

Předpokládané znalosti z jiných předmětů

1 Matematická analýza

1.1 Stejnomořná konvergence

Definice 1.1 (stejnomořná konvergence). Necht M je množina, (Q, σ) metrický prostor a $f, f_n: M \rightarrow Q$. Posloupnost (f_n) konverguje stejnoměrně k f na M , jestliže pro každé $\varepsilon > 0$ existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že $\sigma(f_n(x), f(x)) < \varepsilon$ pro každé $n \geq n_0$ a $x \in M$. Posloupnost (f_n) je stejnoměrně cauchyovská na M , jestliže pro každé $\varepsilon > 0$ existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že $\sigma(f_n(x), f_m(x)) < \varepsilon$ pro všechna $m, n \geq n_0$ a $x \in M$.

Věta 1.2 (Bolzanova–Cauchyova podmínka pro stejnoměrnou konvergenci). Necht M je množina, (Q, σ) úplný metrický prostor a $f_n: M \rightarrow Q$. Potom je posloupnost (f_n) stejnoměrně konvergentní na M , právě když je na M stejnoměrně cauchyovská.

Věta 1.3 (Weierstrassův M-test). Necht M je množina, X Banachův prostor a $f_n: M \rightarrow X$, $n \in \mathbb{N}$. Jestliže existují čísla $M_n \geq 0$ taková, že $\|f_n(x)\| \leq M_n$ pro každé $x \in M$ a $n \in \mathbb{N}$ a řada $\sum_{n=1}^{\infty} M_n$ konverguje, pak řada $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ konverguje stejnoměrně na M .

Tvrzení 1.4 (stejnomořná limita spojitých funkcí). Necht M je topologický prostor, (Q, σ) metrický prostor a $f_n: M \rightarrow Q$ jsou spojitě. Konverguje-li (f_n) stejnoměrně k $f: M \rightarrow Q$, je f spojitá.

Věta 1.5 (Mooreova–Osgoodova věta). Necht (P, ρ) je metrický prostor, x_0 je hromadný bod množiny P a $f_k: P \rightarrow \mathbb{K}$ konvergují stejnoměrně k $f: P \rightarrow \mathbb{K}$. Existuje-li pro každé $k \in \mathbb{N}$ vlastní limita $\lim_{x \rightarrow x_0} f_k(x) \in \mathbb{K}$, pak existují obě vlastní iterované limity a platí

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \lim_{x \rightarrow x_0} f_k(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} \lim_{k \rightarrow \infty} f_k(x).$$

Věta 1.6 (stejnomořná konvergence derivací). Necht $a < b$ a $f_n: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ jsou diferencovatelné. Předpokládejme, že pro nějaké $x_0 \in (a, b)$ posloupnost $(f_n(x_0))$ konverguje a že (f'_n) konverguje stejnoměrně na (a, b) . Potom existuje $f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ taková, že $f_n \rightarrow f$ stejnoměrně na (a, b) , funkce f je diferencovatelná a $f'_n \rightarrow f'$ stejnoměrně na (a, b) .

1.2 Úplnost, totální omezenost a Baireova věta

Definice 1.7 (úplný metrický prostor). Metrický prostor (M, d) se nazývá úplný, jestliže každá cauchyovská posloupnost v M konverguje k nějakému bodu prostoru M . Explicitně: jestliže $(x_n) \subset M$ splňuje $\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall m, n \geq n_0 : d(x_m, x_n) < \varepsilon$, pak existuje $x \in M$ takové, že $d(x_n, x) \rightarrow 0$.

Definice 1.8 (totální omezenost). Necht (X, d) je metrický prostor a $A \subset X$. Množina A se nazývá totálně omezená, jestliže pro každé $\varepsilon > 0$ existuje konečná množina $F \subset X$ taková, že $A \subset \bigcup_{x \in F} B(x, \varepsilon)$. Množina F se pak nazývá konečná ε -sít množiny A .

Tvrzení 1.9 (charakterizace totální omezenosti). Necht (X, d) je úplný metrický prostor a $A \subset X$. Potom jsou následující podmínky ekvivalentní:

1. Množina A je totálně omezená.
2. Uzávěr $\overline{A}$ je kompaktní.
3. Z každé posloupnosti prvků množiny A lze vybrat cauchyovskou podposloupnost.

