

CVIČENÍ 1

1. Teoretičtější příklady

a) Dokažte následující tvrzení (až je dokážete, je možné je používat jako “známá tvrzení”).

Věta 1. Nechť P a Q jsou metrické prostory, $f, g : P \rightarrow Q$ jsou spojitá zobrazení a $M \subset P$ je hustá v P . Jestliže $f = g$ na M , pak $f = g$ na celém P .

Věta 2. Nechť (P, ρ) je metrický prostor a $A \subset P$. Pak funkce $x \mapsto \text{dist}(x, A)$ je 1-Lipschitzovská na P .

Věta 3. Součin $X_1 \times X_2 \times \dots \times X_n$ úplných metrických prostorů $X_1, \dots, X_n$ je též úplný.

2. Teoretičtější příklady, které by ale studenti opravdu měli ovládat

a) Nechť X je normovaný lineární prostor. Ukažte, že $B(x, r) = x + B(0, r)$ a $B(0, r) = rB(0, 1)$.

b) Ukažte, že $B(x, r)$ a $U(x, r)$ jsou konvexní množiny.

c) Nechť X je normovaný lineární prostor nad $\mathbb{K}$, $M \subset X$ a $\alpha \in \mathbb{K}$. Ukažte, že $\overline{\alpha M} = \alpha \overline{M}$.

d) Ukažte, že v normovaném lineárním prostoru platí $\overline{U(x, r)} = B(x, r)$, $\text{Int } B(x, r) = U(x, r)$ a $\partial U(x, r) = \partial B(x, r) = S(x, r)$. Naleznete příklad metrického prostoru, kde tyto rovnosti neplatí.

3. Konkrétnější příklady

a) Nechť je dána posloupnost $(f_n)_{n=1}^\infty$ v $\mathbb{R}^\mathbb{N}$ předpisem

$$f_n(k) := \frac{k+1}{k^2+2} + \frac{n+1}{n^2k}, \quad n, k \in \mathbb{N}.$$

Uvažujte postupně Banachovy prostory $X \in \{c_0, \ell_1, \ell_2, \ell_3, \ell_\infty\}$. Zjistěte, zda f_n , $n \in \mathbb{N}$, jsou prvky Banachova prostoru X . Dále zjistěte, zda je posloupnost (f_n) konvergentní v Banachových prostorech c_0 a ℓ_∞ (a pokud ano, určete její limitu).

b) Nechť je dána posloupnost funkcí $f_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, jejichž hodnota v bodě 0 je zvolena libovolně a které jsou na $(0, 1]$ dány předpisem

$$f_n(x) := \frac{e^x - 1}{\sqrt[3]{x^4}} + \frac{n^2}{(n^2 - 1 + e^x)^2}, \quad n \in \mathbb{N}, \quad x \in (0, 1].$$

Uvažujte postupně Banachovy prostory $X \in \{C([0, 1]), L_1([0, 1]), L_2([0, 1]), L_3([0, 1]), L_\infty([0, 1])\}$. Zjistěte, zda f_n , $n \in \mathbb{N}$, jsou prvky Banachova prostoru X . Pokud ano, zjistěte, zda je posloupnost (f_n) konvergentní v Banachově prostoru X (a pokud ano, určete její limitu).

c) Nechť je dána posloupnost $(f_n)_{n=1}^\infty$ v $\mathbb{R}^\mathbb{N}$ předpisem

$$f_n(k) := \frac{1}{(k+1)^{2/3}} + \frac{1}{\sqrt{n}} \mathbf{1}_{\{n < k \leq 2n\}}, \quad n, k \in \mathbb{N}.$$

Uvažujte postupně Banachovy prostory $X \in \{c_0, \ell_1, \ell_2, \ell_3, \ell_\infty\}$. Zjistěte, zda f_n , $n \in \mathbb{N}$, jsou prvky prostoru X . Pokud ano, zjistěte, zda je posloupnost (f_n) v X konvergentní (a pokud ano, určete její limitu).

d) Nechť je dána posloupnost funkcí $g_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, předpisem

$$g_n(x) := n^{1/3} \max\{1 - nx, 0\}, \quad n \in \mathbb{N}, \quad x \in [0, 1].$$

Uvažujte postupně Banachovy prostory $X \in \{C([0, 1]), L_1([0, 1]), L_2([0, 1]), L_3([0, 1]), L_\infty([0, 1])\}$. Zjistěte, zda g_n , $n \in \mathbb{N}$, jsou prvky prostoru X . Pokud ano, zjistěte, zda je posloupnost (g_n) v X konvergentní (a pokud ano, určete její limitu).

e) Nechť je dána posloupnost $(h_n)_{n=1}^\infty$ v $\mathbb{R}^\mathbb{N}$ předpisem

$$h_n(k) := \frac{1}{k^{1/2+1/(n+2)}}, \quad n, k \in \mathbb{N}.$$

Uvažujte postupně Banachovy prostory $X \in \{c_0, \ell_1, \ell_2, \ell_3, \ell_\infty\}$. Zjistěte, zda h_n , $n \in \mathbb{N}$, jsou prvky prostoru X . Pokud ano, zjistěte, zda je posloupnost (h_n) v X konvergentní (a pokud ano, určete její limitu).

f) Nechť je dána posloupnost funkcí $u_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, jejichž hodnota v bodě 0 je zvolena libovolně a které jsou na $(0, 1]$ dány předpisem

$$u_n(x) := x^{-1/3+1/(n+4)}, \quad n \in \mathbb{N}, \quad x \in (0, 1].$$

Uvažujte postupně Banachovy prostory $X \in \{C([0, 1]), L_1([0, 1]), L_2([0, 1]), L_3([0, 1]), L_\infty([0, 1])\}$. Zjistěte, zda u_n , $n \in \mathbb{N}$, jsou prvky prostoru X . Pokud ano, zjistěte, zda je posloupnost (u_n) v X konvergentní (a pokud ano, určete její limitu).

