

CVIČENÍ 1

1. Teoretičtější příklady

a) Dokažte následující tvrzení (až je dokážete, je možné je používat jako “známá tvrzení”)

Věta 1. Necht' P a Q jsou metrické prostory, $f, g: P \rightarrow Q$ jsou spojitá zobrazení a $M \subset P$ je hustá v P . Jestliže $f = g$ na M , pak $f = g$ na celém P .

Věta 2. Necht' (P, ρ) je metrický prostor a $A \subset P$. Pak funkce $x \mapsto \text{dist}(x, A)$ je 1-Lipschitzovská na P .

Věta 3. Součin $X_1 \times X_2 \times \dots \times X_n$ úplných metrických prostorů X_1, \dots, X_n je též úplný.

Věta 4 (důsledek Bairovy věty). Necht' P je úplný metrický prostor, $\{F_n\} \subset P$ je posloupnost uzavřených množin v P a $P = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$. Pak existuje $n \in \mathbb{N}$ takové, že F_n má neprázdný vnitřek.

2. Teoretičtější příklady, které by ale studenti opravdu měli ovládat

a) Necht' X je normovaný lineární prostor. Ukažte, že $B(x, r) = x + B(0, r)$ a $B(0, r) = rB(0, 1)$.

b) Ukažte, že $B(x, r)$ a $U(x, r)$ jsou konvexní množiny.

c) Necht' X je normovaný lineární prostor nad \mathbb{K} , $M \subset X$ a $\alpha \in \mathbb{K}$. Ukažte, že $\overline{\alpha M} = \alpha \overline{M}$.

d) Ukažte, že v normovaném lineárním prostoru platí $\overline{U(x, r)} = B(x, r)$, $\text{Int } B(x, r) = U(x, r)$ a $\partial U(x, r) = \partial B(x, r) = S(x, r)$. Nalezněte příklad metrického prostoru, kde tyto rovnosti neplatí.

3. Další teoretičtější příklady

a) Ukažte, že vnitřek konvexní množiny v normovaném lineárním prostoru je konvexní.

b) Necht' X je normovaný lineární prostor a $Y \subset X$ je jeho vektorový podprostor. Ukažte, že \overline{Y} je také vektorový podprostor X a že pokud $Y \neq X$, pak Y má prázdný vnitřek.

4. Konkrétnější příklady

a) Necht' je dána posloupnost $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ v $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ předpisem

$$f_n(k) := \frac{k+1}{k^2+2} + \frac{n+1}{n^2k}, \quad n, k \in \mathbb{N}.$$

Uvažujte postupně Banachovy prostory $X \in \{c_0, \ell_1, \ell_2, \ell_3, \ell_\infty\}$. Zjistěte, zda $f_n, n \in \mathbb{N}$ jsou prvky Banachova prostoru X . Dále zjistěte zda je posloupnost f_n konvergentní v Banachových prostorech c_0 a ℓ_∞ (a pokud ano, určete její limitu).

b) Necht' je dána posloupnost funkcí $f_n: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}$ předpisem

$$f_n(x) := \frac{e^x - 1}{\sqrt[3]{x^4}} + \frac{n^2}{(n^2 - 1 + e^x)^2}, \quad n \in \mathbb{N}, x \in [0, 1].$$

Uvažujte postupně Banachovy prostory $X \in \{\mathcal{C}([0, 1]), L_1([0, 1]), L_2([0, 1]), L_3([0, 1]), L_\infty([0, 1])\}$. Zjistěte, zda $f_n, n \in \mathbb{N}$ jsou prvky Banachova prostoru X . Pokud ano, zjistěte zda je posloupnost f_n konvergentní v Banachově prostoru X (a pokud ano, určete její limitu).

5. Další vhodné příklady: viz. [1, příklady 1, 2, 7, 10, 12 (1)-(6), 14 (1)-(2), 15 (1)-(2), 19, 20]

[1] materiály prof. Kalendy, umístěny na webu zde:

<https://www2.karlin.mff.cuni.cz/~kalenda/data/ufa15-pr1.pdf>

CVIČENÍ 2

1. Teoretičtější příklady

a) Dokažte následující tvrzení (až jej dokážete, je možné je používat jako “známé tvrzení”)

Věta 5. Necht' (P, ρ) a (Q, σ) jsou metrické prostory, Q je úplný, $M \subset P$ je hustá v P a $f : M \rightarrow Q$ je stejnoměrně spojitě zobrazení. Pak existuje spojitě rozšíření f na celé P . Toto rozšíření je určeno jednoznačně a je stejnoměrně spojitě.

