- Množina $S_X = \{x \in X;\ \|x\| = 1\}$ se nazývá jednotková sféra.

Definice 3. *Banachův prostor* je normovaný lineární prostor, který je úplný v metrice dané normou.

Tvrzení 4. *Nechť X je normovaný lineární prostor a Y jeho podprostor.*

(a) Je-li Y Banachův, pak Y je uzavřený v X.

(b) Je-li X Banachův, pak Y je Banachův, právě když Y je uzavřený v X.

Příklad 5. Na přednášce byly dále zmíněny tyto příklady Banachových prostorů ($p \in [1,\infty]$):

$$(\mathbb{K}, \|\cdot\|_p);\ L_p(\Omega, \mathcal{A}, \mu; \mathbb{K});\ \ell_p(I);\ C(K);\ c;\ c_0$$

Konec 1. přednášky

Příklad 6. Další příklady Banachových prostorů:

$$c_{00};\ c_0(I);\ (\text{ a ještě orientačně: } C^1([0,1]); \mathcal{M}(K))$$

Definice 7 (ekvivalentní normy)**.** Nechť X je vektorový prostor a $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ jsou normy na X. Řekneme, že normy $\|\cdot\|_1$ a $\|\cdot\|_2$ jsou *ekvivalentní*, pokud existují $A, B > 0$ takové, že pro každé $x \in X$ platí $A\|x\|_2 \leq \|x\|_1 \leq B\|x\|_2$.

Věta 8. *Na konečněrozměrném vektorovém prostoru jsou všechny normy ekvivalentní.*

Lemma 9. *Nechť X je vektorový prostor, $\|\cdot\|_1$ a $\|\cdot\|_2$ jsou normy na X, $B_1 = B_{(X,\|\cdot\|_1)}$, $B_2 = B_{(X,\|\cdot\|_2)}$ a $a, b > 0$. Pak $a\|x\|_2 \leq \|x\|_1 \leq b\|x\|_2$ pro každé $x \in X$, právě když $aB_1 \subset B_2 \subset bB_1$. Speciálně, $\|\cdot\|_1 = \|\cdot\|_2$ právě tehdy, když $B_1 = B_2$.*

Tvrzení 10. *Nechť X je vektorový prostor, $\|\cdot\|_1$ a $\|\cdot\|_2$ jsou normy na X a $B_1 = B_{(X,\|\cdot\|_1)}$, $B_2 = B_{(X,\|\cdot\|_2)}$. Následující tvrzení jsou ekvivalentní:*

(i) Normy $\|\cdot\|_1$ a $\|\cdot\|_2$ jsou ekvivalentní.

(ii) Existují $a, b > 0$ taková, že $aB_1 \subset B_2 \subset bB_1$.

(iii) Zobrazení $Id\colon (X, \|\cdot\|_1) \to (X, \|\cdot\|_2)$ je homeomorfismus.

(iv) Otevřené množiny v $(X, \|\cdot\|_1)$ splývají s otevřenými množinami v $(X, \|\cdot\|_2)$.

(v) $\|x_n - x\|_1 \to 0$, právě když $\|x_n - x\|_2 \to 0$ pro $\{x_n\} \subset X$, $x \in X$.

Definice 11. Nechť X je vektorový prostor. Řekneme, že množina $M \subset X$ je *konvexní*, pokud pro každé $x, y \in M$ a $\lambda \in [0, 1]$ platí, že $\lambda x + (1 - \lambda)y \in M$.

Nechť $x_1, \dots, x_n \in X$. Řekneme, že $x \in X$ je *konvexní kombinací* vektorů $x_1, \dots, x_n$ s koeficienty $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$, jestliže $x = \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i$ a platí, že $\lambda_1, \dots, \lambda_n \geq 0$ a $\sum_{i=1}^n \lambda_i = 1$.

Fakt 12. *Koule v normovaném lineárním prostoru jsou konvexní množiny.*

Definice 13. Nechť X je vektorový prostor a $M \subset X$. *Konvexním obalem* M nazveme množinu $\operatorname{conv} M = \bigcap\{C \supset M;\ C \subset X \text{ je konvexní}\}$.

Tvrzení 14. *Nechť X je vektorový prostor a $M \subset X$. Pak*

$$\operatorname{conv} M = \left\{ \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i;\ x_1, \dots, x_n \in M, \lambda_1, \dots, \lambda_n \geq 0, \sum_{i=1}^n \lambda_i = 1, n \in \mathbb{N} \right\}.$$

Definice 15. Nechť X je vektorový prostor. Řekneme, že množina $M \subset X$ je symetrická, pokud $-M = M$.

Fakt 16. *Nechť M je symetrická konvexní podmnožina normovaného lineárního prostoru X, která obsahuje $U(x, r)$, resp. $B(x, r)$ pro nějaké $x \in X$. Pak $U(0, r) \subset M$, resp. $B(0, r) \subset M$.*

Definice 17. Nechť X je normovaný lineární prostor a $M \subset X$. Pak definujeme *uzavřený lineární obal* M jako $\overline{\operatorname{span}}\, M = \bigcap\{Y \supset M;\ Y \text{ uzavřený podprostor } X\}$ a *uzavřený konvexní obal* M jako $\overline{\operatorname{conv}}\, M = \bigcap\{C \supset M;\ C \subset X \text{ je uzavřená konvexní}\}$.

Fakt 18. *Nechť X je normovaný lineární prostor, Y je podprostor X a $C \subset X$ je konvexní. Pak $\overline{Y}$ je podprostor X a $\overline{C}$ je konvexní množina.*

Tvrzení 19. *Nechť X je normovaný lineární prostor a $M \subset X$. Pak $\overline{\operatorname{span}}\, M = \overline{\operatorname{span} M}$ a $\overline{\operatorname{conv}}\, M = \overline{\operatorname{conv} M}$.*

Důkazy Faktu 18 a Tvrzení 19 ponechány jako snadné cvičení.

Věta 20. *Nechť X je normovaný lineární prostor, $Y \subset X$ uzavřený podprostor a $Z \subset X$ konečněrozměrný podprostor. Pak $\operatorname{span}(Y \cup Z)$ je uzavřený.*

Důsledek 21. *Nechť X je normovaný lineární prostor. Každý konečněrozměrný podprostor X je uzavřený v X.*

Konec 2. přednášky

2. Řady v normovaných lineárních prostorech

Definice 22. Nechť $\{x_n\} \subset X$. Řekneme, že řada $\sum_{n=1}^\infty x_n$ *konverguje* k $x \in X$, pokud $x = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^N x_n$. Řada $\sum_{n=1}^\infty x_n$ je konvergentní, pokud existuje $x \in X$ tak, že $x = \sum_{n=1}^\infty x_n$. Řada je *absolutně konvergentní*, pokud $\sum_{n=1}^\infty \|x_n\| < +\infty$.

Fakt 23. *Nechť X je normovaný lineární prostor a $\sum_{n=1}^\infty x_n$ je konvergentní řada v X. Pak*

$$\left\| \sum_{n=1}^\infty x_n \right\| \leq \sum_{n=1}^\infty \|x_n\|.$$

Věta 24 (Test úplnosti)**.** *Nechť X je normovaný lineární prostor. Pak X je Banachův, právě když každá absolutně konvergentní řada je konvergentní.*

Definice 25. Nechť X je normovaný lineární prostor, Γ je množina a $\{x_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$ je kolekce prvků prostoru X. Symbol $\sum_{\gamma\in\Gamma} x_\gamma$ nazveme *zobecněnou řadou*. Dále $\mathcal{F}(\Gamma)$ značí systém všech konečných podmnožin Γ. Řekneme, že zobecněná řada $\sum_{\gamma\in\Gamma} x_\gamma$ konverguje (též konverguje bezpodmínečně) k $x \in X$ pokud platí

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists F \in \mathcal{F}(\Gamma) \quad \forall F' \in \mathcal{F}(\Gamma), F' \supset F\colon \left\| x - \sum_{\gamma\in F'} x_\gamma \right\| < \varepsilon.$$

Existuje-li takové $x \in X$, říkáme, že je zobecněná řada $\sum_{\gamma\in\Gamma} x_\gamma$ (bezpodmínečně) konvergentní a x nazýváme jejím součtem. Konverguje-li zobecněná řada reálných čísel $\sum_{\gamma\in\Gamma} \|x_\gamma\|$, pak se zobecněná řada $\sum_{\gamma\in\Gamma} x_\gamma$ nazývá absolutně konvergentní. Pro $\Gamma = \emptyset$ klademe $\sum_{\gamma\in\Gamma} x_\gamma = 0$.

Definice 26. Řekneme, že zobecněná řada $\sum_{\gamma\in\Gamma} x_\gamma$ v normovaném lineárním prostoru splňuje *Bolzanovu-Cauchyovu podmínku*, pokud

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists F \in \mathcal{F}(\Gamma) \quad \forall F' \in \mathcal{F}(\Gamma), F' \cap F = \emptyset\colon \left\| \sum_{\gamma\in F'} x_\gamma \right\| < \varepsilon.$$

Věta 27 (Nutná podmínka konvergence)**.** *Nechť $\sum_{\gamma\in\Gamma} x_\gamma$ je konvergentní zobecněná řada v normovaném lineárním prostoru X. Pak je její součet je určen jednoznačně a $\big(\|x_\gamma\|\big)_{\gamma\in\Gamma} \in c_0(\Gamma)$.*

Věta 28. *Nechť X je Banachův prostor.*

(a) Zobecněná řada v X je konvergentní právě tehdy, když splňuje Bolzanovu-Cauchyovu podmínku.

(b) Každá absolutně konvergentní zobecněná řada v X je konvergentní.

(c) Je-li zobecněná řada $\sum_{\gamma\in\Gamma} x_\gamma$ v X konvergentní a $\Lambda \subset \Gamma$, pak je i zobecněná řada $\sum_{\gamma\in\Lambda} x_\gamma$ konvergentní.

Tvrzení 29. *Nechť $\sum_{\gamma\in\Gamma} a_\gamma$ je zobecněná řada nezáporných čísel. Pak tato řada konverguje, právě když*

$$\sup\bigg\{\sum_{\gamma\in F} a_\gamma;\ F \in \mathcal{F}(\Gamma)\bigg\} < +\infty.$$

Potom platí

$$\sum_{\gamma\in\Gamma} a_\gamma = \sup\bigg\{\sum_{\gamma\in F} a_\gamma;\ F \in \mathcal{F}(\Gamma)\bigg\}.$$

Konec 3. přednášky

Tvrzení 30. *Nechť X je normovaný lineární prostor a $\{x_n\} \subset X$. Pak zobecněná řada $\sum_{n\in\mathbb{N}} x_n$ je absolutně konvergentní, právě když řada $\sum_{n=1}^\infty x_n$ je absolutně konvergentní.*

Definice 31. Nechť $\{x_n\}$ je posloupnost v normovaném lineárním prostoru X a $x \in X$. Řekneme, že $\sum_{n=1}^\infty x_n$ *konverguje bezpodmínečně* (k x), pokud konverguje zobecněná řada $\sum_{n\in\mathbb{N}} x_n$ (k x).

Věta 32. *Nechť $\{x_n\}$ je posloupnost v Banachově prostoru X. Pak následující tvrzení jsou ekvivalentní:*

(i) $\sum_{n=1}^\infty x_n$ konverguje bezpodmínečně.

(ii) $\sum_{n=1}^\infty x_{\pi(n)}$ konverguje pro každou permutaci $\pi\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ ke stejnému součtu.

(iii) $\sum_{n=1}^\infty x_{\pi(n)}$ konverguje pro každou permutaci $\pi\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$.

Věta 33. *Každá absolutně konvergentní řada v Banachově prostoru je bezpodmínečně konvergentní.*
Každá řada v $\mathbb{R}$ je absolutně konvergentní, právě když je bezpodmínečně konvergentní.