4. Teoretičtější příklady

a) Na prostoru $\mathbb{R}^2$ definujeme

$$q(x, y) := \sqrt{x^2 + xy + y^2}.$$

Ukažte pomocí tvrzení o normě a jednotkové kouli, že q je norma. Je prostor $(\mathbb{R}^2, q)$ Banachův?
(Pro zajímavost můžete zkusit zjistit, jak vypadá jednotková koule.)

b) Označme $\text{Lip}([0, 1])$ vektorový prostor všech lipschitzovských funkcí $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{K}$ a položme

$$\text{lip}(f) := \sup_{s \neq t} \frac{|f(s) - f(t)|}{|s - t|}.$$

Ukažte pomocí tvrzení o normě a jednotkové kouli, že $\|f\|_{\text{Lip}} := |f(0)| + \text{lip}(f)$ je norma. Pomocí Testu úplnosti dokažte, že takto vzniklý prostor je Banachův.

c) Pro posloupnost $x = (x_n)_{n=1}^\infty$ položme

$$\text{var}(x) := \sum_{n=1}^\infty |x_{n+1} - x_n|, \quad bv := \{x \in \mathbb{K}^\mathbb{N} : \text{var}(x) < \infty\}.$$

Ukažte, že každá posloupnost z bv je konvergentní a že $\|x\|_{bv} := |x_1| + \text{var}(x)$ je norma. Pomocí tvrzení o rozšířené normě dokažte, že $(bv, \|\cdot\|_{bv})$ je Banachův prostor.

d) Označme

$$bs := \left\{ x = (x_n) \in \mathbb{K}^\mathbb{N} : \sup_{N \in \mathbb{N}} \left| \sum_{n=1}^N x_n \right| < \infty \right\}, \quad \|x\|_{bs} := \sup_{N \in \mathbb{N}} \left| \sum_{n=1}^N x_n \right|.$$

Ukažte, že každý prvek bs je omezená posloupnost, že $\|\cdot\|_{bs}$ je norma a že $(bs, \|\cdot\|_{bs})$ je Banachův prostor. Při důkazu úplnosti použijte tvrzení o rozšířené normě.

—————VÝSLEDKY a HINTY—————

3. Konkrétnější příklady

- a) $f_n \in c_0 \cap \ell_2 \cap \ell_3 \cap \ell_\infty$, ale $f_n \notin \ell_1$; v c_0 i ℓ_∞ platí $f_n \rightarrow a$, kde $a(k) = (k+1)/(k^2+2)$.
b) $f_n \in L_1 \cap L_2$, ale $f_n \notin C([0, 1]) \cup L_3 \cup L_\infty$; v L_1 i L_2 platí $f_n \rightarrow a$, kde $a(x) = (e^x - 1)/x^{4/3}$ pro $x > 0$.
c) $f_n \in c_0 \cap \ell_2 \cap \ell_3 \cap \ell_\infty$, ale $f_n \notin \ell_1$; v c_0 , ℓ_3 a ℓ_∞ platí $f_n \rightarrow a$, kde $a(k) = (k+1)^{-2/3}$, zatímco v ℓ_2 posloupnost nekonverguje.
d) g_n patří do všech uvedených prostorů; k nule konverguje v L_1 a L_2 , nikoli však v L_3 , L_∞ ani $C([0, 1])$.
e) $h_n \in c_0 \cap \ell_2 \cap \ell_3 \cap \ell_\infty$, ale $h_n \notin \ell_1$; v c_0 , ℓ_3 a ℓ_∞ platí $h_n \rightarrow h$, kde $h(k) = k^{-1/2}$, zatímco v ℓ_2 posloupnost nekonverguje.
f) $u_n \in L_1 \cap L_2 \cap L_3$, ale $u_n \notin C([0, 1]) \cup L_\infty$; v L_1 a L_2 platí $u_n \rightarrow u$, kde $u(x) = x^{-1/3}$ pro $x > 0$, zatímco v L_3 posloupnost nekonverguje.

4. Teoretičtější příklady – hinty

- a) Položte $Q = q^2$ a použijte $Q(x, y) = (x + y/2)^2 + 3y^2/4$ a $Q((1-t)u + tv) \leq (1-t)Q(u) + tQ(v)$. Úplnost plyne z konečné dimenze.
b) Využijte $\text{lip}((1-t)f + tg) \leq (1-t)\text{lip}(f) + t\text{lip}(g)$ a $\|f\|_\infty \leq \|f\|_{\text{Lip}}$. Na řadu s $\sum_n \|f_n\|_{\text{Lip}} < \infty$ aplikujte stejnoměrnou konvergenci a odhadněte Lipschitzovu konstantu zbytku.
c) Pro $m > n$ odhadněte $|x_m - x_n|$ koncem řady $\sum_k |x_{k+1} - x_k|$. Na ℓ_∞ použijte rozšířenou normu $\varphi(x) = |x_1| + \sum_n |x_{n+1} - x_n|$; je zdola polospojité jako supremum konečných součtů.
d) Pro $s_N = \sum_{n=1}^N x_n$ platí $x_n = s_n - s_{n-1}$, tedy $\|x\|_\infty \leq 2\|x\|_{bs}$. Na ℓ_∞ použijte zdola polospojitou rozšířenou normu $\varphi(x) = 2 \sup_N |s_N(x)|$.