Věta 6. Prostory c , c_0 a ℓ_p pro $p \in [1, \infty)$ jsou separabilní.

Věta 7. Prostory $\ell_\infty(\mathbb{N})$, $c_0(I)$ a $\ell_p(I)$ pro $p \in [1, \infty]$ a nespočetnou množinu I nejsou separabilní.

2. Ukažte, že $\varphi : X \rightarrow \mathbb{K}$ je spojitý lineární funkcional, spočtete jeho normu a zjistete zda φ své normy nabývá, jestliže

- a) $X = \ell_1$, $\varphi((x_n)) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} x_n$; b) $X = c_0$, $\varphi((x_n)) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} x_n$;
c) $X = \mathcal{C}([0, 1])$, $\varphi(f) = \int_0^1 (t - \frac{1}{2}) f(t) dt$; d) $X = L_\infty([0, 1])$, $\varphi(f) = \int_0^1 (t - \frac{1}{2}) f(t) dt$;
e) $X = \ell_1$, $\varphi((x_n)) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n x_n$; f) $X = \ell_1$, $\varphi((x_n)) = \sum_{n=1}^{\infty} (1 - \frac{1}{n}) x_{2n}$;
g) $X = \ell_2$, $\varphi((x_n)) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} x_n$; h) $X = \ell_p$ (kde $p \in (1, \infty)$), $\varphi((x_n)) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} x_n$;
i) $X = \mathcal{C}([0, 1])$, $\varphi(f) = f(0) - f(1)$; j) $X = L_\infty([0, 1])$, $\varphi(f) = \int_0^{1/2} f(t) dt$;
k) $X = L_1([0, 1])$, $\varphi(f) = \int_0^1 t f(t) dt$; l) $X = L_1([0, 1])$, $\varphi(f) = \int_0^1 (t - \frac{1}{2}) f(t) dt$.

3. Další teoretické příklady

- a) Necht' (x_n) je posloupnost v Banachově prostoru. Ukažte, že $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ je bezpodmínečně konvergentní právě tehdy, když $\sum_{k=1}^{\infty} x_{n_k}$ je konvergentní pro každou podposloupnost (x_{n_k}) posloupnosti (x_n) . (*Hint*: použijte B-C podmínku a pro jednu implikaci navíc analogii důkazu Věty o charakterizaci bezpodmínečné konvergence z přednášky)
- b) Jaký je množinový vztah mezi vektorovými prostory ℓ_p a ℓ_q pro $p < q$? Jaký je jejich vztah k prostoru c_0 ?
- c) Jaký je množinový vztah mezi vektorovými prostory $L_p([0, 1])$ a $L_q([0, 1])$ pro $p < q$?
- d) Jaký je množinový vztah mezi vektorovými prostory $L_p(\mathbb{R})$ a $L_q(\mathbb{R})$ pro $p < q$?
- e) Necht' $p \in \{0\} \cup [1, \infty)$ a $a = (a_n)_{n=1}^{\infty}$ je prvkem prostoru ℓ_p (kde symbolem ℓ_0 rozumíme prostor c_0). Ukažte, že $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n e_n = a$.
- f) Pro každé $p \in (1, \infty)$ nalezněte v prostoru ℓ_p bezpodmínečně konvergentní řadu, která není absolutně konvergentní.
- g) Nalezněte v prostoru $\mathcal{C}([0, 1])$ bezpodmínečně konvergentní řadu, která není absolutně konvergentní.