3. Lineární operátory a funkcionály

Připomeňme si, že zobrazení $T\colon X \to Y$ mezi vektorovými prostory X, Y nad $\mathbb{K}$ se nazývá *lineární*, pokud $T(x+y) = T(x) + T(y)$ a $T(\alpha x) = \alpha T(x)$ pro všechna $x, y \in X$ a $\alpha \in \mathbb{K}$.

Fakt 34. *Nechť X, Y jsou vektorové prostory, $T\colon X \to Y$ je lineární zobrazení a $M \subset X$. Pak $T(-M) = -T(M)$ a $T(\operatorname{conv} M) = \operatorname{conv} T(M)$. Speciálně, je-li M symetrická, pak $T(M)$ je symetrická, a je-li M konvexní, pak $T(M)$ je konvexní.*

Tvrzení 35. *Nechť X, Y jsou normované lineární prostory a $T\colon X \to Y$ je lineární zobrazení. Pak následující tvrzení jsou ekvivalentní:*

(i) T je spojité.

(ii) T je spojité v jednom bodě.

(iii) T je spojité v 0.

(iv) Existuje $C \geq 0$ tak, že $\|T(x)\| \leq C\|x\|$ pro každé $x \in X$.

(v) T je lipschitzovské.

(vi) T je stejnoměrně spojité.

(vii) $T(A)$ je omezená pro každou omezenou $A \subset X$.

(viii) $T(B_X)$ je omezená.

(ix) $T\big(U(0,\delta)\big)$ je omezená pro nějaké $\delta > 0$.

Prostor $\mathcal{L}(X,Y)$ s normou

$$\|T\| = \sup_{x\in B_X} \|T(x)\|.$$

je normovaný lineární prostor.

Lemma 36. *Nechť X, Y jsou normované lineární prostory a $T \in \mathcal{L}(X,Y)$.*

(a) $\|T(x)\| \le \|T\|\|x\|$ pro každé $x \in X$.

(b) $\|T\| = \sup_{x\in S_X} \|T(x)\| = \sup_{x\in X\setminus\{0\}} \frac{\|T(x)\|}{\|x\|} = \sup_{x\in U_X} \|T(x)\|$.

(c) $\|T\| = \inf\{C \ge 0;\ \|T(x)\| \le C\|x\|$ pro každé $x \in X\}$.

Konec 4. přednášky

Fakt 37. *Nechť X, Y jsou normované lineární prostory a $\{T_n\} \subset \mathcal{L}(X,Y)$ je posloupnost operátorů konvergujících k $T \in \mathcal{L}(X,Y)$ v prostoru $\mathcal{L}(X,Y)$. Pak $\{T_n\}$ konverguje k T bodově, tj. pro každé $x \in X$ platí $T_n(x) \to T(x)$ v prostoru Y.*

Fakt 38. *Nechť X, Y, Z jsou normované lineární prostory, $S \in \mathcal{L}(X,Y)$ a $T \in \mathcal{L}(Y,Z)$. Pak $\|T \circ S\| \le \|T\|\|S\|$.*

Věta 39. *Nechť X je normovaný lineární prostor a Y je Banachův prostor. Pak $\mathcal{L}(X,Y)$ je Banachův prostor.*

Definice 40. Nechť X je normovaný lineární prostor nad $\mathbb{K}$. Prostor $\mathcal{L}(X,\mathbb{K})$ značíme X^* a nazýváme jej *duálním prostorem* k prostoru X.

Věta 41. *Je-li X normovaný lineární prostor, je prostor X^* úplný.*

Definice 42. Nechť X, Y jsou normované lineární prostory a $T \in \mathcal{L}(X,Y)$. Říkáme, že T je

- *izomorfismus* X na Y (nebo jen izomorfismus), pokud T je bijekce X na Y a inverzní operátor T^{-1} je spojitý;
- izomorfismus X do Y (nebo jen *izomorfismus do*), pokud T je izomorfismus X na $\operatorname{Rng} T$;
- *izometrie* X na Y (nebo jen izometrie), pokud T je na a $\|T(x) - T(y)\| = \|x - y\|$ pro všechna $x, y \in X$;
- izometrie X do Y (nebo jen *izometrie do*), pokud $\|T(x) - T(y)\| = \|x - y\|$ pro všechna $x, y \in X$.

Říkáme, že prostory X a Y jsou

- *izomorfní*, pokud existuje lineární izomorfismus X na Y;
- *izometrické*, pokud existuje lineární izometrie X na Y.

Říkáme, že prostor X je

- *izomorfně vnořen* do Y, pokud existuje lineární izomorfismus X do Y;
- *izometricky vnořen* do Y, pokud existuje lineární izometrie X do Y.

Poznámka 43. Uvědomme si, že lineární zobrazení $T\colon X \to Y$ je izometrie do, právě když $\|T(z)\| = \|z\|$ pro každé $z \in X$.

Tvrzení 44. *Nechť X, Y jsou normované lineární prostory.*

(a) $T \in \mathcal{L}(X,Y)$ je izomorfismus do právě tehdy, když existují konstanty $C_1, C_2 > 0$ takové, že $C_1\|x\| \le \|T(x)\| \le C_2\|x\|$ pro každé $x \in X$.

(b) Je-li X izomorfní s Y a X je Banachův, je i Y Banachův.

(c) Je-li X Banachův a $T \in \mathcal{L}(X,Y)$ je izomorfismus do, pak $\operatorname{Rng} T$ je uzavřený v Y.

Fakt 45. *Nechť X, Y, Z jsou normované lineární prostory a $T \in \mathcal{L}(X,Y)$, $S \in \mathcal{L}(Y,Z)$.*

(a) Jsou-li S, T izomorfismy do, pak $S \circ T$ je izomorfismus do.

(b) Jsou-li S, T izometrie do, pak $S \circ T$ je izometrie do.

Věta 46. *Nechť $X, \widehat{X}$ a Y jsou normované lineární prostory, X je hustý v $\widehat{X}$ a Y je úplný. Nechť dále $T \in \mathcal{L}(X,Y)$. Pak existuje právě jeden operátor $\widehat{T} \in \mathcal{L}(\widehat{X},Y)$ rozšiřující T, tj. $\widehat{T}\restriction_X = T$. Navíc platí $\|\widehat{T}\| = \|T\|$.*

Příklad 47. Kdykoliv X je nekonečně-dimenzionální Banachův prostor (nebo obecněji normovaný lineární prostor), pak existuje lineární zobrazení $f : X \to \mathbb{K}$, které není spojité.

Konec 5. přednášky

4. Konečněrozměrné prostory

Lemma 48 (o skoro kolmici, Frigyes Riesz (1918))**.** *Nechť X je normovaný lineární prostor. Je-li Y vlastní uzavřený podprostor X, pak pro každé $\varepsilon > 0$ existuje $x \in S_X$ takové, že $\operatorname{dist}(x, Y) > 1 - \varepsilon$.*

Věta 49. *Nechť X je normovaný lineární prostor nad $\mathbb{K}$. Pak následující tvrzení jsou ekvivalentní:*

(i) $\dim X < \infty$.

(ii) Existuje $n \in \mathbb{N}$ takové, že X je izomorfní s $(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|_2)$.

(iii) B_X je kompaktní.

(iv) Každé lineární zobrazení z X do nějakého normovaného lineárního prostoru je spojité.

(v) Každá lineární forma na X je spojitá.

(vi) Každé dvě normy na X jsou ekvivalentní.

5. Operace s normovanými lineárními prostory, projekce a doplňky

Jsou-li $(X, \|\cdot\|_X)$ a $(Y, \|\cdot\|_Y)$ normované lineární prostory nad $\mathbb{K}$ a $1 \leq p \leq \infty$, pak funkce $(x, y) \mapsto \|(x, y)\|_p$, kde

$$\|(x,y)\|_p = \begin{cases} \left(\|x\|_X^p + \|y\|_Y^p\right)^{\frac{1}{p}} & \text{pro } p < \infty, \\ \max\{\|x\|_X, \|y\|_Y\} & \text{pro } p = \infty, \end{cases} \tag{1}$$

je norma na vektorovém prostoru $X \times Y$.

Definice 50. Nechť $(X, \|\cdot\|_X)$ a $(Y, \|\cdot\|_Y)$ jsou normované lineární prostory a $1 \leq p \leq \infty$. Pak prostorem $X \oplus_p Y$ rozumíme normovaný lineární prostor $(X \times Y, \|\cdot\|_p)$, kde norma $\|\cdot\|_p$ je daná vzorcem (1).

Konec 6. přednášky

Nechť X je vektorový prostor nad $\mathbb{K}$ a Y je jeho podprostor. Definujme relaci ekvivalence $\sim$ na X jako

$$x \sim y \Leftrightarrow x - y \in Y.$$

Pro $x \in X$ pak definujeme $\widehat{x}$ jako třídu ekvivalence obsahující x, tedy

$$\widehat{x} = \{y \in X;\ y \sim x\} = \{y \in X;\ y - x \in Y\} = x + Y.$$

Na množině

$$X/Y = \{\widehat{x};\ x \in X\}$$

definujeme operace $\widehat{x} + \widehat{y} = \widehat{x + y}$ a $\alpha\widehat{x} = \widehat{\alpha x}$ pro $\widehat{x}, \widehat{y} \in X/Y$ a $\alpha \in \mathbb{K}$.

Definice 51. Nechť X je vektorový prostor a Y je jeho podprostor. Pak vektorový prostor X/Y nazýváme *faktorprostorem* prostoru X podle Y nebo též *kvocientem* X podle Y. Dále definujeme tzv. *kanonické kvocientové zobrazení* $q\colon X \to X/Y$ předpisem $q(x) = \widehat{x}$.

Nechť X je normovaný lineární prostor a Y jeho uzavřený podprostor. Pak $(X/Y, \|\cdot\|_{X/Y})$ je normovaný lineární prostor s normou

$$\begin{aligned} \|\widehat{x}\|_{X/Y} &= \inf_{y \in \widehat{x}} \|y\| = \inf_{y \in Y} \|x + y\| = \inf_{y \in Y} \|x - y\| = \\ &= \operatorname{dist}(x + Y, 0) = \operatorname{dist}(x, Y), \end{aligned}$$

Tato norma se nazývá *kanonická kvocientová norma*.

Tvrzení 52. *Nechť X je normovaný lineární prostor a Y jeho uzavřený podprostor. Pak kanonické kvocientové zobrazení $q\colon X \to X/Y$ je spojitý lineární operátor, který je na a splňuje $q(U_X) = U_{X/Y}$. Je-li Y vlastní, pak $\|q\| = 1$.*

Věta 53. *Nechť X je Banachův prostor a Y jeho uzavřený podprostor. Pak X/Y je též Banachův prostor.*

Definice 54. Nechť X je vektorový prostor a A, B jsou jeho podprostory. Říkáme, že X je *direktním (též algebraickým) součtem* A a B (značíme $X = A \oplus B$) pokud $A \cap B = \{0\}$ a $X = A + B = \operatorname{span}(A \cup B)$. Je-li A podprostor X, pak každý podprostor $B \subset X$ splňující $A \oplus B = X$ se nazývá *algebraický doplněk* A v X.

Definice 55. Nechť X je vektorový prostor. Lineární zobrazení $P\colon X \to X$ se nazývá *(lineární) projekce*, pokud $P^2 = P \circ P = P$.

Fakt 56. *Nechť X je vektorový prostor.*

(a) Je-li $P\colon X \to X$ lineární projekce, pak $P\restriction_{\operatorname{Rng} P} = Id_{\operatorname{Rng} P}$.

(b) Je-li Y podprostor X a $P\colon X \to Y$ lineární zobrazení splňující $P\restriction_Y = Id_Y$, pak P je projekce X na Y.