Věta 1.10 (Baireova). Necht (M, d) je neprázdný úplný metrický prostor. Je-li $(G_n)_{n=1}^{\infty}$ posloupnost otevřených hustých podmnožin M , pak je $\bigcap_{n=1}^{\infty} G_n$ hustá v M .

Ekvivalentně, jsou-li $(F_n)_{n=1}^{\infty}$ uzavřené podmnožiny M s prázdným vnitřkem, pak

$$\text{int}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} F_n\right) = \emptyset.$$

Zejména M není sjednocením spočetně mnoha uzavřených množin s prázdným vnitřkem.

1.3 Separabilita

Definice 1.11 (separabilní metrický prostor). Metrický prostor (M, d) se nazývá separabilní, jestliže obsahuje spočetnou hustou podmnožinu.

Tvrzení 1.12 (dědičnost separability). Každý podprostor separabilního metrického prostoru je separabilní.

Tvrzení 1.13. Prostor $c_0 = \{x = (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}} : x_n \rightarrow 0\}$ s normou $\|x\|_{\infty} = \sup_{n \in \mathbb{N}} |x_n|$ je separabilní.

Připomenutí. Hustou spočetnou množinu tvoří konečné posloupnosti s racionálními souřadnicemi v reálném případě, resp. se souřadnicemi z $\mathbb{Q} + i\mathbb{Q}$ v komplexním případě.

Tvrzení 1.14. Prostor ℓ_{∞} se supremovou normou není separabilní.

Připomenutí. Množina $\{\chi_A : A \subset \mathbb{N}\} \subset \ell_{\infty}$ je nespočetná a pro $A \neq B$ platí $\|\chi_A - \chi_B\|_{\infty} = 1$. Separabilní metrický prostor nemůže obsahovat nespočetnou množinu, jejíž různé body mají vzájemnou vzdálenost alespoň jedna.

1.4 Absolutně spojitě funkce

Definice 1.15 (absolutní spojitost). Necht $a < b$ a $F: [a, b] \rightarrow \mathbb{K}$. Funkce F je *absolutně spojitá*, jestliže pro každé $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ takové, že pro každý konečný systém po dvou disjunktních intervalů $(x_k, y_k) \subset [a, b]$ platí

$$\sum_k (y_k - x_k) < \delta \implies \sum_k |F(y_k) - F(x_k)| < \varepsilon.$$

Věta 1.16 (derivace integrálu a charakterizace absolutní spojitosti). Necht $a < b$, $g \in L_1(a, b)$, $c \in \mathbb{K}$ a $F(x) = c + \int_a^x g(t) dt$ pro $x \in [a, b]$. Potom je F absolutně spojitá, má derivaci skoro všude na $[a, b]$ a $F' = g$ skoro všude. Obráceně, je-li $F: [a, b] \rightarrow \mathbb{K}$ absolutně spojitá, pak F' existuje skoro všude, $F' \in L_1(a, b)$ a pro každé $x \in [a, b]$ platí $F(x) = F(a) + \int_a^x F'(t) dt$.

Je-li navíc $x_0 \in [a, b]$ a funkce g je v bodě x_0 spojitá zprava, pak existuje pravá derivace $F'_+(x_0)$ a platí $F'_+(x_0) = g(x_0)$. Analogicky pro levou a oboustrannou derivaci.

Věta 1.17 (nulová primitivní funkce a nulová derivace). Necht $a < b$.

1. Je-li $g \in L_1(a, b)$ a

$$\int_a^c g(t) dt = 0 \quad \text{pro každé } c \in [a, b],$$

potom $g = 0$ skoro všude na (a, b) .

2. Je-li $f \in AC([a, b])$, potom

$$f' = 0 \text{ skoro všude na } (a, b) \iff f \text{ je konstantní na } [a, b].$$

Věta 1.18 (integrace per partes pro absolutně spojitě funkce). Necht $a < b$ a $f, g \in AC([a, b])$. Potom $fg \in AC([a, b])$, $(fg)' = f'g + fg'$ skoro všude na (a, b) a platí $\int_a^b f(x)g'(x) dx = [f(x)g(x)]_a^b - \int_a^b f'(x)g(x) dx$.