4. Další vhodné příklady:

- a) teoretičtější viz. [1, příklady 12 (7)-(9), 13, 14 (3), 15 (3)-(4), 16, 17, 18, 42 (1)-(2), 34, 43, 45]
- b) počítací viz. [2, příklady z oddílů 1 a 2 - některé z nich použity výše; 1 je trochu těžší - spíše zkouškové obtížnosti]
- [1] materiály prof. Kalendy, umístěny na webu zde:
<https://www2.karlin.mff.cuni.cz/~kalenda/data/ufa15-pr1.pdf>
- [2] materiály prof. Kalendy, umístěny na webu zde:
<https://www2.karlin.mff.cuni.cz/~kalenda/data/ufa15-normy.pdf>

CVIČENÍ 3

1. Teoretičtější příklady

a) Dokažte následující tvrzení (až jej dokážete, je možné je používat jako “známé tvrzení”)

Věta 8. Necht K je kompaktní metrický prostor. Pak prostor $\mathcal{C}(K)$ je separabilní.

2. Ukažte, že $T : X \rightarrow Y$ je spojité lineární operátor, spočtěte jeho normu a zjistěte zda existuje $x \in S_X$ splňující $\|Tx\| = \|T\|$. Dále zkoumejte následující otázky:

- Je operátor T prostý? Pokud ne, zjistěte jeho jádro.
- Je operátor T na?
- Je operátor T izometrie, případně izomorfismus? Pokud ano, popište jeho obor hodnot a spočtěte normu inverzního operátoru.

a) $X = Y = \ell_2$, $T((x_n)) = (0, x_1, x_2, \dots)$; b) $X = Y = \ell_2$, $T((x_n)) = (x_2, x_3, x_4, \dots)$;

c) $X = Y = \ell_2$, $T((x_n)) = (\frac{x_n}{n})_{n=1}^\infty$; d) $X = Y = \ell_2$, $T((x_n)) = (\frac{n}{n+1}x_n)_{n=1}^\infty$;

e) $X = Y = \mathcal{C}([0, r])$, kde $r > 0$, $T(f)(t) = \int_0^t f(x) dx$;

f) $X = \mathcal{C}([0, r])$, $Y = \mathcal{C}^1([0, r])$, kde $r > 0$, $T(f)(t) = \int_0^t f(x) dx$;

3. Další vhodné příklady:

a) teoretičtější viz. [1, příklady 21-26, 28]

b) teoretičtější ke konečně-dimenzionálním prostorům viz. [1, příklady 37-38, 44]

c) počítačí viz. [2, příklady (a)-(s) z oddílů 3 a 4 - některé z nich použity výše]
(výběr standardnějších: 3 a 4 (c), (e), (g), (i), (k), (n), (s); 3 a 4 (d) je trochu těžší)

[1] materiály prof. Kalendy, umístěny na webu zde:

<https://www2.karlin.mff.cuni.cz/~kalenda/data/ufa15-pr1.pdf>

[2] materiály prof. Kalendy, umístěny na webu zde:

<https://www2.karlin.mff.cuni.cz/~kalenda/data/ufa15-normy.pdf>

CVIČENÍ 4

1. Teoretičtější příklady

a) Dokažte následující tvrzení (až je dokážete, je možné je používat jako “známé tvrzení”)

Věta 9. Necht' $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ je lebesgueovsky měřitelná množina a $p \in [1, \infty)$. Pak $\mathcal{C}_c(\Omega)$ je hustá podmnožina $L_p(\Omega, \lambda)$, kde

$$\mathcal{C}_c(\Omega) := \{f : \Omega \rightarrow \mathbb{K} : f \text{ spojitá a } \{f \neq 0\} \text{ omezená}\}$$

Věta 10. Necht' $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ je lebesgueovsky měřitelná množina a $p \in [1, \infty)$. Pak prostor $L_p(\Omega, \lambda)$ je separabilní.

b) Necht' X je Banachův prostor a $Y \subset X$ uzavřený podprostor. Dokažte, že pro kvocientové zobrazení $q : X \rightarrow X/Y$ platí, že $q(B_X) = B_{X/Y}$ právě když pro každé $x \in X$ existuje $y \in Y$ splňující $\|x - y\| = d(x, Y)$.

c) Necht' $X = C([0, 1])$, $Y = \{f \in X : f|_{[0, 1/2]} \equiv 0\}$. Pomocí předchozího cvičení ukažte, že pro kvocientové zobrazení $q : X \rightarrow X/Y$ platí, že $q(B_X) = B_{X/Y}$.