Tvrzení 57. *Nechť X je vektorový prostor. Jsou-li P_A, P_B projekce příslušné rozkladu $X = A \oplus B$, pak $P_A + P_B = Id_X$, $\operatorname{Rng} P_A = A$, $\operatorname{Ker} P_A = B$, $\operatorname{Rng} P_B = B$ a $\operatorname{Ker} P_B = A$. Na druhou stranu, je-li P lineární projekce v X, pak $X = A \oplus B$, kde $A = \operatorname{Rng} P$, $B = \operatorname{Ker} P$ a $P = P_A$.*

Věta 58. *Nechť X je vektorový prostor a Y jeho podprostor.*

(a) Prostor Y má algebraický doplněk v X.

Konec 7. přednášky

(b) Je-li A algebraický doplněk Y v X, je A algebraicky izomorfní s X/Y; speciálně $\dim(A) = \dim(X/Y)$.

Definice 59. Je-li X vektorový prostor a Y jeho podprostor, pak *kodimenzí* Y (značíme $\operatorname{codim} Y$) rozumíme dimenzi libovolného algebraického doplňku Y (což je rovno dimenzi X/Y).

Definice 60. Je-li X normovaný lineární prostor a $X = A \oplus B$, pak říkáme, že X je *topologickým součtem* A a B, pokud jsou příslušné projekce P_A a P_B spojité. Tento fakt značíme $X = A \oplus_{\mathrm{t}} B$. Je-li A podprostor X, pak každý podprostor $B \subset X$ splňující $A \oplus_{\mathrm{t}} B = X$ se nazývá *topologický doplněk* A v X. Má-li A topologický doplněk, pak říkáme, že je *komplementovaný* (v X).

Věta 61. *Nechť X je normovaný lineární prostor a Y, Z jsou jeho podprostory splňující $X = Y \oplus Z$. Pak $X = Y \oplus_{\mathrm{t}} Z$, právě když zobrazení $T\colon X \to Y \oplus_1 Z$, $T(x) = \big(P_Y(x), P_Z(x)\big)$ je izomorfismus.*

Věta 62. *Nechť X je Banachův prostor a $Y, Z \subset X$ jeho podprostory splňující $X = Y \oplus Z$. Pak $X = Y \oplus_{\mathrm{t}} Z$, právě když Y a Z jsou uzavřené.*

Věta 63. *Nechť X, Y jsou normované lineární prostory. Pak*

- *Y je isomorfní komplementovanému podprostoru X, právě když existují spojité lineární operátory $S : X \to Y$ a $T : Y \to X$ splňující $S \circ T = Id_Y$;*
- *Y je isometrické 1-komplementovanému podprostoru X, právě když existují spojité lineární operátory $S : X \to Y$ a $T : Y \to X$ splňující $S \circ T = Id_Y$ a $\max\{\|S\|, \|T\|\} \leq 1$.*

6. Hilbertovy prostory

Definice 64. *Skalárním součinem* na vektorovém prostoru X nad $\mathbb{K}$ rozumíme funkci $\langle\cdot,\cdot\rangle\colon X \times X \to \mathbb{K}$ s následujícími vlastnostmi:

(i) funkce $x \mapsto \langle x, y\rangle$ je lineární pro každé $y \in X$,

(ii) $\langle x, y\rangle = \overline{\langle y, x\rangle}$ pro každé $x, y \in X$,

(iii) $\langle x, x\rangle \geq 0$ pro každé $x \in X$,

(iv) $\langle x, x\rangle = 0$ právě tehdy, když $x = 0$.

Dvojici $(X, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ nazýváme *prostor se skalárním součinem*.

Tvrzení 65 (Cauchyova-Schwarzova nerovnost)**.** *Nechť X je prostor se skalárním součinem. Pak*

(i) $|\langle x, y\rangle| \leq \sqrt{\langle x, x\rangle}\sqrt{\langle y, y\rangle}$ pro každé $x, y \in X$.

(ii) Funkce $\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$ pro $x \in X$ je norma na X.

Fakt 66. *Nechť X je prostor se skalárním součinem a $x, y \in X$. Pak*

$$\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\operatorname{Re}\langle x, y\rangle.$$

Tvrzení 67 (rovnoběžníkové pravidlo)**.** *Nechť X je prostor se skalárním součinem. Pak pro všechna $x, y \in X$ platí*

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2\big(\|x\|^2 + \|y\|^2\big).$$

Definice 68. Nechť X je prostor se skalárním součinem. Prvky $x, y \in X$ se nazývají *ortogonální* (na sebe *kolmé*), pokud $\langle x, y\rangle = 0$. Tento fakt značíme též $x \perp y$. Prvek x je ortogonální (kolmý) k množině $A \subset X$, pokud je ortogonální ke každému jejímu prvku, což značíme $x \perp A$. Množiny $A, B \subset X$ jsou ortogonální, pokud $x \perp y$ pro každé $x \in A$, $y \in B$, což značíme $A \perp B$. Množina $A^\perp = \{x \in X;\ x \perp A\}$ se nazývá *ortogonální doplněk* A.

Fakt 69 (Pythagorova věta, asi 500 p.n.l.). *Nechť X je prostor se skalárním součinem a $x, y \in X$. Je-li $x \perp y$, pak*

$$\|x \pm y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2.$$

Obecněji, jsou-li $x_1, \ldots, x_n \in X$ navzájem ortogonální, pak

$$\|x_1 + \ldots + x_n\|^2 = \|x_1\|^2 + \cdots + \|x_n\|^2.$$

Lemma 70. *Ortogonální doplněk množiny v prostoru se skalárním součinem je uzavřený podprostor.*

Lemma 71. *Nechť X je prostor se skalárním součinem. Jsou-li $x, z \in X$ takové, že $\langle x, y\rangle = \langle z, y\rangle$ pro každé $y \in X$, pak $x = z$.*

Definice 72. Prostor se skalárním součinem $(X, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ se nazývá *Hilbertův prostor*, pokud je úplný v metrice indukované skalárním součinem, tj. pokud $(X, \|\cdot\|)$ je Banachův prostor, kde $\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$.

Tvrzení 73. *Nechť $(X, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ je prostor se skalárním součinem nad $\mathbb{K}$. Pak funkce $\langle\cdot,\cdot\rangle\colon X \times X \to \mathbb{K}$ je lipschitzovská na omezených množinách (a tedy spojitá).*

Tvrzení 74 (polarizační vzorec). *Nechť X je prostor se skalárním součinem. Pak pro všechna $x, y \in X$ platí*

$$\langle x, y\rangle = \tfrac{1}{4}\big(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2\big)$$

v reálném případě, resp.

$$\langle x, y\rangle = \tfrac{1}{4}\big(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2 + i\|x+iy\|^2 - i\|x-iy\|^2\big)$$

v komplexním případě.

Důsledek 75. *Nechť X, Y jsou prostory se skalárním součinem a $T\colon X \to Y$ je lineární izometrie do. Pak T zachovává skalární součin, tj. $\langle T(x), T(y)\rangle = \langle x, y\rangle$ pro každé $x, y \in X$.*

Konec 8. přednášky

Věta 76 (Jordan - von Neumann). *Nechť $(X, \|\cdot\|)$ je normovaný lineární prostor. Pak $\|\cdot\|$ je generovaná nějakým skalárním součinem, právě když $\|\cdot\|$ splňuje rovnoběžníkové pravidlo (tj. rovnost z Tvrzení 67).*

Poznámka: důkaz Věty 76 předveden pouze pro reálný případ

Věta 77 (Frigyes Riesz, 1934). *Nechť C je uzavřená neprázdná konvexní množina v Hilbertově prostoru H. Pak pro každé $x \in H$ existuje právě jedno $y \in C$ tak, že $\|x - y\| = \operatorname{dist}(x, C)$.*

Lemma 78 (F. Riesz, 1934). *Nechť X je prostor se skalárním součinem, Y je jeho podprostor a $x \in X$. Pak $y \in Y$ splňuje $\|x - y\| = \operatorname{dist}(x, Y)$ právě tehdy, když $x - y \in Y^\perp$.*

Věta 79 (F. Riesz, 1934). *Nechť Y je uzavřený podprostor Hilbertova prostoru H. Pak $H = Y \oplus_{\mathrm{t}} Y^\perp$ a projekce $P_Y\colon H \to Y$ příslušná rozkladu $H = Y \oplus Y^\perp$ má následující vlastnosti:*

(i) $\|P_Y(x) - x\| = \operatorname{dist}(x, Y) \leq \|x\|$ *pro každé $x \in H$,*

(ii) $\|P_Y\| \leq 1$.

Věta 80. *Nechť H je Hilbertův prostor a $\{x_n\}_{n=1}^\infty \subset H$ je posloupnost navzájem ortogonálních prvků. Pak řada $\sum_{n=1}^\infty x_n$ konverguje bezpodmínečně, právě když konverguje.*

Konec 9. přednášky

Definice 81. Je-li X prostor se skalárním součinem a $A \subset X$, řekneme, že množina A je

- *ortogonální*, pokud $x \perp y$ pro všechna $x, y \in A$, $x \neq y$;
- *ortonormální*, pokud A je ortogonální a $A \subset S_X$;
- *maximální ortonormální*, pokud A je ortonormální a neexistuje ortonormální množina obsahující A různá od A;
- *úplný ortonormální*, pokud A je ortonormální a $\overline{\operatorname{span}}\, A = X$;

- *ortonormální báze*, pokud $A = \{e_\gamma;\ \gamma \in \Gamma\}$ je ortonormální množina a každé $x \in X$ lze vyjádřit jako $x = \sum_{\gamma\in\Gamma} x_\gamma e_\gamma$ pro nějaké skaláry x_γ.

Fakt 82. *Je-li A ortonormální množina v prostoru se skalárním součinem, pak $\|x - y\| = \sqrt{2}$ pro každé dva prvky $x, y \in A$, $x \neq y$.*

Věta 83. *Každý prostor se skalárním součinem obsahuje maximální ortonormální systém.*

Věta 84 (Besselova nerovnost)**.** *Je-li $\{e_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$ ortonormální soustava v prostoru X se skalárním součinem, platí $\sum_{\gamma\in\Gamma} |\langle x, e_\gamma\rangle|^2 \leq \|x\|^2$ pro každé $x \in X$.*

Věta 85. *Nechť H je Hilbertův prostor a $\{e_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$ je ortonormální systém v H. Pak následující tvrzení jsou ekvivalentní.*

(i) $\|x\|^2 = \sum_{\gamma\in\Gamma} |\langle x, e_\gamma\rangle|^2$ *pro každé $x \in X$ (tzv. Parsevalova rovnost).*

(ii) $x = \sum_{\gamma\in\Gamma} \langle x, e_\gamma\rangle e_\gamma$ *pro každé $x \in X$.*

(iii) $\{e_\gamma\}$ *je ortonormální báze.*

(iv) $X = \overline{\operatorname{span}}\{e_\gamma;\ \gamma \in \Gamma\}$.