1.5 Normované lineární a Banachovy prostory

Věta 1.19 (normy na prostoru konečné dimenze). Necht $n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ a $\|\cdot\|$ je libovolná norma na $\mathbb{K}^n$. Potom existují konstanty $c, C > 0$ takové, že $c\|x\|_2 \leq \|x\| \leq C\|x\|_2$ pro každé $x \in \mathbb{K}^n$. Speciálně jsou libovolné dvě normy na konečněrozměrném vektorovém prostoru ekvivalentní.

Tvrzení 1.20 (konečněrozměrné prostory). Každý konečněrozměrný normovaný lineární prostor je Banachův.

Věta 1.21 (Test úplnosti). Normovaný lineární prostor X je Banachův, právě když každá absolutně konvergentní řada v X konverguje.

Fakt 1.22 (úplnost Lebesgueových prostorů). Je-li $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ prostor s mírou, $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ a $1 \leq p \leq \infty$, pak $L_p(\Omega, \mathcal{A}, \mu; \mathbb{K})$, v němž ztotožňujeme funkce shodné μ -skoro všude, je Banachův prostor.

Definice 1.23 (omezené lineární zobrazení). Necht X, Y jsou normované lineární prostory nad týmž tělesem a $L: X \rightarrow Y$ je lineární. Zobrazení L se nazývá *omezené*, jestliže existuje $C \geq 0$ takové, že $\|Lx\|_Y \leq C\|x\|_X$ pro každé $x \in X$. Jeho norma je $\|L\| = \sup\{\|Lx\|_Y : x \in X, \|x\|_X \leq 1\}$.

Věta 1.24 (charakterizace omezeného lineárního zobrazení). Necht X, Y jsou normované lineární prostory a $L: X \rightarrow Y$ je lineární. Potom jsou následující podmínky ekvivalentní: (a) L je omezené; (b) L je Lipschitzovské; (c) L je stejnoměrně spojitě; (d) L je spojitě; a (e) L je spojitě v bodě 0.

2 Teorie míry

Text psaný černě byl na přednáškách včetně důkazu, text psaný modře bude na přednášce z Teorie míry 2.

2.1 L_p prostory

Věta 2.1 (Jensenova nerovnost). Necht $(\Omega, \mathcal{A}, \nu)$ je pravděpodobnostní prostor, $F \in L_1(\nu; \mathbb{R})$ a $\Phi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ je konvexní, přičemž $\Phi \circ F \in L_1(\nu)$. Potom $\Phi(\int_\Omega F d\nu) \leq \int_\Omega \Phi(F) d\nu$.

Poznámka 2.2. Speciálně, je-li $1 \leq p < \infty$ a $h \in L_p(\nu; \mathbb{K})$, pak $|\int_\Omega h d\nu|^p \leq \int_\Omega |h|^p d\nu$. Pro reálnou funkci h stačí v Jensenově nerovnosti položit $\Phi(t) = |t|^p$. Je-li h komplexní a $I = \int_\Omega h d\nu \neq 0$, zvolme $\lambda \in \mathbb{C}$ tak, aby $|\lambda| = 1$ a $\lambda I = |I|$. Aplikací reálné verze na funkci $\text{Re}(\lambda h)$ dostaneme

$$|I|^p = \left| \int_\Omega \text{Re}(\lambda h) d\nu \right|^p \leq \int_\Omega |\text{Re}(\lambda h)|^p d\nu \leq \int_\Omega |h|^p d\nu.$$

Pro $I = 0$ je tvrzení zřejmé.

Věta 2.3 (Hölderova nerovnost). Necht $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ je prostor s mírou, $1 \leq p, q \leq \infty$ a

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1, \quad \frac{1}{\infty} := 0.$$

Jestliže $f \in L_p(\mu)$ a $g \in L_q(\mu)$, pak $fg \in L_1(\mu)$ a

$$\|fg\|_1 = \int_{\Omega} |fg| d\mu \leq \|f\|_p \|g\|_q.$$

Jsou-li obě funkce nenulové a $1 < p, q < \infty$, nastává rovnost právě tehdy, když $\frac{|f|^p}{\|f\|_p^p} = \frac{|g|^q}{\|g\|_q^q}$ skoro všude.