d) Dokažte, že na prostoru ℓ_∞/c_0 platí

$$\|\hat{x}\| = \limsup_{n \rightarrow \infty} |x_n|, \quad x \in \ell_\infty.$$

2. Ukažte, že $T : X \rightarrow Y$ je spojitý lineární operátor, spočtěte jeho normu a zjistěte zda existuje $x \in S_X$ splňující $\|Tx\| = \|T\|$. Dále zkoumejte následující otázky: Je operátor T prostý? Pokud ne, zjistěte jeho jádro. Je operátor T na? Je operátor T izometrie, případně izomorfismus? Pokud ano, popište jeho obor hodnot a spočtěte normu inverzního operátoru.

a) $X = C^1([0, 1])$, $Y = C([0, 1])$, $T(f)(t) = f' - f$; b) $X = Y = L_p([0, 1])$, kde $p \in [1, \infty]$, $T(f)(t) = f(\sqrt{t})$;

c) $X = C^2([0, 1])$, $Y = C([0, 1])$, $T(f)(t) = f'' + f$; d) $X = Y = L_p([0, 1])$, kde $p \in [1, \infty]$, $T(f)(t) = (t - \frac{1}{2})f(t)$.

3. Úlohy ze zkouškových písemek z minulých let

a) Na prostoru $X = c_0 \oplus_1 \ell_2$ definujme funkcionály $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ předpisem

$$\varphi_1(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n}{2^n}, \quad \varphi_2(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{y_n}{2^n}, \quad \varphi_3(x, y) = \varphi_1(x, y) + \varphi_2(x, y)$$

pro $x = (x_n)_{n=1}^{\infty} \in c_0$ a $y = (y_n)_{n=1}^{\infty} \in \ell_1$. Ukažte, že $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3 \in X^*$, spočtěte jejich normy a určete, které z nich nabývají své normy a které nikoliv.

b) Necht'

$$Tf = \int_0^1 x^k f(x) dx.$$

Zjistěte, pro jaká $k \in \mathbb{Z}$ a $p \in [1, \infty)$ je $T \in (L_p([0, 1]))^*$. Pro tato $k \in \mathbb{Z}$ a $p \in [1, \infty)$ najděte normu $\|T\|$ a zjistěte, zda se jí nabývá.

c) Necht' $X = C([0, 1], \mathbb{R})$. Definujme funkcionály φ_1 a φ_2 předpisem

$$\varphi_1(f) = \int_0^{1/3} f + \int_{2/3}^1 f, \quad \varphi_2(f) = \int_0^{1/3} f - \int_{2/3}^1 f, \quad f \in X$$

a podprostory

$$Y_1 = \{f \in X : f(0) = f(1)\}, \quad Y_2 = \{f \in X : f(0) = -f(1)\}.$$

Ukažte, že $\varphi_1, \varphi_2 \in X^*$. Spočtěte normy funkcionálů $\varphi_1|_{Y_1}, \varphi_1|_{Y_2}, \varphi_2|_{Y_1}$ a $\varphi_2|_{Y_2}$ a určete, které z nich nabývají své normy a které nikoliv.

4. Další vhodné příklady:

a) teoretičtější ke kvocientům viz. [3, příklady 16-23]

(17-18 nejsou příliš těžké, 19 je docela poučné protože prostor ℓ_∞/c_0 je v teorii neseparabilních prostorů celkem hojně používaný, 20-22 jsou zajímavé ale docela složité, 23 je užitečné si rozmyslet ale je to spíše cvičení z teorie míry než z funkcionální analýzy)

b) teoretičtější k projekcím viz. [4, příklady 13-15, 17-18]

(13-14 jsou celkem jednoduché, 15 je analogické jako řešení Příklad 53 ze skript a 18 je dosti poučné neboť se jedná o netriviální známou větu)

c) počítačí viz. [2, příklady (u), (w)-(z) z oddílů 3 a 4] (některé použity výše)

[2] materiály prof. Kalendy, umístěny na webu zde:

<https://www2.karlin.mff.cuni.cz/~kalenda/data/ufa15-normy.pdf>

[3] materiály prof. Kalendy, umístěny na webu zde:

<https://www2.karlin.mff.cuni.cz/~kalenda/data/ufa15-pr2.pdf>

[4] materiály prof. Kalendy, umístěny na webu zde:

<https://www2.karlin.mff.cuni.cz/~kalenda/data/ufa15-pr3.pdf>

CVIČENÍ 5

Na pátém cvičení jsme psali zápočtovou písemku.