(v) $\{e_\gamma\}$ *je maximální ortonormální systém.*

Důsledek 86. *Každý Hilbertův prostor má ortonormální bázi.*

Konec 10. přednášky

Věta 87 (Ernst Sigismund Fischer (1907), Frigyes Riesz (1907))**.** *Je-li $\{e_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$ ortonormální báze Hilbertova prostoru H, je zobrazení $T\colon H \to \ell_2(\Gamma)$, $T(x) = \{\langle x, e_\gamma\rangle\}_{\gamma\in\Gamma}$ izometrie H a $\ell_2(\Gamma)$. Tedy každý Hilbertův prostor je izometrický prostoru $\ell_2(\Gamma)$ pro vhodnou množinu Γ.*

Věta 88 (vyjádření ortogonální projekce)**.** *Nechť H je Hilbertův prostor a Y jeho uzavřený podprostor. Nechť $(e_j)_{j\in J}$ je nějaká ortonormální báze prostoru Y. Pak projekci na Y podél $Y^\perp$ (tzv. ortogonální projekci) lze vyjádřit vzorcem*

$$Px = \sum_{j\in J} \langle x, e_j\rangle e_j, \quad x \in H.$$

Věta 89 (Heinrich Löwig (1934), F. Riesz (1934))**.** *Nechť H je Hilbertův prostor. Pro každé $y \in H$ označme $f_y \in H^*$ funkcionál definovaný jako $f_y(x) = \langle x, y\rangle$ pro $x \in H$. Pak zobrazení $I\colon H \to H^*$, $I(y) = f_y$ je sdruženě lineární izometrie H na H^*.*

Lemma 90. *Nechť X je vektorový prostor, f je lineární forma na X a $x \in X \setminus \operatorname{Ker} f$. Pak $X = \operatorname{Ker} f \oplus \operatorname{span}\{x\}$. Tedy* $\operatorname{codim} \operatorname{Ker} f = 1$.

7. Reálné a komplexní normované lineární prostory

Definice 91. Nechť X je komplexní normovaný lineární prostor. Symbolem X_R označme prostor X uvažovaný jako reálný. Tj. X_R je tatáž množina jako X uvažovaná s operací sčítání jako v X, s násobením reálným číslem jako v X a se stejně definovanou normou.

Věta 92 (reálná verze komplexního normovaného lineárního prostoru)**.** *Nechť X je komplexní normovaný lineární prostor. Pak platí:*

(i) X_R *je reálný normovaný lineární prostor.*

(ii) X_R *je úplný, právě když X je úplný.*

(iii) $\varphi : X \to \mathbb{C}$ *je lineární, právě když* $\operatorname{Re}\varphi : X_R \to \mathbb{R}$ *je lineární a* $\operatorname{Im}\varphi(x) = -\operatorname{Re}\varphi(ix)$ *pro každé $x \in X$.*

(iv) Je-li $\varphi \in X^*$, pak funkcionál $\psi(x) = \operatorname{Re}\varphi(x)$, $x \in X_R$, patří do $(X_R)^*$ a platí $\|\psi\| = \|\varphi\|$.

(v) Je-li $\psi \in (X_R)^*$, pak existuje právě jeden funkcionál $\varphi \in X^*$ takový, že $\psi(x) = \operatorname{Re}\varphi(x)$ pro $x \in X_R$. Je dán vzorcem $\varphi(x) = \psi(x) - i\psi(ix)$ a splňuje $\|\psi\| = \|\varphi\|$.

(vi) Prostory $(X_R)^*$ a $(X^*)_R$ jsou izometrické.

Definice 93. Nechť X je reálný normovaný lineární prostor. Na $X \times X$ definujeme:

- $(x_1, x_2) + (y_1, y_2) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2)$, $x_1, x_2, y_1, y_2 \in X$,
- $(\alpha_1 + i\alpha_2) \cdot (x_1, x_2) = (\alpha_1 x_1 - \alpha_2 x_2, \alpha_1 x_2 + \alpha_2 x_1)$, $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$ a $x_1, x_2 \in X$.

- $\|(x_1, x_2)\|_{X_{\mathbb{C}}} = \sup\big\{\|(\cos\alpha)x_1 + (\sin\alpha)x_2\|_X;\ \alpha \in [0, 2\pi)\big\}$, $x_1, x_2 \in X$.

Symbolem $(X_{\mathbb{C}}, \|\cdot\|)$ značíme komplexní normovaný lineární prostor $(X \times X, +, \cdot, \|\cdot\|_{X_{\mathbb{C}}})$.

Věta 94 (komplexifikace)**.** *Je-li X reálný normovaný lineární prostor, pak je $(X_{\mathbb{C}}, \|\cdot\|)$ komplexní normovaný lineární prostor. Je-li navíc X Banachův, pak je $X_{\mathbb{C}}$ Banachův.*

Poznámka: důkaz Věty 94 pouze naznačen
Konec 11. přednášky

II. Hahnova-Banachova věta a dualita

1. Hahnova-Banachova věta

Definice 95. Nechť X je vektorový prostor nad $\mathbb{K}$. Funkce $p\colon X \to \mathbb{R}$ se nazývá *sublineární funkcionál*, pokud platí

- $p(x + y) \le p(x) + p(y)$ pro každé $x, y \in X$,
- $p(tx) = tp(x)$ pro každé $x \in X$ a $t \in [0, +\infty)$.

Funkce $p\colon X \to [0, +\infty)$ se nazývá *pseudonorma*, pokud platí

- $p(x + y) \le p(x) + p(y)$ pro každé $x, y \in X$,
- $p(\alpha x) = |\alpha| p(x)$ pro každé $x \in X$ a $\alpha \in \mathbb{K}$.

Věta 96 (Hans Hahn (1927), Stefan Banach (1929))**.** *Nechť X je vektorový prostor a Y je podprostor X.*

(a) Je-li X reálný, p je sublineární funkcionál na X a f je lineární forma na Y splňující $f(x) \le p(x)$ pro každé $x \in Y$, pak existuje lineární forma F na X taková, že $F\restriction_Y = f$ a $F(x) \le p(x)$ pro každé $x \in X$.

(b) Je-li p pseudonorma na X a f je lineární forma na Y splňující $|f(x)| \le p(x)$ pro každé $x \in Y$, pak existuje lineární forma F na X taková, že $F\restriction_Y = f$ a $|F(x)| \le p(x)$ pro každé $x \in X$.

Věta 97 (Hahnova-Banachova)**.** *Nechť X je normovaný lineární prostor, Y je podprostor X a $f \in Y^*$. Pak existuje $F \in X^*$ takové, že $F\restriction_Y = f$ a $\|F\| = \|f\|$.*

Důsledek 98. *Nechť X je netriviální normovaný lineární prostor. Pro každé $x \in X$ existuje $f \in S_{X^*}$ takové, že $f(x) = \|x\|$. Odtud plyne, že jsou-li $x, y \in X$ různé body, pak existuje $f \in X^*$ takový, že $f(x) \ne f(y)$ (říkáme, že X^* odděluje body X).*

Důsledek 99 (Duální vyjádření normy)**.** *Je-li X normovaný lineární prostor a $x \in X$, pak $\|x\| = \max_{f \in B_{X^*}} |f(x)|$.*

Věta 100 (Oddělování bodu a podprostoru)**.** *Nechť X je normovaný lineární prostor, Y je uzavřený podprostor X a $x \notin Y$. Pak existuje $f \in S_{X^*}$ tak, že $f\restriction_Y = 0$ a $f(x) = \operatorname{dist}(x, Y) > 0$.*

Věta 101 (Oddělování konvexních množin)**.** *Nechť X je normovaný lineární prostor a $A, B \subset X$ jsou disjunktní konvexní množiny. Pak platí následující tvrzení:*

(a) Je-li A otevřená, pak existuje $f \in X^*$ takový, že $\operatorname{Re} f(x) < \inf_B \operatorname{Re} f$ pro každé $x \in A$.

(b) Je-li A uzavřená a B kompaktní, pak existuje $f \in X^*$ takový, že $\sup_A \operatorname{Re} f < \inf_B \operatorname{Re} f$.

Konec 12. přednášky

Věta 102. *Nechť X je normovaný lineární prostor.*

(a) Každý konečněrozměrný podprostor X je komplementovaný.

(b) Každý uzavřený podprostor X konečné kodimenze je komplementovaný.

2. Duální a adjungované operátory - základy

Definice 103. Nechť X, Y jsou normované lineární prostory a $T \in \mathcal{L}(X,Y)$. Operátor $T^* \colon Y^* \to X^*$ definovaný předpisem

$$T^* f(x) = f(Tx)$$

pro $f \in Y^*$ a $x \in X$ se nazývá *duální* (nebo též *adjungovaný*) operátor k T. (Ve Větě 104 dokážeme, že T^* je dobře definovaný.) Operátor $(T^*)^*$ (tj. operátor duální k T^*) značíme T^{**}.

Věta 104. *Nechť X, Y, Z jsou normované lineární prostory.*

(a) Je-li $T \in \mathcal{L}(X,Y)$, je $T^* f \in X^*$ pro každé $f \in Y^*$. Dále $T^* \in \mathcal{L}(Y^*, X^*)$ a $\|T^*\| = \|T\|$.

(b) Zobrazení $T \mapsto T^*$ je lineární izometrie z $\mathcal{L}(X,Y)$ do $\mathcal{L}(Y^*, X^*)$.

(c) Nechť $T \in \mathcal{L}(X,Y)$ a $S \in \mathcal{L}(Y,Z)$. Pak $(S \circ T)^* = T^* \circ S^*$. Dále $Id_X^* = Id_{X^*}$.

Věta 105. *Nechť H_1, H_2 jsou Hilbertovy prostory a $T \in \mathcal{L}(H_1, H_2)$. Pak existuje jednoznačně určený operátor $T^\star \in \mathcal{L}(H_2, H_1)$ takový, že pro každé $y \in H_2$ a $x \in H_1$ platí*

$$\langle Tx, y \rangle_{H_2} = \langle x, T^\star y \rangle_{H_1}.$$

Dále platí, že $T^\star = I_1^{-1} \circ T^* \circ I_2$, kde $I_j \colon H_j \to H_j^*$, $j = 1, 2$ jsou příslušné sdruženě lineární izometrie z Věty 89.

Definice 106. Operátor $T^\star$ z předcházející věty nazýváme hilbertovsky adjungovaným operátorem k T.

Věta 107. *Nechť H_1, H_2, H_3 jsou Hilbertovy prostory.*

(a) Je-li $T \in \mathcal{L}(H_1, H_2)$, je $T^{\star\star} = (T^\star)^\star = T$.

Konec 13. přednášky

(b) Zobrazení $T \mapsto T^\star$ je sdruženě lineární izometrie $\mathcal{L}(H_1, H_2)$ na $\mathcal{L}(H_2, H_1)$.

(c) Nechť $T \in \mathcal{L}(H_1, H_2)$ a $S \in \mathcal{L}(H_2, H_3)$. Pak $(S \circ T)^\star = T^\star \circ S^\star$. Dále $(Id_{H_1})^\star = Id_{H_1}$.

3. Reprezentace duálů

Definice 108. Nechť $p \in \mathbb{R}$, $p \geq 1$, nebo $p = \infty$. Číslo $q \in \mathbb{R}$, $q \geq 1$, nebo $q = \infty$ nazýváme *sdruženým exponentem* k p, pokud platí $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, přičemž používáme konvenci, že $\frac{1}{\infty} = 0$.