CVIČENÍ 2

1. Teoretičtější příklady

a) Dokažte následující tvrzení (až je dokážete, je možné je používat jako “známá tvrzení”).

Věta 4 (rozšíření z husté množiny). Nechť (P, ρ) a (Q, σ) jsou metrické prostory, Q je úplný, $M \subset P$ je hustá množina a $f : M \rightarrow Q$ je stejnoměrně spojitě zobrazení. Pak existuje právě jedno spojitě zobrazení $F : P \rightarrow Q$ takové, že $F|_M = f$. Zobrazení F je stejnoměrně spojitě. Je-li navíc f L -lipschitzovské, je také F L -lipschitzovské.

b) Pro $1 \leq p < \infty$ dokažte separabilitu prostorů c a ℓ_p .

c) Dokažte, že prostor ℓ_∞ není separabilní. Je-li I nespočetná množina a $1 \leq p < \infty$, dokažte totéž pro $c_0(I)$ a $\ell_p(I)$.

2. Normy funkcíonálů

V každém z následujících případů ověřte, že $\varphi : X \rightarrow \mathbb{K}$ je spojitý lineární funkcíonál, spočítejte $\|\varphi\|$ a rozhodněte, zda φ nabývá své normy.

- a) $X = \ell_1$, $\varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n}{n+1} x_n$.
- b) $X = c_0$, $\varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3^n} x_n$.
- c) $X = \ell_2$, $\varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n}{\sqrt{n(n+1)}}$.
- d) $X = \ell_p$, kde $1 < p < \infty$, $\varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} x_n$.
- e) $X = C([0, 1])$, $\varphi(f) = \int_0^1 \left(t - \frac{1}{3}\right) f(t) dt$.
- f) $X = L_\infty([0, 1])$, $\varphi(f) = \int_0^1 \left(t - \frac{1}{3}\right) f(t) dt$.
- g) $X = L_1([0, 1])$, $\varphi(f) = \int_0^1 t^2 f(t) dt$.
- h) $X = L_1([0, 1])$, $\varphi(f) = \int_0^{1/2} f(t) dt$.

3. Vztahy mezi klasickými prostory

- a) Nechť $1 \leq p < q < \infty$. Dokažte spojitě a vlastní inkluze $\ell_p \subsetneq \ell_q \subsetneq c_0$ a určete normu kanonického vnoření $\ell_p \hookrightarrow \ell_q$.
- b) Nechť $1 \leq p < q < \infty$. Dokažte spojitou a vlastní inkluzi $L_q([0, 1]) \subsetneq L_p([0, 1])$ a určete normu kanonického vnoření.
- c) Nechť $1 \leq p < q < \infty$. Ukažte pomocí dvou konkrétních funkcí, že mezi $L_p(\mathbb{R})$ a $L_q(\mathbb{R})$ neplatí inkluze ani jedním směrem.

4. Prostory z minulého cvičení

a) Nechť $X = (\mathbb{R}^2, q)$, kde $q(x, y) = \sqrt{x^2 + xy + y^2}$, a definujeme

$$\varphi_1(x, y) = x, \quad \varphi_2(x, y) = x + y, \quad \varphi_3(x, y) = x - y.$$

Ukažte, že $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3 \in X^*$, spočítejte jejich normy a nalezněte body jednotkové sféry, v nichž své normy nabývají.

b) Na prostoru bv uvažujte funkcíonály

$$L(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n, \quad E_m(x) = x_m \quad (m \in \mathbb{N}), \quad \Psi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+1} (x_{n+1} - x_n).$$

Ukažte, že jsou spojitě, spočítejte jejich normy a rozhodněte, zda své normy nabývají.

c) Ukažte, že předpis

$$\Theta(x) = \sum_{N=1}^{\infty} 2^{-N} \sum_{n=1}^N x_n, \quad x \in bs,$$

definuje spojitý lineární funkcíonál na bs . Spočítejte jeho normu a rozhodněte, zda ji nabývá.

d) Pro $t \in [0, 1]$ definujte na $\text{Lip}([0, 1])$ funkcíonál $\delta_t(f) = f(t)$ a dále položte

$$\Lambda(f) = f(1) - \int_0^1 f(t) dt.$$

Spočítejte normy funkcíonálů δ_t , $\delta_s - \delta_t$ a Λ a rozhodněte, zda své normy nabývají. Potom pomocí funkcí $f_t(u) = \min\{u, t\}$, $t \in [0, 1]$, rozhodněte, zda je $\text{Lip}([0, 1])$ separabilní.