(Věty 2.1 a 2.3 byly na přednášce z MA3 dne 15.12.2025, kdy nastane rovnost v Holderově nerovnosti plyne snadno z důkazu.)

Tvrzení 2.4. *Nechť $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ je prostor s mírou.*

1. Konvergence v normě a skoro všude:

Je-li $1 \leq p \leq \infty$ a $f_n \rightarrow f$ v $L_p(\mu)$, pak existuje podposloupnost (f_{n_k}) konvergující k f μ -skoro všude.

2. Dominovaná konvergence:

Je-li $1 \leq p < \infty$, $f_n \rightarrow f$ μ -skoro všude a $|f_n| \leq g$ μ -skoro všude pro všechna n , kde $g \in L_p(\mu)$, pak $f_n \rightarrow f$ v $L_p(\mu)$.

3. Srovnání L_p a L_q v prostorech konečné míry:

Je-li $\mu(\Omega) < \infty$ a $1 \leq p < q \leq \infty$, pak $L_q(\mu) \subset L_p(\mu)$ a $\|f\|_p \leq \mu(\Omega)^{\frac{1}{p} - \frac{1}{q}} \|f\|_q$, kde $1/\infty = 0$. Speciálně konvergence v L_q implikuje konvergenci v L_p .

Tvrzení 2.5 (borelovští reprezentanti a hustota v L_p). *Nechť (M, d) je metrický prostor, μ_0 je Borelovská míra na M a μ je její úplnění.*

1. *Každá μ -měřitelná funkce $f: M \rightarrow \mathbb{K}$ má Borelovsky měřitelnou verzi, tj. existuje Borelovsky měřitelná funkce $g: M \rightarrow \mathbb{K}$ taková, že $f = g$ μ -skoro všude.*
2. *Pro každé $1 \leq p \leq \infty$ jsou Borelovsky měřitelné jednoduché funkce náležející do $L_p(\mu)$ husté v $L_p(\mu)$.*
3. *Je-li navíc M lokálně kompaktní a separabilní a míra μ_0 je regulární a konečná na kompaktních množinách, pak je pro $1 \leq p < \infty$ prostor*

$$C_c(M; \mathbb{K}) = \{f: M \rightarrow \mathbb{K} : f \text{ je spojitá a } \text{supp } f \text{ je kompaktní}\}$$

hustý v $L_p(\mu)$.

Speciálně je $C_c(\mathbb{R}^d; \mathbb{K})$ hustý v $L_p(\mathbb{R}^d, \lambda_d)$ pro $1 \leq p < \infty$.

2.2 Obraz míry

Definice 2.6 (obraz míry). *Nechť $(X, \mathcal{A}, \mu)$ je prostor s mírou, $(Y, \mathcal{B})$ měřitelný prostor a $T: X \rightarrow Y$ měřitelné zobrazení. Obrazem míry μ při zobrazení T rozumíme míru $T_{\#}\mu$ na $(Y, \mathcal{B})$ definovanou předpisem $(T_{\#}\mu)(B) = \mu(T^{-1}(B))$ pro $B \in \mathcal{B}$.*

Tvrzení 2.7 (integrace podle obrazu míry). *Je-li $h: Y \rightarrow [0, \infty]$ měřitelná, pak $\int_Y h d(T_{\#}\mu) = \int_X h \circ T d\mu$. Stejná rovnost platí pro každou $T_{\#}\mu$ -integrovatelnou skalární funkci h .*

2.3 Znaménkové a komplexní míry

Definice 2.8 (znaménková a komplexní míra). *Nechť $(\Omega, \mathcal{A})$ je měřitelný prostor. Spočetně aditivní zobrazení $\nu: \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{R}$ se nazývá *znaménková míra*; spočetně aditivní zobrazení $\nu: \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{C}$ se nazývá *komplexní míra*. Uvažujeme pouze konečné hodnoty.*