Věta 109 (Reprezentace duálů ke klasickým prostorům)**.** *Nechť $I \neq \emptyset$.*

(a) Prostor $c_0(I)^*$ je lineárně izometrický s prostorem $\ell_1(I)$ pomocí zobrazení $I \colon \ell_1(I) \to c_0(I)^*$, $I(y) = f_y$, kde

$$f_y(x) = \sum_{i \in I} x_i y_i.$$

(b) Je-li $1 \leq p < \infty$ a q je sdružený exponent k p, pak prostor $\ell_p(I)^*$ je lineárně izometrický s prostorem $\ell_q(I)$ pomocí zobrazení $I \colon \ell_q(I) \to \ell_p(I)^*$, $I(y) = f_y$, kde

$$f_y(x) = \sum_{i \in I} x_i y_i.$$

Konec 14. přednášky

(c) Je-li $(\Omega, \mathcal{S}, \mu)$ libovolný prostor s mírou, $1 < p < \infty$ a q je sdružený exponent k p, pak prostor $L_p(\mu)^*$ je lineárně izometrický s prostorem $L_q(\mu)$ pomocí zobrazení $I \colon L_q(\mu) \to L_p(\mu)^*$, $I(g) = \varphi_g$, kde

$$\varphi_g(f) = \int_\Omega fg \, \mathrm{d}\mu.$$

(d) Je-li $(\Omega, \mathcal{S}, \mu)$ prostor se σ-konečnou mírou, pak prostor $L_1(\mu)^*$ je lineárně izometrický s prostorem $L_\infty(\mu)$ pomocí zobrazení $I \colon L_\infty(\mu) \to L_1(\mu)^*$, $I(g) = \varphi_g$, kde

$$\varphi_g(f) = \int_\Omega fg \, \mathrm{d}\mu.$$

Poznámka: důkaz případů (c) a (d) byl na přenášce proveden pouze pro případ konečné míry μ a pro $p = 1$, pro případ konečné míry μ a $p > 1$ bylo ukázáno že se jedná o izometrii (že je v tomto případě I na bylo pouze naznačeno)

Věta 110. *Nechť X, Y jsou normované lineární prostory a $1 \leq p \leq \infty$. Nechť q je sdružený exponent k p. Pak zobrazení $I\colon X^* \oplus_q Y^* \to (X \oplus_p Y)^*$ dané předpisem*

$$I(f, g)(x, y) = f(x) + g(y)$$

je lineární izometrie $X^* \oplus_q Y^*$ na $(X \oplus_p Y)^*$.

Konec 15. přednášky

Definice 111. Nechť K je kompaktní prostor. Řekneme, že lineární funkcionál Λ na $C(K)$ je *nezáporný*, jestliže $\Lambda(f) \geq 0$ pro každou nezápornou funkci $f \in C(K)$.

Věta 112 (O reprezentaci nezáporných lineárních funkcionálů na $C(K)$)**.** *Nechť K je kompaktní prostor a Λ je nezáporný lineární funkcionál na $C(K)$. Pak existuje jednoznačně určená regulární borelovská nezáporná míra μ na K splňující $\Lambda(f) = \int_K f \,\mathrm{d}\mu$ pro každé $f \in C(K)$.*

Věta 113 (Rieszova věta o reprezentaci $C(K)^*$)**.** *Je-li K kompaktní prostor, pak prostor $C(K)^*$ je lineárně izometrický s prostorem $M(K)$ všech regulárních borelovských komplexních (resp. znaménkových) měr na K pomocí zobrazení $I\colon M(K) \to C(K)^*$, $I(\mu) = \varphi_\mu$, kde*

$$\varphi_\mu(f) = \int_K f \,\mathrm{d}\mu.$$

Poznámka: důkazy Vět 112 a 113 na přednášce nebyly

4. Anihilátory, dualita kvocientů a podprostorů

Definice 114. Je-li X normovaný lineární prostor a $A \subset X$, pak definujeme tzv. *anihilátor* množiny A jako

$$A^\perp = \{f \in X^*;\ f(x) = 0 \text{ pro každé } x \in A\}.$$

Pro množinu $B \subset X^*$ pak definujeme tzv. *zpětný anihilátor* jako

$$B_\perp = \{x \in X;\ f(x) = 0 \text{ pro každé } f \in B\}.$$

Lemma 115. *Nechť X je normovaný lineární prostor a $A \subset X$, $B \subset X^*$. Pak*

(a) $A^\perp$ je uzavřený podprostor X^*,

(b) $B_\perp$ je uzavřený podprostor X,

(c) $(A^\perp)_\perp = \overline{\operatorname{span}}\, A$,

(d) $(B_\perp)^\perp \supset \overline{\operatorname{span}}\, B$.

Věta 116. *Nechť X je normovaný lineární prostor a Y je jeho podprostor.*

(a) Nechť Y je uzavřený. Zobrazení $I\colon Y^\perp \to (X/Y)^*$ dané předpisem

$$I(f)(\widehat{x}) = f(x)$$

je lineární izometrie $Y^\perp$ na $(X/Y)^*$.

(b) Zobrazení $I\colon X^*/Y^\perp \to Y^*$ dané předpisem

$$I(\widehat{f}) = f\restriction_Y$$

je lineární izometrie $X^*/Y^\perp$ na Y^*.

Tedy $(X/Y)^*$ lze identifikovat s $Y^\perp$ a Y^* lze identifikovat s $X^*/Y^\perp$.

Věta 117. *Jsou-li X, Y normované lineární prostory a $T \in \mathcal{L}(X, Y)$, pak platí*

(a) $\operatorname{Ker} T^* = (\operatorname{Rng} T)^\perp$,

(b) $\operatorname{Ker} T = (\operatorname{Rng} T^*)_\perp$,

(c) $\overline{\operatorname{Rng} T} = (\operatorname{Ker} T^*)_\perp$,

(d) T^* je prostý, právě když $\operatorname{Rng} T$ je hustý.

5. Druhý duál a reflexivita

Definice 118. Nechť X je normovaný lineární prostor. Symbolem X^{**} značíme $(X^*)^*$, tj. duál k prostoru X^*. Tento prostor nazýváme *druhým duálem*.

Je-li $x \in X$, pak definujeme tzv. *evaluační funkcionál* $\varepsilon_x \in X^{**}$ předpisem $\varepsilon_x(f) = f(x)$ pro každé $f \in X^*$.

Definice 119. Nechť X je normovaný lineární prostor. Zobrazení $\varepsilon\colon X \to X^{**}$ dané předpisem $\varepsilon(x) = \varepsilon_x$ se nazývá *kanonické vnoření X do X^{**}*.

Tvrzení 120. *Nechť X je normovaný lineární prostor. Pak kanonické vnoření $\varepsilon\colon X \to X^{**}$ je lineární izometrie do. Je-li tedy X navíc Banachův, pak $\varepsilon(X)$ je uzavřený podprostor X^{**}*

Konec 16. přednášky

Tvrzení 121 (J. P. Schauder, 1930)**.** *Nechť X, Y jsou normované lineární prostory, $\varepsilon_X : X \to X^{**}$ a $\varepsilon_Y : Y \to Y^{**}$ jsou kanonická vnoření do druhých duálů a $T \in \mathcal{L}(X,Y)$. Pak*

$$T^{**} \circ \varepsilon_X = \varepsilon_Y \circ T.$$

Věta 122. *Pro každý normovaný lineární prostor X existuje jeho zúplnění, tj. Banachův prostor takový, že X je jeho hustý podprostor. Pro každý prostor se skalárním součinem X existuje jeho zúplnění, tj. Hilbertův prostor takový, že X je jeho hustý podprostor. Tato rozšíření jsou určena jednoznačně až na izometrii, tj. jsou-li X_1, X_2 dvě zúplnění X, pak existuje lineární izometrie X_1 na X_2, která je na X identitou.*

Věta 123. *Nechť X, Y jsou Banachovy prostory a $T \in \mathcal{L}(X,Y)$.*

(a) T je izomorfismus na, právě když T^* je izomorfismus na. V tomto případě navíc platí $(T^*)^{-1} = (T^{-1})^*$.

(b) T je izometrie na, právě když T^* je izometrie na.

Speciálně, jsou-li X a Y “lineárně izometrické” pak jsou také X^* a Y^* “lineárně izometrické”.

Definice 124. Banachův prostor X se nazývá *reflexivní*, pokud $X^{**} = \varepsilon(X)$.

Věta 125. *Nechť X, Y jsou Banachovy prostory.*

(a) Je-li X izomorfní s reflexivním prostorem, pak je i X reflexivní.

(b) Uzavřený podprostor reflexivního prostoru je reflexivní.

(c) Prostor X je reflexivní právě tehdy, když jeho duál X^* je reflexivní.

(d) Je-li X reflexivní a Y jeho uzavřený podprostor, pak je X/Y reflexivní.

Příklady 126.

(a) Prostor $L_p(\mu)$ je reflexivní pro libovolnou míru μ a $1 < p < \infty$.

(b) Každý Hilbertův prostor je relexivní.

(c) Každý konečněrozměrný prostor je reflexivní.

(d) Prostory c_0, ℓ_1, ℓ_∞, $L_1([0,1])$, $L_\infty([0,1])$ a $C([0,1])$ nejsou reflexivní.

(e) Existuje Banachův prostor J (tzv. Jamesův prostor), který není reflexivní, i když je izometrický s J^{**}.

Věta 127 (James)**.** *Banachův prostor X je reflexivní, právě když pro každé $x^* \in X^*$ existuje $x \in B_X$ splňující $\|x^*\| = x^*(x)$.*

Poznámka: na přednášce byla vynechán důkaz složitější implikace ve Větě 127
Konec 17. přednášky

6. Slabé konvergence posloupností

Definice 128. Nechť X je normovaný lineární prostor.

(a) Řekneme, že posloupnost $\{x_n\}$ v prostoru X *slabě konverguje* k $x \in X$ (značíme $x_n \xrightarrow{w} x$), pokud pro každé $x^* \in X^*$ platí $x^*(x_n) \to x^*(x)$.

(b) Řekneme, že posloupnost $\{x_n^*\}$ v prostoru X^* *slabě s hvězdičkou konverguje* k $x^* \in X^*$ (značíme $x_n^* \xrightarrow{w^*} x^*$), pokud pro každé $x \in X$ platí $x_n^*(x) \to x^*(x)$.

Lemma 129. *Nechť X je normovaný lineární prostor, $\{x_n\}$ posloupnost v X a $\{x_n^*\}$ posloupnost v X^*.*

(a) Existuje nejvýše jedno $x \in X$ splňující $x_n \xrightarrow{w} x$.

(b) Existuje nejvýše jedno $x^* \in X^*$ splňující $x_n^* \xrightarrow{w^*} x^*$.

(c) Pokud $x \in X$ a $x_n \to x$, pak $x_n \xrightarrow{w} x$.

(d) Pokud $x^* \in X^*$ a $x_n^* \xrightarrow{w} x^*$, pak $x_n^* \xrightarrow{w^*} x^*$.

Věta 130. *Nechť X je separabilní normovaný lineární prostor a $\{x_n^*\}$ omezená posloupnost v X^*. Pak $\{x_n^*\}$ má w^*-konvergentní podposloupnost.*

Věta 131. *(Banachův prostor X je reflexivní, právě když každá omezená poslopnost $\{x_n\}$ v X má slabě konvergentní podposloupnost.*

Poznámka: na přednášce byl vynechán důkaz složitější implikace ve Větě 131

Věta 132. *Nechť X je normovaný lineární prostor a X^* je separabilní. Pak X je separabilní.*

III. Omezené operátory v Banachových prostorech

1. Kompaktní operátory

Definice 133. Nechť X, Y jsou normované lineární prostory a $T\colon X \to Y$ je lineární zobrazení. Pak T se nazývá *kompaktní operátor*, pokud pro každou omezenou $A \subset X$ je množina $T(A)$ relativně kompaktní v Y. Množinu všech kompaktních lineárních operátorů z X do Y značíme $\mathcal{K}(X, Y)$.

Lineární operátor T se nazývá *konečněrozměrný*, pokud $\operatorname{Rng} T$ má konečnou dimenzi. V dalším budeme pracovat takřka výhradně se spojitými konečněrozměrnými operátory, označíme proto množinu všech konečněrozměrných spojitých lineárních operátorů z X do Y jako $\mathcal{F}(X, Y)$.

Tvrzení 134. *Nechť X, Y jsou normované lineární prostory. Každý kompaktní lineární operátor z X do Y je automaticky spojitý. Dále, je-li $T\colon X \to Y$ lineární, pak následující tvrzení jsou ekvivalentní:*

(i) T je kompaktní.

(ii) $T(B_X)$ je relativně kompaktní.

(iii) Je-li $\{x_n\}$ omezená posloupnost v X, pak posloupnost $\{T(x_n)\}$ má konvergentní podposloupnost.