2. Normy funkcí – výsledky

- a) $\|\varphi\| = 1$; norma se nenabývá.
- b) $\|\varphi\| = 1/2$; norma se nenabývá.
- c) $\|\varphi\| = 1$; norma se nabývá.
- d) Je-li $p' = p/(p-1)$, pak $\|\varphi\| = (2^{p'} - 1)^{-1/p'}$; norma se nabývá (pro nabývání normy si vzpomeňte, kdy je Hölderova nerovnost ve skutečnosti rovnost).
- e) $\|\varphi\| = 5/18$; norma se nenabývá.
- f) $\|\varphi\| = 5/18$; norma se nabývá.
- g) $\|\varphi\| = 1$; norma se nenabývá.
- h) $\|\varphi\| = 1$; norma se nabývá.

3. Vztahy mezi klasickými prostory – výsledky

- a) Platí $\ell_p \subsetneq \ell_q \subsetneq c_0$ a $\|\ell_p \hookrightarrow \ell_q\| = 1$. Pro $\alpha = (1/p + 1/q)/2$ je $(n^{-\alpha})_n \in \ell_q \setminus \ell_p$ a $(n^{-1/q})_n \in c_0 \setminus \ell_q$.
- b) Platí $L_q([0, 1]) \subsetneq L_p([0, 1])$ a norma vnoření je 1. Příkladem prvku rozdílu je $f(t) = t^{-\alpha}$, kde $\alpha = (1/p + 1/q)/2$.
- c) Pro $\alpha = (1/p + 1/q)/2$ platí

$$t^{-\alpha} \mathbf{1}_{(0,1)}(t) \in L_p(\mathbb{R}) \setminus L_q(\mathbb{R}), \quad t^{-\alpha} \mathbf{1}_{[1,\infty)}(t) \in L_q(\mathbb{R}) \setminus L_p(\mathbb{R}).$$

4. Prostory z minulého cvičení – výsledky a hinty

- a) Hint: normu $q(x, y)^2$ zkuste vyjádřit ve tvaru $C \cdot \varphi_1(x, y)^2 + \varepsilon(x, y)$ pro nějaké $C > 0$ a nějakou funkci $\varepsilon(x, y)$.
Výsledek: pro $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ jsou normy a příslušné normující body po řadě

$$\|\varphi_1\| = \frac{2}{\sqrt{3}}, \quad \left(\frac{2}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}} \right); \quad \|\varphi_2\| = \frac{2}{\sqrt{3}}, \quad \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}} \right); \quad \|\varphi_3\| = 2, \quad (1, -1).$$

- b) Platí

$$\|L\| = \|E_m\| = \|\Psi\| = 1.$$

Funkcionály L a E_m své normy nabývají, zatímco Ψ nikoli.

- c) $\|\Theta\| = 1$ a norma se nabývá například v bodě $x = e_1 = (1, 0, 0, \dots)$.
- d) Platí

$$\|\delta_t\| = 1, \quad \|\delta_s - \delta_t\| = |s - t|, \quad \|\Lambda\| = \frac{1}{2}.$$

První normy se nabývají na konstantních funkcích, druhé a třetí na funkci $f(u) = u$ (je-li $s \neq t$, případně po změně znaménka). Pro $s \neq t$ je $\|f_s - f_t\|_{\text{Lip}} = 1$, takže $\{f_t : t \in [0, 1]\}$ je nespočetná 1-separovaná množina. Prostor $\text{Lip}([0, 1])$ proto není separabilní.

1. Teoretičtější příklady

a) Dokažte následující tvrzení (až je dokážete, je možné je používat jako “známé tvrzení”).

Věta 5. Necht' K je kompaktní metrický prostor. Pak prostor $C(K)$ je separabilní.

2. Normy a vlastnosti operátorů

V každém z následujících případů ověřte, že $T : X \rightarrow Y$ je spojitý lineární operátor, spočtěte jeho normu a rozhodněte, zda existuje $x \in S_X$ takové, že $\|Tx\| = \|T\|$. Dále zodpovězte následující otázky:

- Je operátor T prostý? Pokud ne, určete jeho jádro.
- Je operátor T na?
- Je T izometrické vnoření?
- Je T izomorfismem na svůj obor hodnot? Pokud ano, popište jeho obor hodnot a spočtěte normu inverzního operátoru.

a) $X = Y = \ell_2$, $T(x_1, x_2, x_3, x_4, \dots) = (x_1, 0, x_3, 0, \dots)$

b) $X = Y = \ell_2$, $T(x_1, x_2, \dots) = 2^{-1/2}(x_1, x_1, x_2, x_2, \dots)$

c) $X = Y = \ell_2$, $T((x_n)) = \left(\frac{n}{n+1}x_{n+1}\right)_{n=1}^\infty$

d) $X = Y = \ell_2$, $T((x_n)) = \left(\left(2 + \frac{1}{n}\right)x_n\right)_{n=1}^\infty$

e) $X = Y = C([0, 1])$, $(Tf)(t) = \int_0^1 (t+s)f(s) ds$

f) $X = Y = C([0, 1])$, $(Tf)(t) = tf(t)$

g) $X = Y = C([0, 1])$, $(Tf)(t) = \int_0^t sf(s) ds$

h) $X = Y = C([0, 1])$, $(Tf)(t) = \int_0^t f(s) ds - t \int_0^1 f(s) ds$

(Cvičení h) je těžší ..)