Další vhodné teoretické příklady:

a) teoretičtější k Hilbertovým prostorům viz. [1, příklady 31-32, 35-36]

[1] materiály prof. Kalendy, umístěny na webu zde:

<https://www2.karlin.mff.cuni.cz/~kalenda/data/ufa15-pr1.pdf>

CVIČENÍ 6

1. Ať X je jeden z reálných Banachových prostorů $X = \mathcal{C}(K, \mathbb{R})$, $X = c_0(I, \mathbb{R})$ a $X = \ell_p(I, \mathbb{R})$ pro $p \in [1, \infty]$. Zjistěte, zda komplexifikace $X_{\mathbb{C}}$ jsou přirozeně izometrické prostorům $\mathcal{C}(K, \mathbb{C})$, $c_0(I, \mathbb{C})$ a $\ell_p(I, \mathbb{C})$ pomocí zobrazení $X_{\mathbb{C}} \ni (f, g) \mapsto f + ig$.

2. Nechť X je normovaný lineární prostor a U otevřená konvexní množina obsahující 0. Ukažte, že existuje právě jeden sublineární funkcionál p na X , pro který platí $U = \{x \in X : p(x) < 1\}$. Ukažte, že p je spojitý.

(*Hint: Uvažte $p(x) = \inf\{t > 0 : x \in tU\}$*)

3. V následujícím příkladě je dán Hilbertův prostor H , jeho uzavřený podprostor Y a bod $x_0 \in H$. Najděte nějakou ortonormální bázi Y , napište vzorec pro ortogonální projekci na Y a najděte nejbližší bod v Y k bodu x_0 .

a) $H = \mathbb{C}^3$, $Y = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{C}^3 : ix_1 + ix_2 - x_3 = 0\}$, $x_0 = (i, 2, 0)$.

b) $H = L_2([-1, 1])$, Y podprostor tvořený polynomy stupně nejvýše 2, $x_0(t) = \sin t$.

c) $H = L_2([-1, 1], \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\lambda)$, Y podprostor tvořený polynomy stupně nejvýše 2, $x_0(t) = t^3$.

(připomeňme, že mírou $\mu = \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\lambda$ rozumíme borelovskou míru, pro kterou platí $\int_A f(t) d\mu(t) = \int_A \frac{f(t)}{\sqrt{1-t^2}} dt$).

d) $H = L_2([-1, 1], e^{-t}\lambda)$, Y podprostor tvořený polynomy stupně nejvýše 2, $x_0(t) = t^5$.

3. Další vhodné příklady:

a) teoretičtější k Hahn-Banachově větě viz. [3, příklady 1-6]

b) počítačí k Hilbertovým prostorům viz. [5, příklady 1-7]

[3] materiály prof. Kalendy, umístěny na webu zde:

<https://www2.karlin.mff.cuni.cz/~kalenda/data/ufa15-pr2.pdf>

[5] materiály prof. Kalendy, umístěny na webu zde:

<https://www2.karlin.mff.cuni.cz/~kalenda/data/ufa15-projekce.pdf>

CVIČENÍ 7

1. Necht' H je Hilbertův a $Y \subset H$ jeho podprostor. Ukažte, že pro každý funkcionál $f \in Y^*$ existuje právě jeden funkcionál $F \in H^*$ stejné normy, který rozšiřuje f . (*Hint: ukažte, že nutně $F = 0$ na Y^\perp*)

2. Najděte podprostor $Y \subset \ell_1$ a $f \in Y^*$, pro který existují dvě různá rozšíření na ℓ_1 , která mají stejnou normu.

3. Necht' X je normovaný lineární prostor, Y jeho podprostor. Necht' $T : Y \rightarrow X$ je identické zobrazení. Ukažte, že $T^* : X^* \rightarrow Y^*$ je dáno vzorcem $T^*(x^*) = x^*|_Y$ pro $x^* \in X^*$.