Věta 135. *Nechť X, Y jsou Banachovy prostory.*

(a) Operátor $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ je konečněrozměrný právě tehdy, když existují $f_1, \dots, f_n \in X^*$ a $y_1, \dots, y_n \in Y$ takové, že $T(x) = \sum_{i=1}^n f_i(x) y_i$ pro každé $x \in X$.

(b) $\mathcal{K}(X, Y)$ je podprostor $\mathcal{L}(X, Y)$ a $\mathcal{F}(X, Y)$ je podprostor $\mathcal{K}(X, Y)$.

(c) $\mathcal{K}(X, Y)$ je uzavřený podprostor $\mathcal{L}(X, Y)$.

(d) Složíme-li kompaktní lineární operátor se spojitým lineárním operátorem zleva či zprava, dostaneme opět kompaktní operátor.

Konec 18. přednášky (důkaz Věty 135 bude dokončen na další přednášce)

Věta 136 (J. P. Schauder, 1930)**.** *Nechť X je normovaný lineární prostor, Y je Banachův prostor a $T \in \mathcal{L}(X, Y)$. Pak T^* je kompaktní, právě když T je kompaktní.*

2. Úplnost v Banachových prostorech

Věta 137 (Princip stejnoměrné omezenosti)**.** *Nechť X je Banachův prostor, Y je normovaný lineární prostor a $\mathcal{A} \subset \mathcal{L}(X,Y)$. Pak následující tvrzení jsou ekvivalentní:*

(i) $\sup\{\|T\|;\ T \in \mathcal{A}\} < +\infty$.

(ii) Pro každé $x \in X$ je $\sup\{\|T(x)\|;\ T \in \mathcal{A}\} < +\infty$.

Důsledek 138. *Nechť X je Banachův prostor, Y je normovaný lineární prostor a $\{T_n\}$ je posloupnost v $\mathcal{L}(X,Y)$ taková, že pro každé $x \in X$ existuje $T(x) = \lim_{n\to\infty} T_n(x)$. Pak $T \in \mathcal{L}(X,Y)$ a $\|T\| \le \liminf\|T_n\| \in \mathbb{R}$.*

Tvrzení 139. *Nechť X je Banachův prostor, $\{x_n^*\}$ je posloupnost v X^*, $x^* \in X^*$ a $D \subset X$ splňuje $\overline{\operatorname{span}}\, D = X$. Pak $x_n^* \overset{w^*}{\to} x^*$, právě když $\{x_n^*\}$ je omezená a $x_n^*(d) \to x^*(d)$ pro každé $d \in D$.*

Tvrzení 140. *Nechť X je Banachův prostor, $\{x_n\}$ je posloupnost v X, $x \in X$ a $D \subset X^*$ splňuje $\overline{\operatorname{span}}\, D = X^*$. Pak $x_n \overset{w}{\to} x$, právě když $\{x_n\}$ je omezená a $d(x_n) \to d(x)$ pro každé $d \in D$.*

Příklady 141. Pro následující Banachovz prostory X, posloupnost $\{x_n\}$ v X a $x \in X$ platí:

(a) Pokud $X = c_0$ nebo $X = \ell_p$ pro $p \in (1,\infty)$, pak $x_n \overset{w}{\to} x$, právě když $\{x_n\}$ je omezená a $x_n(i) \to x(i)$, $i \in \mathbb{N}$;

(b) Pokud $X = \ell_p$ pro $p \in [1,\infty]$, pak $x_n \overset{w^*}{\to} x$, právě když $\{x_n\}$ je omezená a $x_n(i) \to x(i)$, $i \in \mathbb{N}$;

(c) Pokud $X = C(K)$, pak $x_n \overset{w}{\to} x$, právě když $\{x_n\}$ je omezená a $x_n(k) \to x(k)$, $k \in K$;

(d) Pokud $X = \ell_1$, pak $x_n \overset{w}{\to} x$, právě když $x_n \overset{\|\cdot\|}{\to} x$;

Definice 142. Zobrazení $f\colon X \to Y$ mezi metrickými prostory X, Y se nazývá *otevřené*, pokud $f(G)$ je otevřená množina v Y pro každou otevřenou množinu $G \subset X$.

Věta 143 (O otevřeném zobrazení, Juliusz Paweł Schauder, 1930)**.** *Nechť X, Y jsou Banachovy prostory a $T \in \mathcal{L}(X,Y)$ je na. Pak T je otevřené zobrazení.*

Lemma 144 (J. P. Schauder, 1930)**.** *Nechť X je Banachův prostor, Y je normovaný lineární prostor a $T \in \mathcal{L}(X,Y)$. Jestliže $r, s > 0$ jsou taková, že $U(0,s) \subset \overline{T(U(0,r))}$, pak dokonce $U(0,s) \subset T(U(0,r))$.*

Důsledek 145 (S. Banach, 1929)**.** *Nechť X, Y jsou Banachovy prostory a $T \in \mathcal{L}(X,Y)$. Pak T je izomorfismus X na Y, právě když T je prostý a na.*

Důsledek 146. *Nechť X, Y jsou Banachovy prostory a $T \in \mathcal{L}(X,Y)$ je na. Pak platí:*

(a) Existuje $c > 0$ takové, že pro každé $y \in Y$ existuje $x \in T^{-1}(y)$ splňující $\|x\| \le c\|y\|$.

(b) Zobrazení $\widehat{T}\colon X/\operatorname{Ker} T \to Y$ dané předpisem $\widehat{T}(\widehat{x}) = T(x)$ je lineární izomorfismus na. Tedy prostor Y je izomorfní s $X/\operatorname{Ker} T$.

Definice 147. Je-li $f\colon X \to Y$ zobrazení množiny X do množiny Y, pak množinu

$$\operatorname{graf} f = \{(x,y) \in X \times Y;\ y = f(x)\}$$

nazýváme *grafem zobrazení* f. Říkáme, že zobrazení $f\colon X \to Y$, kde X, Y jsou metrické prostory, *má uzavřený graf*, pokud množina $\operatorname{graf} f$ je uzavřená v $X \times Y$.

Věta 148 (O uzavřeném grafu, S. Banach, 1932)**.** *Nechť X, Y jsou Banachovy prostory a $T\colon X \to Y$ je lineární zobrazení. Pak T je spojité, právě když má uzavřený graf.*

3. Spektrální teorie (zejména) kompaktních operátorů

Tvrzení 149. *Nechť X je Banachův prostor a $T \in \mathcal{L}(X)$. Pak T je invertibilní, právě když T je bijekce.*

Tvrzení 150. *Nechť X je Banachův prostor.*

(a) Pokud $T \in \mathcal{L}(X)$ a $\|T\| < 1$, pak $Id_X - T$ je inveribilní a platí $(Id_X - T)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} T^n$.

(b) Pokud je T invertovatelný a $\|S - T\| < \frac{1}{\|T\|^{-1}}$, pak S je invertovatelný a $S^{-1} = T^{-1}\sum_{n=0}^{\infty}(I - ST^{-1})^n$. Speciálně, množina všech invertibilních operátorů v $\mathcal{L}(X)$ je otevřená.

Definice 151. Nechť X je normovaný lineární prostor nad $\mathbb{K}$ a $T \in \mathcal{L}(X)$. Číslo $\lambda \in \mathbb{K}$ nazýváme *vlastním číslem* operátoru T, pokud $\operatorname{Ker}(\lambda I - T) \neq \{0\}$, tj. pokud $T(x) = \lambda x$ pro nějaké $x \in X$, $x \neq 0$. Prostor $\operatorname{Ker}(\lambda I - T)$ pak nazýváme *vlastním prostorem* příslušným číslu λ. Nenulové prvky vlastního prostoru příslušného číslu λ se nazývají *vlastní vektory* příslušné číslu λ. Množina všech vlastních čísel operátoru T se nazývá *bodové spektrum* operátoru T a značí se $\sigma_{\mathrm{p}}(T)$.

Spektrum operátoru T je množina všech čísel $\lambda \in \mathbb{K}$, pro která operátor $\lambda I - T$ není invertibilní. Spektrum operátoru T značíme $\sigma(T)$.

Rezolventní množina operátoru T je $\rho(T) := \mathbb{K} \setminus \sigma(T)$. *Rezolventní funkce* je definována jako $\rho(T) \ni \lambda \mapsto (\lambda I - T)^{-1} \in \mathcal{L}(X)$

Věta 152. *Nechť X je Banachův prostor nad $\mathbb{K}$ a $T \in \mathcal{L}(X)$. Pak $\sigma(T)$ je kompaktní podmnožina $\mathbb{K}$ splňující $\sigma(T) \subset B_{\mathbb{K}}(0, \|T\|)$. Je-li X komplexní, pak $\sigma(T)$ je neprázdné.*

Věta 153. *Nechť X je Banachův prostor a $T \in \mathcal{L}(X)$. Pak $\sigma(T^*) = \sigma(T)$. Navíc, pokud je X Hilbertův, pak $\sigma(T^\star) = \overline{\sigma(T)}$*

Věta 154. *Nechť X je Banachův prostor a $T \in \mathcal{K}(X)$.*

(a) Jestliže $\operatorname{Rng}(T)$ je uzavřený, pak $\dim \operatorname{Rng}(T) < \infty$.

(b) Jestliže $\dim X = \infty$, pak $0 \in \sigma(T)$.

(c) Jestliže $\lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$, pak $\dim \operatorname{Ker}(\lambda I - T) < \infty$ a $\operatorname{Rng}(\lambda I - T)$ je uzavřený.

Věta 155 (Fredholmova alternativa)**.** *Nechť X je Banachův prostor nad $\mathbb{K}$, $T \in \mathcal{K}(X)$ a $\lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$. Pak operátor $\lambda I - T$ je na, právě když je prostý.*

Důsledek 156. *Nechť X je Banachův prostor a $T \in \mathcal{K}(X)$. Pak $\sigma(T) \subset \{0\} \cup \sigma_{\mathrm{p}}(T)$.*

Lemma 157. *Nechť X je normovaný lineární prostor a $T \in \mathcal{L}(X)$. Jsou-li $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ různá vlastní čísla operátoru T a $x_1, \dots, x_n \in X$ vlastní vektory příslušné číslům $\lambda_1, \dots, \lambda_n$, pak jsou tyto vektory lineárně nezávislé.*

Věta 158. *Nechť X je normovaný lineární prostor nad $\mathbb{K}$ a $T \in \mathcal{K}(X)$. Pak pro každé $r > 0$ je množina $\sigma(T) \cap \{\lambda \in \mathbb{K};\ |\lambda| > r\}$ konečná.*

Důsledek 159. *Nechť X je nekonečněrozměrný Banachův prostor a $T \in \mathcal{K}(X)$. Potom $\sigma(T) = \{0\} \cup \{\lambda_n\}$, kde $\{\lambda_n\}$ je posloupnost, která je buď konečná, nebo nekonečná a konvergující k 0, a je tvořena nenulovými vlastními čísly operátoru T, přičemž každé z nich má konečněrozměrný vlastní podprostor.*

Věta 160 (Druhá Fredholmova věta)**.** *Nechť X je Banachův prostor nad $\mathbb{K}$, $T \in \mathcal{K}(X)$ a $\lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$. Pak*

$$\begin{aligned} \operatorname{Rng}(\lambda I_X - T) &= \big(\operatorname{Ker}(\lambda I_{X^*} - T^*)\big)_\perp, \\ \operatorname{Rng}(\lambda I_{X^*} - T^*) &= \big(\operatorname{Ker}(\lambda I_X - T)\big)^\perp. \end{aligned}$$

Lemma 161. *Nechť X, Y jsou Banachovy prostory, $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ a $\operatorname{Rng} T$ je uzavřený. Pak $\operatorname{Rng} T^* = (\operatorname{Ker} T)^\perp$.*

Věta 162 (Třetí Fredholmova věta)**.** *Nechť X je Banachův prostor, $T \in \mathcal{K}(X)$ a $\lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$. Pak*

$$\dim \operatorname{Ker}(\lambda I_X - T) = \operatorname{codim} \operatorname{Rng}(\lambda I_X - T) = \dim \operatorname{Ker}(\lambda I_{X^*} - T^*) = \operatorname{codim} \operatorname{Rng}(\lambda I_{X^*} - T^*) < \infty.$$

4. Samoadjungované kompaktní operátory na Hilbertově prostoru

Definice 163. Nechť H je Hilbertův prostor a $T \in \mathcal{L}(H)$. Množina $N_T = \{\langle Tx, x\rangle;\ x \in S_H\}$ se nazývá *numerický range* operátoru T.