3. Prostory z minulého cvičení

a) Definujte

$$D : bv \longrightarrow \ell_1, \quad D(x) = (x_1, x_2 - x_1, x_3 - x_2, \dots).$$

Ukažte, že D je izometrický izomorfismus, a nalezněte vzorec pro D^{-1} . Rozhodněte, zda je bv separabilní, a spočtěte normu kanonického vnoření $bv \hookrightarrow \ell_\infty$.

b) Definujte

$$S : bs \longrightarrow \ell_\infty, \quad S(x) = \left(\sum_{n=1}^N x_n\right)_{N=1}^\infty.$$

Ukažte, že S je izometrický izomorfismus, a nalezněte vzorec pro S^{-1} . Rozhodněte, zda je bs separabilní, a spočtěte normu kanonického vnoření $bs \hookrightarrow \ell_\infty$.

4. Řady

a) Pro $1 \leq p < \infty$ a $x = (x_n)$ dokažte

$$x = \sum_{n=1}^\infty x_n e_n$$

v normě prostoru ℓ_p , je-li $x \in \ell_p$, a v normě prostoru c_0 , je-li $x \in c_0$. Ukažte, že v ℓ_∞ toto obecně neplatí, a určete uzávěr lineárního obalu množiny $\{e_n : n \in \mathbb{N}\}$ v ℓ_∞ .

b) Ověřte, že následující řady jsou bezpodmínečně, ale nikoli absolutně konvergentní:

(i) $\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n} e_n$ v ℓ_p pro každé $1 < p < \infty$;

(ii) $\sum_{n=1}^\infty g_n$ v $C([0, 1])$, kde g_n je po částech lineární funkce s nosičem $[2^{-(n+1)}, 2^{-n}]$, je nulová v krajních bodech tohoto intervalu a v jeho středu má hodnotu $1/n$.

c) Necht' (x_n) je posloupnost v Banachově prostoru X . Dokažte, že následující podmínky jsou ekvivalentní:

(i) řada $\sum_{n=1}^\infty x_n$ je bezpodmínečně konvergentní;

(ii) pro každou volbu $\varepsilon_n \in \{-1, 1\}$ konverguje řada $\sum_{n=1}^\infty \varepsilon_n x_n$.

d) Ověřte, že řada $\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n}(e_n - e_{n+1})$ je v prostoru bs bezpodmínečně, ale nikoli absolutně konvergentní.

e) Položme $I_n = (2^{-(n+1)}, 2^{-n})$ a

$$h_n(t) = \frac{1}{n} \int_0^t \mathbf{1}_{I_n}(s) ds, \quad t \in [0, 1].$$

Ověřte, že $h_n \in \text{Lip}([0, 1])$ a že řada $\sum_{n=1}^\infty h_n$ je v tomto prostoru bezpodmínečně, ale nikoli absolutně konvergentní.

2. Normy a vlastnosti operátorů

- a) Platí $\|T\| = 1$ a norma se nabývá. Operátor není prostý ani na, $\ker T = \{x \in \ell_2 : x_{2n-1} = 0 \text{ pro každé } n \in \mathbb{N}\}$ a $T(\ell_2) = \{x \in \ell_2 : x_{2n} = 0 \text{ pro každé } n \in \mathbb{N}\}$. Není izometrií ani izomorfismem na svůj obor hodnot.
- b) Platí $\|T\| = 1$ a norma se nabývá. Operátor je izometrickým vnořením a $T(\ell_2) = \{y \in \ell_2 : y_{2n-1} = y_{2n} \text{ pro každé } n \in \mathbb{N}\}$. Není na ℓ_2 a pro inverzní operátor na $T(\ell_2)$ platí $\|T^{-1}\| = 1$.
- c) Platí $\|T\| = 1$, ale norma se nenabývá. Operátor je na, není prostý a $\ker T = \text{span}\{e_1\}$. Není izometrií ani izomorfismem.
- d) Platí $\|T\| = 3$ a norma se nabývá. Operátor je izomorfismem ℓ_2 na ℓ_2 , není izometrií a $\|T^{-1}\| = 1/2$.
- e) Platí $\|T\| = 3/2$ a norma se nabývá. Dále $T(C([0, 1])) = \text{span}\{1, t\}$ a $\ker T = \{f \in C([0, 1]) : \int_0^1 f(s) ds = \int_0^1 sf(s) ds = 0\}$. Operátor není prostý ani na a není izomorfismem na svůj obor hodnot.
- f) Platí $\|T\| = 1$ a norma se nabývá. Operátor je prostý, není na a $T(C([0, 1])) = \{g \in C([0, 1]) : g(0) = 0 \text{ a } g(t)/t \text{ má spojitě rozšíření do } [0, 1]\}$. Není izometrií ani izomorfismem na svůj obor hodnot.
- g) Platí $\|T\| = 1/2$ a norma se nabývá. Operátor je prostý, není na a $T(C([0, 1])) = \{g \in C^1([0, 1]) : g(0) = 0 \text{ a } g'(t)/t \text{ má spojitě rozšíření do } [0, 1]\}$. Není izometrií ani izomorfismem na svůj obor hodnot.
- h) Platí $\|T\| = 1/2$, ale norma se nenabývá. Operátor není prostý ani na, $\ker T = \text{span}\{1\}$ a $T(C([0, 1])) = \{g \in C^1([0, 1]) : g(0) = g(1) = 0\}$. Není izometrií ani izomorfismem.