Věta 2.9 (Jordanův rozklad a absolutní variace). *Ke každé znaménkové míře ν existují jednoznačně určené konečné nezáporné míry ν^+ a ν^- takové, že $\nu = \nu^+ - \nu^-$ a $\nu^+ \perp \nu^-$. Zápis se nazývá Jordanův rozklad a míra $|\nu| = \nu^+ + \nu^-$ se nazývá absolutní variace míry ν . Pro znaménkovou i komplexní míru lze absolutní variaci charakterizovat vzorcem*

$$|\nu|(A) = \sup \left\{ \sum_{j=1}^m |\nu(A_j)| : m \in \mathbb{N}, A_1, \dots, A_m \in \mathcal{A} \text{ jsou po dvou disjunktní, } A_j \subset A \right\}.$$

Zde $\nu^+ \perp \nu^-$ znamená, že existuje $P \in \mathcal{A}$ takové, že $\nu^+(P) = 0$ a $\nu^-(\Omega \setminus P) = 0$.

Definice 2.10 (integrál podle znaménkové nebo komplexní míry). *Měřitelná skalární funkce f je ν -integrovatelná, jestliže $\int_{\Omega} |f| d|\nu| < \infty$. Pro znaménkovou míru definujeme $\int_{\Omega} f d\nu = \int_{\Omega} f d\nu^+ - \int_{\Omega} f d\nu^-$, pro komplexní míru analogicky pomocí znaménkových měr $\text{Re } \nu$ a $\text{Im } \nu$.*

Tvrzení 2.11 (základní odhad pro integrál). *Je-li ν znaménková nebo komplexní míra a f je podle ν integrovatelná skalární funkce, pak $|\int_{\Omega} f d\nu| \leq \int_{\Omega} |f| d|\nu|$.*

2.4 Borelovské a regulární míry

Definice 2.12 (Borelovská a regulární míra). Necht (M, d) je metrický prostor a $\mathcal{B}(M)$ jeho Borelovská σ -algebra, tj. nejmenší σ -algebra obsahující všechny otevřené podmnožiny M . Míra na $(M, \mathcal{B}(M))$ se nazývá *Borelovská*.

Nezáporná Borelovská míra μ se nazývá *regulární*, jestliže pro každé $A \in \mathcal{B}(M)$ platí

$$\mu(A) = \inf\{\mu(U) : A \subset U, U \text{ otevřená}\} = \sup\{\mu(F) : F \subset A, F \text{ uzavřená}\}.$$

Znaménková nebo komplexní Borelovská míra ν se nazývá regulární, jestliže je regulární její absolutní variace $|\nu|$.

Věta 2.13 (regularita Borelovských měr). Necht (M, d) je separabilní úplný metrický prostor. Potom je každá konečná nezáporná Borelovská míra na M regulární. V důsledku je regulární také každá znaménková a každá komplexní Borelovská míra na M .

2.5 Radonova–Nikodýmova věta

Definice 2.14 (absolutní spojitost měr). Míra ν se nazývá *absolutně spojitá* vzhledem k nezáporné míře μ , píšeme $\nu \ll \mu$, jestliže pro každé $A \in \mathcal{A}$ platí $\mu(A) = 0 \implies \nu(A) = 0$.

Věta 2.15 (Radonova–Nikodýmova). Necht μ je nezáporná σ -konečná míra na $(\Omega, \mathcal{A})$ a ν je znaménková nebo komplexní míra na témže prostoru. Je-li $\nu \ll \mu$, pak existuje funkce $f \in L_1(\mu)$, jednoznačná až na rovnost μ -skoro všude, taková, že $\nu(A) = \int_A f d\mu$ pro každé $A \in \mathcal{A}$. Funkce f se značí $d\nu/d\mu$ a nazývá se Radonova–Nikodýmova derivace. Pro každou měřitelnou funkci g , pro kterou mají integrály smysl, platí $\int_\Omega g d\nu = \int_\Omega gf d\mu$.

Poznámka 2.16 (polární rozklad míry). Každá znaménková nebo komplexní míra ν je absolutně spojitá vzhledem k $|\nu|$. Proto existuje $h \in L_1(|\nu|)$ takové, že $\nu(A) = \int_A h d|\nu|$ pro $A \in \mathcal{A}$ a $|h| = 1$ $|\nu|$ -skoro všude.