Tvrzení 164. *Nechť $T \in \mathcal{L}(H)$.*

(a) $N_{\alpha I + \beta T} = \alpha + \beta N_T$ pro libovolná $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$.

(b) $\sigma_{\mathrm{p}}(T) \subset N_T \subset B_{\mathbb{K}}(0, \|T\|)$.

(c) $\sigma(T) \subset \overline{N_T}$.

Definice 165. Nechť H je Hilbertův prostor a $T \in \mathcal{L}(H)$. Řekneme, že T je *samoadjungovaný* pokud $T = T^\star$.

Věta 166. *Nechť H je netriviální Hilbertův prostor a $T \in \mathcal{L}(H)$. Pak T je samoadjungovaný, právě když $\langle Tx, y\rangle = \langle x, Ty\rangle$ pro každé $x, y \in H$. Pro T samoadjungovaný platí následující tvrzení:*

(a) $\langle Tx, x\rangle \in \mathbb{R}$ pro každé $x \in H$.

(b) *$N_T \subset \mathbb{R}$ a označíme-li $m_T = \inf N_T$, $M_T = \sup N_T$, pak $\|T\| = \max\{|m_T|, |M_T|\}$ a $\{m_T, M_T\} \subset \sigma(T) \subset [m_T, M_T]$, a tedy číslo $\|T\|$ nebo $-\|T\|$ leží v $\sigma(T)$.*

Definice 167. Nechť A je množina a $f\colon A \to A$ je zobrazení. Množina $B \subset A$ se nazývá invariantní vůči f, pokud $f(B) \subset B$, tj. $f\restriction_B\colon B \to B$.

Lemma 168. *Nechť H je Hilbertův prostor a $T \in \mathcal{L}(H)$ je samoadjugovaný. Pak platí následující tvrzení:*

(a) *$\lambda \in \sigma_{\mathrm{p}}(T)$ právě tehdy, když $\overline{\lambda} \in \sigma_{\mathrm{p}}(T^\star)$. Vlastní prostor T příslušný vlastnímu číslu λ je shodný s vlastním prostorem $T^\star$ příslušným vlastnímu číslu $\overline{\lambda}$.*

(b) *Pokud λ_1, λ_2 jsou různá vlastní čísla T, pak $\mathrm{Ker}(\lambda_1 I - T) \perp \mathrm{Ker}(\lambda_2 I - T)$.*

(c) *Pokud $\sigma(T) = \{0\}$, pak $T = 0$.*

(d) *Nechť $Y \subset H$ je uzavřený podprostor invariantní vůči T i $T^\star$. Pak $T\restriction_Y \in \mathcal{L}(Y)$ je samoadjungovaný.*

Věta 169 (spektrální rozklad samoadjungovaného kompaktního operátoru; D. Hilbert (1904), Erhard Schmidt (1907))**.** *Nechť H je netriviální Hilbertův prostor a $T \in \mathcal{K}(H)$ je samoadjugovaný. Pak existuje ortonormální báze B prostoru H tvořená vlastními vektory T. Vektorů z B příslušných nenulovým vlastním číslům T je spočetně mnoho, a seřadíme-li je libovolně do prosté posloupnosti $\{e_n\}_{n=1}^N$, $N \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, pak $\{e_n\}$ je ortonormální báze $\overline{\mathrm{Rng}\, T}$ a pro každé $x \in H$ je*

$$Tx = \sum_{n=1}^{N} \lambda_n \langle x, e_n \rangle e_n,$$

kde λ_n je vlastní číslo příslušné vlastnímu vektoru e_n.

V. Konvoluce funkcí a Fourierova transformace

1. Konvoluce funkcí

Definice 170. Nechť μ je kladným násobkem Lebesgueovy míry na $\mathbb{R}^d$ a $f, g\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{K}$. *Konvoluce funkce f s funkcí g* je funkce $f * g$ definovaná jako

$$(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}^d} f(y) g(x-y)\, \mathrm{d}\mu(y)$$

pro taková $x \in \mathbb{R}^d$, pro která integrál konverguje.

Věta 171. *Nechť μ je kladným násobkem Lebesgueovy míry na $\mathbb{R}^d$ a $f, g, h\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{K}$.*

(a) *Operace $*$ je komutativní v následujícím smyslu: funkce $f * g$ a $g * f$ mají stejný definiční obor a jsou si na něm rovny.*

(b) *Operace $*$ je distributivní vzhledem ke sčítání v následujícím smyslu: platí $f*(g+h) = f*g + f*h$ a $(f+g)*h = f*h + g*h$ na definičních oborech pravých stran.*

Lemma 172. *Nechť μ je kladným násobkem Lebesgueovy míry na $\mathbb{R}^d$ a $f, g \in L_1(\mu)$. Položíme-li $F(x, y) = f(y)g(x-y)$ pro $x, y \in \mathbb{R}^d$, pak $F \in L_1(\mu \times \mu)$ a $\|F\|_1 = \|f\|_1 \|g\|_1$.*

Definice 173. Nechť $f\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{K}$ a $y \in \mathbb{R}^d$. Pak definujeme posun funkce f do bodu y jako funkci $\tau_y f\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{K}$ danou předpisem $\tau_y f(x) = f(x-y)$ pro $x \in \mathbb{R}^d$.

Věta 174. *Nechť μ je kladným násobkem Lebesgueovy míry na $\mathbb{R}^d$ a $f \in L_p(\mu)$, $1 \le p < \infty$. Pak zobrazení $\tau\colon \mathbb{R}^d \to L_p(\mu)$ dané předpisem $\tau(x) = \tau_x f$ je stejnoměrně spojité.*

Věta 175. *Nechť μ je kladným násobkem Lebesgueovy míry na $\mathbb{R}^d$ a $f, g\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{K}$.*

(a) *Je-li $f \in L_p(\mu)$ a $g \in L_q(\mu)$, kde $1 \le p, q \le \infty$ jsou sdružené exponenty, pak funkce $f * g$ je definována v každém bodě $\mathbb{R}^n$, je stejnoměrně spojitá a omezená a platí $\|f * g\|_\infty \le \|f\|_p \|g\|_q$.*

(b) *Je-li $f \in L_1^{\mathrm{loc}}(\mu)$ a jestliže $g \in L_\infty(\mu)$ má kompaktní nosič, pak funkce $f * g$ je definována v každém bodě $\mathbb{R}^d$, je spojitá a platí $\mathrm{supp}\, f * g \subset \mathrm{supp}\, f + \mathrm{supp}\, g$.*

(c) *Jsou-li f, g měřitelné, $D \subset \mathbb{R}^d$ měřitelná a $f * g$ je definována alespoň na D, pak $f * g$ je měřitelná na D.*

(d) *Jsou-li $f, g \in L_1(\mu)$, pak $f * g$ je definována μ-s. v. na $\mathbb{R}^d$, $f * g \in L_1(\mu)$ a platí $\|f * g\|_1 \le \|f\|_1 \|g\|_1$.*

Definice 176. Nechť $d \in \mathbb{N}$. Pak $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_d) \in \mathbb{N}_0^d$ nazýváme *multiindexem* délky d. *Řádem multiindexu* α nazýváme číslo $\sum_{i=1}^d \alpha_i$ a značíme jej $|\alpha|$.

Je-li α multiindex délky d, pak symbolem D^α označíme parciální derivaci řádu $|\alpha|$ danou multiindexem α, tj.

$$D^\alpha = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \cdots \partial x_d^{\alpha_d}}$$

(symboly ∂x_i^0 ve vyjádření výše vynecháváme). Speciálně, pro $\alpha = 0 = (0, \dots, 0)$ a $f\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{K}$ je $D^0 f = f$. Symbol D^α se též nazývá diferenciální operátor.

Definice 177. Nechť $A \subset \mathbb{R}^d$. Množina

$$\mathcal{D}(A, \mathbb{K}) = \{\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^d, \mathbb{K});\ \operatorname{supp} \varphi \text{ je kompaktní podmnožina } A\}$$

se nazývá *prostor testovacích funkcí* na A.

Věta 178. *Nechť μ je kladným násobkem Lebesgueovy míry na $\mathbb{R}^d$ a $f, g\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{K}$. Je-li $f \in L_1^{\mathrm{loc}}(\mu)$ a $g \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$, pak $f * g \in C^\infty(\mathbb{R}^d)$ a $D^\alpha(f * g) = f * D^\alpha g$ pro každý multiindex α délky d.*

Definice 179. Nechť μ je kladným násobkem Lebesgueovy míry na $\mathbb{R}^d$. Funkci $g\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ budeme nazývat *regularizačním jádrem* (vzhledem k μ), pokud g je nezáporná, $g \in L_1(\mu)$ a $\|g\|_1 = 1$.

Věta 180. *Nechť μ je kladným násobkem Lebesgueovy míry na $\mathbb{R}^d$, g je regularizační jádro na $\mathbb{R}^d$ a $f\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{K}$. Položme $g_n(x) = n^d g(nx)$ pro $x \in \mathbb{R}^d$ a $n \in \mathbb{N}$.*

(a) Pokud je f stejnoměrně spojitá a omezená na $\mathbb{R}^d$, potom $f * g_n \to f$ stejnoměrně na $\mathbb{R}^d$.

(b) Pokud $f \in L_p(\mu)$ a $1 \le p < \infty$, potom $f * g_n \xrightarrow{L_p} f$.

Důsledek 181. *Nechť μ je kladným násobkem Lebesgueovy míry na $\mathbb{R}^d$, $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ je otevřená a $1 \le p < \infty$. Pak množina $\mathcal{D}(\Omega)$ je hustá v prostoru $L_p(\Omega, \mu)$ (ve smyslu restrikce na Ω).*

2. Fourierova transformace

Pro $d \in \mathbb{N}$ položme $\mu_d = \frac{1}{(2\pi)^{d/2}} \lambda_d$, kde λ_d je Lebesgueova míra na $\mathbb{R}^d$.

Definice 182. Nechť $f \in L_1(\mu_d)$. Pak *Fourierovou transformací funkce* f rozumíme funkci $\widehat{f}\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{K}$ definovanou jako

$$\widehat{f}(t) = \int_{\mathbb{R}^d} f(x) e^{-i\langle t, x\rangle} \, \mathrm{d}\mu_d(x) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{d}{2}}} \int_{\mathbb{R}^d} f(x) e^{-i\langle t, x\rangle} \, \mathrm{d}\lambda_d(x)$$

pro $t \in \mathbb{R}^d$.

Definice 183. Prostorem $C_{\mathrm{b}}(\mathbb{R}^d) = C_{\mathrm{b}}(\mathbb{R}^d, \mathbb{K})$ rozumíme normovaný lineární prostor všech omezených spojitých funkcí na $\mathbb{R}^d$ s normou $\|f\|_\infty = \sup_{x \in \mathbb{R}^d} |f(x)|$.

Definice 184. Prostorem $C_0(\mathbb{R}^d) = C_0(\mathbb{R}^d, \mathbb{K})$ rozumíme prostor spojitých funkcí f na $\mathbb{R}^d$ takových, že pro každé $\varepsilon > 0$ je množina $\{x \in \mathbb{R}^d;\ |f(x)| \ge \varepsilon\}$ omezená. Na $C_0(\mathbb{R}^d)$ uvažujeme normu $\|f\|_\infty = \sup_{x \in \mathbb{R}^d} |f(x)|$.