3. Prostory z minulého cvičení

- a) D je izometrický izomorfismus a $(D^{-1}y)_n = \sum_{k=1}^n y_k$ pro $y \in \ell_1$. Tedy bv je separabilní. Navíc $\|x\|_\infty \leq \|x\|_{bv}$ a norma vnoření $bv \hookrightarrow \ell_\infty$ je 1.
- b) S je izometrický izomorfismus a pro $s_0 = 0$ platí $(S^{-1}s)_n = s_n - s_{n-1}$ pro $s \in \ell_\infty$. Prostor bs není separabilní. Kanonické vnoření $bs \hookrightarrow \ell_\infty$ má normu 2; rovnosti dosáhne například $x = (1, -2, 0, 0, \dots)$.

5. Řady – výsledky a hinty

- a) V ℓ_p je norma zbytku rovna $(\sum_{n>N} |x_n|^p)^{1/p}$, v c_0 je rovna $\sup_{n>N} |x_n|$. V ℓ_∞ například konstantní posloupnost nelze takto aproximovat. Hledaný uzávěr je c_0 .
- b) Použijte Bolzanovu–Cauchyovu podmínku pro zobecněné řady. V (i) pro konečnou množinu $F \subset \{N+1, N+2, \dots\}$ odhadněte normu $\sum_{n \in F} n^{-1}e_n$ pomocí zbytku řady $\sum_n n^{-p}$. V (ii) využijte, že v každém bodě je nenulová nejvýše jedna z funkcí g_n . Absolutní konvergenci v obou případech vylučuje rovnost $\|n^{-1}e_n\|_p = \|g_n\|_\infty = 1/n$.
- c) Obě podmínky jsou ekvivalentní. V jednom směru použijte bezpodmínečnou Bolzanovu–Cauchyovu podmínku a rozdělte každý konečný interval indexů podle znamének. Obráceně nejprve volbou všech znamének rovných 1 získejte konvergenci $\sum_n x_n$. Kdyby bezpodmínečná Bolzanova–Cauchyova podmínka neplatila, zvolte po sobě jdoucí konečné množiny F_k s velkými součty a na intervalech obsahujících F_k položte $\varepsilon_n = 1$ na F_k a $\varepsilon_n = -1$ mimo F_k . Takto vzniklá oznaménkovaná řada nebude splňovat cauchyovskou podmínku.
- d) Pro libovolnou volbu znamének odhadněte v normě prostoru bs konečné zbytky řady. Všimněte si, že součet prvních k souřadnic vektoru $\sum_{n=N+1}^M \varepsilon_n n^{-1}(e_n - e_{n+1})$ je buď nula, nebo ε_k/k . Pro neabsolutní konvergenci spočtete $\|e_n - e_{n+1}\|_{bs}$.
- e) Platí $h_n(0) = 0$ a $\text{lip}(h_n) = 1/n$. Díky disjunktnosti intervalů I_n má každý zbytek libovolně oznaménkované řady Lipschitzovu konstantu nejvýše $1/(N+1)$. Řada tedy konverguje bezpodmínečně, ale nikoli absolutně, neboť $\sum_n \|h_n\|_{\text{Lip}} = \sum_n 1/n = \infty$.

1. Teoretičtější příklad

a) Dokažte následující tvrzení (až je dokážete, je možné je používat jako “známé tvrzení”).

Věta 6. Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ je lebesgueovsky měřitelná a $1 \leq p < \infty$. Pak je prostor $L_p(\Omega)$ separabilní.

2. Normy a vlastnosti operátorů

V každém z následujících případů ověřte, že $T : X \rightarrow Y$ je spojitý lineární operátor, spočítejte jeho normu a rozhodněte, zda ji nabývá. Dále určete jeho jádro a obor hodnot a rozhodněte, zda je prostý, na, izometrické vnoření nebo izomorfismus na svůj obor hodnot. Je-li izomorfismem na svůj obor hodnot, spočítejte také normu inverzního operátoru $T^{-1} : T(X) \rightarrow X$.

- a) $X = C^1([0, 1])$, $Y = C([0, 1])$, $Tf = f'$ b) $X = Y = L_p([0, 1])$, $1 \leq p \leq \infty$, $(Tf)(t) = f(t^{1/3})$
c) $X = Y = L_p([0, 1])$, $1 \leq p \leq \infty$, $(Tf)(t) = tf(t)$ d) $X = Y = C([0, 1])$, $(Tf)(t) = f(t) - f(0)$
e) $X = Y = C([0, 1])$, $(Tf)(t) = \frac{1}{2}(f(t) + f(1 - t))$ f) $X = c$, $Y = c_0$, $T((x_n)) = (x_n - \lim_k x_k)_{n=1}^\infty$
g) Nechť $1 \leq p < \infty$ a $I_n = (2^{-n}, 2^{-(n-1)}]$. Definujte $T : \ell_p \rightarrow L_p([0, 1])$ předpisem

$$(Tx)(t) = 2^{n/p} x_n \quad \text{pro } t \in I_n.$$

Vyřešte pro tento operátor stejné otázky jako výše a popište explicitně jeho obor hodnot.