Je-li $f\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{K}$, pak řekneme, že $\lim_{\|x\| \to +\infty} f(x) = 0$, jestliže pro každé $\varepsilon > 0$ existuje $R > 0$ takové, že $|f(x)| < \varepsilon$ kdykoli $x \in \mathbb{R}^d$, $\|x\| > R$.

Lemma 185 (Georg Friedrich Bernhard Riemann (1853), H. Lebesgue (1903))**.** *Nechť $f \in L_1(\mu_d)$. Pak*

$$\lim_{\|t\| \to +\infty} \int_{\mathbb{R}^d} f(x) e^{-i\langle t, x\rangle} \, \mathrm{d}\mu_d(x) = 0.$$

Věta 186. *Nechť $f, g \in L_1(\mu_d)$ a $j \in \{1, \dots, d\}$. Fourierova transformace má následující vlastnosti:*

(a) $\widehat{f} \in C_0(\mathbb{R}^d)$ a $\|\widehat{f}\|_\infty \le \|f\|_1$. Fourierova transformace je tedy spojité lineární zobrazení z prostoru $L_1(\mathbb{R}^d)$ do prostoru $C_0(\mathbb{R}^d)$.

(b) Nechť $y \in \mathbb{R}^d$. Pak $\widehat{\tau_y f}(t) = e^{-i\langle y, t\rangle} \widehat{f}(t)$ pro každé $t \in \mathbb{R}^d$ a naopak pro funkci $h(x) = e^{i\langle y, x\rangle} f(x)$ platí $\widehat{h} = \tau_y \widehat{f}$.

(c) Je-li $c \neq 0$ a $h(x) = f(\frac{x}{c})$, pak $\widehat{h}(t) = |c|^d \widehat{f}(ct)$ pro každé $t \in \mathbb{R}^d$.

(d) Je-li $h(x) = \overline{f(-x)}$, pak $\widehat{h} = \overline{\widehat{f}}$.

(e) $\widehat{f * g} = \widehat{f}\widehat{g}$.

(f) $\int_{\mathbb{R}^d} \widehat{f} g \,\mathrm{d}\mu_d = \int_{\mathbb{R}^d} f \widehat{g} \,\mathrm{d}\mu_d$.

(g) Jestliže pro funkci $h(x) = -ix_j f(x)$ *platí* $h \in L_1(\mu_d)$, *pak* $\frac{\partial \widehat{f}}{\partial x_j}(t) = \widehat{h}(t)$ *pro každé* $t \in \mathbb{R}^d$.

(h) Jestliže $\frac{\partial f}{\partial x_j}$ *existuje všude na* $\mathbb{R}^d$ *a jestliže* $\frac{\partial f}{\partial x_j} \in L_1(\mu_d)$, *pak* $\widehat{\frac{\partial f}{\partial x_j}}(t) = it_j \widehat{f}(t)$ *pro každé* $t \in \mathbb{R}^d$.

Lemma 187. *Nechť* $f \in L_1(\mathbb{R}^d, \lambda)$, $g \colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{K}$ *je omezená a* $j \in \{1, \dots, d\}$. *Jestliže* $\frac{\partial f}{\partial x_j}$ *a* $\frac{\partial g}{\partial x_j}$ *existují všude na* $\mathbb{R}^d$ *a jestliže* $\frac{\partial f}{\partial x_j} \in L_1(\mathbb{R}^d)$ *a* $\frac{\partial g}{\partial x_j} \in C_{\mathrm{b}}(\mathbb{R}^d)$, *pak* $\int_{\mathbb{R}^d} \frac{\partial f}{\partial x_j} g \,\mathrm{d}\lambda = -\int_{\mathbb{R}^d} f \frac{\partial g}{\partial x_j} \,\mathrm{d}\lambda$.

Příklad 188. Definujme funkci $g \colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ předpisem $g(x) = e^{-\sum_{j=1}^d |x_j|}$. Pak $g \in L_1(\mu_d)$,

$$\widehat{g}(t) = \left(\tfrac{2}{\pi}\right)^{\frac{d}{2}} \prod_{j=1}^{d} \frac{1}{1 + t_j^2},$$

funkce $\widehat{g}$ je nezáporná a $\int_{\mathbb{R}^d} \widehat{g} \,\mathrm{d}\mu_d = 1$.

Lemma 189. *Nechť* $f, g \in L_1(\mu_d)$. *Položme* $g_n(x) = n^d \widehat{g}(-nx)$ *a* $h_n(x) = g(\frac{x}{n})$ *pro* $x \in \mathbb{R}^d$ *a* $n \in \mathbb{N}$. *Pak* $f * g_n(x) = \int_{\mathbb{R}^d} \widehat{f}(t) e^{i\langle t,x\rangle} h_n(t) \,\mathrm{d}\mu_d(t)$ *pro každé* $x \in \mathbb{R}^d$ *a* $n \in \mathbb{N}$.

Věta 190 (o inverzi)**.** *Nechť* $f \in L_1(\mu_d)$. *Je-li* $\widehat{f} \in L_1(\mu_d)$, *pak pro s. v.* $x \in \mathbb{R}^d$ *platí*

$$f(x) = \int_{\mathbb{R}^d} \widehat{f}(t) e^{i\langle x,t\rangle} \,\mathrm{d}\mu_d(t) = \widehat{\widehat{f}}(-x).$$

Je-li navíc f *spojitá, pak vzorec platí pro všechna* $x \in \mathbb{R}^d$.

Důsledek 191. *Fourierova transformace* $\mathcal{F} \colon L_1(\mu_d) \to C_0(\mathbb{R}^d)$ *je prosté zobrazení. Je-li* $g \in L_1(\mu_d)$ *a* $\widehat{g} \in L_1(\mu_d)$, *pak* $g \in \operatorname{Rng} \mathcal{F}$ *a* $\mathcal{F}^{-1}(g)(x) = \widehat{g}(-x)$ *pro s.v.* $x \in \mathbb{R}^d$.

Důsledek 192. *Jsou-li* $f, g \in L_1(\mu_d)$ *takové, že* $\widehat{f}, \widehat{g}, fg, \widehat{fg} \in L_1(\mu_d)$, *pak* $\widehat{fg} = \widehat{f} * \widehat{g}$.

Definice 193. Schwartzův prostor na $\mathbb{R}^d$ je definován následujícím způsobem:

$$\mathcal{S}_d = \left\{ f \in C^\infty(\mathbb{R}^d, \mathbb{C});\ \mathbb{R}^d \ni x \mapsto P(x) D^\alpha f(x) \text{ je omezená pro každé } \alpha \in \mathbb{N}_0^d \text{ a každý polynom } P \text{ na } \mathbb{R}^d \right\}.$$

Lemma 194. *Pro* $N \in \mathbb{N}$ *je funkce* $x \mapsto (1 + \|x\|^2)^N$ *polynom na* $\mathbb{R}^d$. *Pro každý polynom* P *na* $\mathbb{R}^d$ *existují* $N \in \mathbb{N}$ *a* $C > 0$ *taková, že* $|P(x)| \le C(1 + \|x\|^2)^N$ *pro každé* $x \in \mathbb{R}^d$.

Lemma 195. *Nechť* $d \in \mathbb{N}$, $1 \le p < \infty$, $N > \frac{d}{2p}$ *a* $h(x) = \frac{1}{(1+\|x\|^2)^N}$ *pro* $x \in \mathbb{R}^d$. *Pak* $h \in L_p(\mu_d)$.

Tvrzení 196. *Schwartzův prostor má následující vlastnosti:*

(a) $\mathcal{D}(\mathbb{R}^d) \subsetneq \mathcal{S}_d \subset C_0(\mathbb{R}^d) \cap \bigcap_{1 \le p < \infty} L_p(\mu_d)$.

(b) Je-li $f \in \mathcal{S}_d$, $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $b \in \mathbb{R}^d$ *a* $h(x) = f(ax + b)$, *pak* $h \in \mathcal{S}_d$.

(c) Je-li $f \in \mathcal{S}_d$ *a* α *multiindex délky d, pak* $D^\alpha f \in \mathcal{S}_d$.

(d) Je-li $f \in \mathcal{S}_d$ *a jestliže* $g \in C^\infty(\mathbb{R}^d)$ *je omezená a má omezené všechny parciální derivace všech řádů (speciálně, je-li* $g \in \mathcal{S}_d$*), pak* $fg \in \mathcal{S}_d$.

(e) Je-li $f \in \mathcal{S}_d$ *a* $P \colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{C}$ *polynom, pak* $Pf \in \mathcal{S}_d$.

Tvrzení 197. *Nechť* $f \in \mathcal{S}_d$ *a* $\alpha \in \mathbb{N}_0^d$.

(a) $\widehat{D^\alpha f}(t) = (it)^\alpha \widehat{f}(t)$ *pro každé* $t \in \mathbb{R}^d$.

(b) $D^\alpha \widehat{f} = \widehat{m_\alpha f}$, *kde* $m_\alpha(x) = (-ix)^\alpha$.

Definice 198. Pro $N \in \mathbb{N}_0$ a $f \in \mathcal{S}_d$ položme

$$\nu_N(f) = \max_{|\alpha| \le N} \left\| x \mapsto (1 + \|x\|^2)^N D^\alpha f(x) \right\|_\infty.$$

Uvažujme funkci $\sigma : \mathcal{S}_d \times \mathcal{S}_d \to [0, \infty)$ definovanou předpisem

$$\sigma(f, g) := \sum_{N=0}^{\infty} 2^{-N} \min\{\nu_N(f - g), 1\}, \quad f, g \in \mathcal{S}_d.$$

Věta 199. *$(\mathcal{S}_d, \sigma)$ je úplný metrický prostor splňující následující vlastnosti:*

(a) Je–li (f_n) posloupnost v $\mathcal{S}_d$ a $f \in \mathcal{S}_d$, pak $f_n \xrightarrow{\sigma} f$, právě když pro každé $N \in \mathbb{N}_0$ a $\alpha \in \mathbb{N}_0^d$ platí, že

$$(1 + \|x\|^2)^N D^\alpha f(x) \to f(x) \quad \textit{stejnoměrně na } \mathbb{R}^d.$$

(b) Jestliže $f_n \to f$ v prostoru $(\mathcal{S}_d, \sigma)$, pak $f_n \to f$ v $L_p(\mu_d)$ pro každé $1 \leq p < \infty$.

(c) Je-li α multiindex délky d, P polynom na $\mathbb{R}^d$ a $g \in \mathcal{S}_d$, pak zobrazení $f \mapsto D^\alpha f$, $f \mapsto Pf$ a $f \mapsto gf$ jsou spojitá jakožto zobrazení z $(\mathcal{S}_d, \sigma)$ do $(\mathcal{S}_d, \sigma)$.

Věta 200. *Fourierova transformace je homeomorfismus $\mathcal{S}_d$ na $\mathcal{S}_d$. Navíc, pro každé $f \in \mathcal{S}_d$ platí, že*

$$\widehat{\widehat{f}}(x) = f(-x) \textit{ pro každé } x \in \mathbb{R}^d \quad \textit{a} \quad \hat{\hat{\hat{\hat{f}}}} = f.$$

Důsledek 201. *Pro $f, g \in \mathcal{S}_d$ platí $\widehat{fg} = \widehat{f} * \widehat{g}$. Speciálně, prostor $\mathcal{S}_d$ je uzavřený na konvoluci.*

Věta 202 (Michel Plancherel, 1910)**.** *Existuje právě jedna lineární izometrie $F\colon L_2(\mu_d) \to L_2(\mu_d)$ na taková, že $F(f) = \widehat{f}$ pro každou $f \in L_2(\mu_d) \cap L_1(\mu_d)$.*