3. Úlohy ze zkouškových písemek

a) (ZS 2025/2026, Ondřej Kalenda, varianta A)

Nechť $R > 0$ a $X = L_2((0, R)) \oplus_1 L_\infty((0, R))$. Pro $(f, g) \in X$ položme

$$\varphi_1(f, g) = \int_0^R f(t) dt, \quad \varphi_2(f, g) = \int_0^R g(t) dt.$$

Ukažte, že $\varphi_1, \varphi_2 \in X^*$, spočítejte jejich normy a rozhodněte, zda je nabývají. Pro $c \in \mathbb{K}$ totéž proveďte pro $\varphi_1 + c\varphi_2$ a určete, pro která c je jeho norma nejmenší.

b) (ZS 2025/2026, Ondřej Kalenda, varianta B, upraveno)

Nechť $1 \leq p < \infty$ a definujeme

$$T : L_p((1, \infty)) \longrightarrow \ell_p, \quad Tf = \left(\int_n^{n+1} f(t) dt \right)_{n=1}^\infty.$$

Ukažte, že T je spojitý lineární operátor, spočítejte jeho normu a rozhodněte, zda ji nabývá. Popište $\ker T$, rozhodněte, zda je T na, a v kladném případě naleznete spojitý lineární operátor $S : \ell_p \rightarrow L_p((1, \infty))$ takový, že $TS = \text{Id}_{\ell_p}$.

c) (ZS 2019/2020, Jiří Spurný, 21. 1. 2020)

Pro $k \in \mathbb{Z}$ uvažujte předpis

$$\varphi_k(f) = \int_{-\pi}^{\pi} f(t)(\sin t)^k dt.$$

Zjistěte, pro která k definuje φ_k spojitý lineární funkcionál na $C([-\pi, \pi])$ a pro která na $L_\infty([-\pi, \pi])$. V obou případech spočítejte jeho normu a rozhodněte, zda ji nabývá.

4. Komplementované podprostory

a) Pro $x = (x_n) \in c$ položme $\ell(x) = \lim_n x_n$ a

$$Px = (x_n - \ell(x))_{n=1}^\infty.$$

Ukažte, že P je spojitá projekce prostoru c na c_0 , a spočítejte její normu. Dále ukažte, že předpis

$$Jx = (\ell(x), x_1 - \ell(x), x_2 - \ell(x), \dots)$$

definuje izomorfismus prostoru c na c_0 .

b) Nechť K je nekonečný kompaktní metrický prostor. Zvolte po dvou různé body $t_n \rightarrow t_0$ a spojitě funkce $u_n : K \rightarrow [0, 1]$ s navzájem disjunktními nosiči tak, aby $u_n(t_n) = 1$ a $u_n(t_0) = 0$. Ukažte, že

$$J((a_n)) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n u_n, \quad (a_n) \in c_0,$$

definuje izometrické vnoření $J : c_0 \rightarrow C(K)$ a že předpis

$$Pf = \sum_{n=1}^{\infty} (f(t_n) - f(t_0)) u_n, \quad f \in C(K),$$

definuje spojitou projekci na $J(c_0)$. Odhadněte $\|P\|$.

c) Necht' $1 \leq p < \infty$ a $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ je prostor s mírou, v němž existují po dvou disjunktní množiny $A_n \in \mathcal{A}$, $n \in \mathbb{N}$, takové, že $0 < \mu(A_n) < \infty$. Sestrojte operátory

$$T : \ell_p \longrightarrow L_p(\mu), \quad S : L_p(\mu) \longrightarrow \ell_p,$$

pro něž $\|T\| = \|S\| = 1$ a $S \circ T = \text{Id}_{\ell_p}$. Odvoďte, že ℓ_p je izometrický s 1-komplementovaným podprostorem $L_p(\mu)$.

Návod: Použijte normalizované charakteristické funkce množin A_n a integrály funkcí přes tyto množiny.

d) Necht' $1 \leq p < \infty$. Rozložte $\mathbb{R}$ na intervaly $[k, k+1]$, $k \in \mathbb{Z}$, a interval $(0, 1]$ na dyadické intervaly $I_n = (2^{-n}, 2^{-(n-1)}]$, $n \in \mathbb{N}$. Pomocí bijekce mezi $\mathbb{N}$ a $\mathbb{Z}$ a vhodných afinních zobrazení intervalů sestrojte izometrický izomorfismus $L_p(\mathbb{R}) \longrightarrow L_p([0, 1])$.

—————VÝSLEDKY a HINTY—————

Výsledek k části 2

a) Platí $\|T\| = 1$, ale norma se nenabývá. Dále $\ker T = \{f : f \text{ je konstantní}\}$ a $T(C^1([0, 1])) = C([0, 1])$. Operátor je na, není prostý ani izometrický a není izomorfismem na svůj obor hodnot.

b) Pro $1 \leq p < \infty$ platí $\|T\| = 3^{1/p}$ a norma se nenabývá. Operátor je prostý a $T(L_p) = \{g \in L_p([0, 1]) : \int_0^1 |g(t)|^p t^{-2/3} dt < \infty\}$. Není na, není izometrickým vnořením ani izomorfismem na svůj obor hodnot. Pro $p = \infty$ je T izometrickým izomorfismem prostoru $L_\infty([0, 1])$ na sebe, $\|T\| = \|T^{-1}\| = 1$ a $(T^{-1}g)(s) = g(s^3)$.

c) Platí $\|T\| = 1$. Pro $1 \leq p < \infty$ se norma nenabývá, pro $p = \infty$ se nabývá. Operátor je prostý a $T(L_p) = \{g \in L_p([0, 1]) : g(t)/t \in L_p([0, 1])\}$. Není na, není izometrickým vnořením ani izomorfismem na svůj obor hodnot.

d) Platí $\|T\| = 2$ a norma se nabývá. Dále $\ker T = \{f : f \text{ je konstantní}\}$ a $T(C([0, 1])) = \{g \in C([0, 1]) : g(0) = 0\}$. Operátor není prostý ani na, není izometrií ani izomorfismem na svůj obor hodnot.

e) Platí $\|T\| = 1$ a norma se nabývá. Dále $\ker T = \{f \in C([0, 1]) : f(1-t) = -f(t) \text{ pro každé } t \in [0, 1]\}$ a $T(C([0, 1])) = \{g \in C([0, 1]) : g(1-t) = g(t) \text{ pro každé } t \in [0, 1]\}$. Operátor není prostý ani na, není izometrií ani izomorfismem na svůj obor hodnot.

f) Platí $\|T\| = 2$ a norma se nabývá. Dále $\ker T = \{(a, a, \dots) : a \in \mathbb{K}\}$ a $T(c) = c_0$. Operátor je na, ale není prostý, není izometrií ani izomorfismem na svůj obor hodnot.

g) Operátor T je izometrické vnoření, a tedy $\|T\| = 1$ a normu nabývá v každém bodě S_{ℓ_p} . Je prostý a $T(\ell_p) = \{f \in L_p([0, 1]) : f \text{ je skoro všude konstantní na každém } I_n\}$. Není na $L_p([0, 1])$, ale je izometrickým izomorfismem na svůj obor hodnot a $\|T^{-1}\| = 1$.

Výsledky k části 3

a) Platí $\|\varphi_1\| = \sqrt{R}$ a $\|\varphi_2\| = R$; oba funkcionály své normy nabývají. Pro každé $c \in \mathbb{K}$ platí $\|\varphi_1 + c\varphi_2\| = \max\{\sqrt{R}, |c|R\}$ a tento funkcionál své normy nabývá. Jeho norma je nejmenší právě pro $|c| \leq 1/\sqrt{R}$; nejmenší možná hodnota je $\sqrt{R}$.

b) Platí $\|T\| = 1$ a norma se nabývá. Dále $\ker T = \{f \in L_p((1, \infty)) : \int_n^{n+1} f(t) dt = 0 \text{ pro každé } n \in \mathbb{N}\}$ a T je na. Pravou inverzi lze definovat předpisem $(Sx)(t) = x_n$ pro $t \in (n, n+1]$; operátor S je lineární izometrie a $TS = \text{Id}_{\ell_p}$.

c) Na obou prostorech definuje φ_k spojitý lineární funkcionál právě pro $k \in \mathbb{N}_0$. V takovém případě je $\|\varphi_k\| = \int_{-\pi}^{\pi} |\sin t|^k dt$. Na $C([-\pi, \pi])$ nabývá φ_k své normy právě pro sudá k , zatímco na $L_\infty([-\pi, \pi])$ ji nabývá pro každé $k \in \mathbb{N}_0$.

Výsledky a hinty k části 4

a) Platí $\|P\| = 2$. Pro dolní odhad použijte například posloupnost $(-1, 1, 1, \dots)$. Operátor J je izomorfismus c na c_0 a

$$J^{-1}(y_1, y_2, \dots) = (y_1 + y_2, y_1 + y_3, \dots).$$

Navíc $\|J\| = \|J^{-1}\| = 2$; vhodnými posloupnostmi jsou opět $(-1, 1, 1, \dots)$ a $(1, 1, 0, 0, \dots)$.

b) Nejprve ověřte, že $J(a) \in C(K)$: konečné součty jsou spojitě a díky disjunktnosti nosičů má zbytek normu nejvýše $\sup_{n \geq N} |a_n| \rightarrow 0$, takže řada konverguje stejnoměrně. Z rovností $J(a)(t_n) = a_n$ plyne, že J je izometrické vnoření. Pro $f \in C(K)$ je $(f(t_n) - f(t_0))_n \in c_0$, takže P je dobře definovaná projekce na $J(c_0)$. Platí $\|P\| = 2$; pro dolní odhad zvolte $f \in C(K)$ normy 1 takovou, že $f(t_0) = -1$ a $f(t_n) = 1$ pro některé n .

c) Je-li q sdružený exponent k p , položte

$$Tx = \sum_{n=1}^{\infty} x_n \mu(A_n)^{-1/p} \chi_{A_n}, \quad Sf = \left(\mu(A_n)^{-1/q} \int_{A_n} f d\mu \right)_{n=1}^{\infty},$$

kde pro $p = 1$ rozumíme $\mu(A_n)^{-1/q} = 1$. Z disjunktnosti množin A_n plyne, že T je izometrie, a z Hölderovy nerovnosti $\|S\| \leq 1$. Přímým výpočtem dostanete $ST = \text{Id}_{\ell_p}$, a tedy $\|S\| = 1$.

d) Zvolte bijekci $\sigma : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Z}$, označte $J_n = (\sigma(n), \sigma(n) + 1]$ a definujte afinní bijekci $\varphi_n : I_n \rightarrow J_n$ předpisem $\varphi_n(t) = \sigma(n) + 2^n(t - 2^{-n})$. Potom položte

$$(Uf)(t) = 2^{n/p} f(\varphi_n(t)), \quad t \in I_n.$$

Substituce $x = \varphi_n(t)$ dává $\|Uf\|_p = \|f\|_p$. Surjektivitu ověřte přenesením dané funkce z každého I_n zpět na J_n pomocí φ_n^{-1} . Operátor U je tedy izometrický izomorfismus $L_p(\mathbb{R})$ na $L_p([0, 1])$.