4. Necht' X je normovaný lineární prostor a $f \in X^*$. Nejprve interpretujte rovnost $\mathbb{K} = \mathbb{K}^*$ (tj. popište příslušnou izometrii). Pak odvoďte vzorec pro $f^* : \mathbb{K}^* \rightarrow X^*$ jakožto prvek $\mathcal{L}(\mathbb{K}, X^*)$ při zjištěné identifikaci $\mathbb{K} = \mathbb{K}^*$.

5. Ukažte, že $T \in L(X, Y)$ a vyjádřete duální operátor $T^* \in L(Y^*, X^*)$ pomocí reprezentace duálů klasických prostorů. V případě, že X a Y jsou Hilbertovy, vyjádřete také hilbertovsky adjungovaný operátor T^* .

a) $X = (\mathbb{C}^2, \|\cdot\|_2)$, $Y = (\mathbb{C}^3, \|\cdot\|_2)$, $T(x_1, x_2) = (x_1 + x_2, x_1 - x_2, 2x_1 + x_2)$;

b) $X = (\mathbb{C}^2, \|\cdot\|_2)$, $Y = (\mathbb{C}^3, \|\cdot\|_2)$, $T(x_1, x_2) = (x_1 + ix_2, (1+i)x_1 - x_2, x_1 - 2ix_2)$;

c) $X = Y = \ell_2$, $T((x_n)) = (0, x_1, x_2, \dots)$; d) $X = Y = \ell_2$, $T((x_n)) = (x_2, x_3, x_4, \dots)$;

e) $X = Y = \ell_2$, $T((x_n)) = (x_1, ix_2, x_3, ix_4, \dots)$; f) $X = Y = \ell_2$, $T((x_n)) = (x_1 - x_2, x_2 - 2x_1, x_3, x_4, \dots)$;

g) $X = \ell_1$, $Y = c_0$, $T((x_n)) = (\frac{x_1 + \dots + x_n}{n})_{n=1}^\infty$; h) $X = \ell_1$, $Y = c_0$, $T((x_n)) = (\sum_{k=n}^\infty x_k)_{n=1}^\infty$;

i) $X = Y = L_p([0, 1])$, kde $p \in [1, \infty)$, $T(f)(t) = f(\sqrt{t})$; j) $X = Y = L_p([0, 1])$, kde $p \in [1, \infty)$, $T(f) = \chi_{[0, \frac{1}{2}]} \cdot f$.

6. Ukažte, že c^* je izometrický ℓ_1 a příslušnou izometrii popište.

(*Hint: Uvažte zobrazení $T : \ell_1(\mathbb{N} \cup \{\infty\}) \rightarrow c^*$ definované předpisem $T(f)(x) = \sum_{k=1}^\infty f(k)x_k + f(\infty) \lim_{k \rightarrow \infty} x_k$*)

7. Další vhodné příklady:

a) teoretičtější k Hahn-Banachově větě viz. [3, příklady 7-13] a [4, příklad 16]

b) počítací k duálním a adjungovaným operátorům viz. [6, příklady 1 a 2 (a)-(m)]

(některé zmíněny výše)

[3] materiály prof. Kalendy, umístěny na webu zde:

<https://www2.karlin.mff.cuni.cz/~kalenda/data/ufa15-pr2.pdf>

[6] materiály prof. Kalendy, umístěny na webu zde:

<https://www2.karlin.mff.cuni.cz/~kalenda/data/ufa15-dualniop.pdf>

CVIČENÍ 8

1. a) Na prostoru $c_0 \oplus_2 \ell_1$ definujme funkcionál $\varphi : c_0 \oplus_2 \ell_1 \rightarrow \mathbb{K}$ předpisem

$$\varphi(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n + y_n}{2^n}, \quad x = (x_n)_{n=1}^{\infty} \in c_0, \quad y = (y_n)_{n=1}^{\infty} \in \ell_1.$$

Ukažte, že $\varphi \in (c_0 \oplus_2 \ell_1)^*$ a určete normu $\|\varphi\|$.

b) Na prostoru $X = L_{\infty}([0, \pi]) \oplus_1 \ell_3$ nad tělesem reálných čísel definujme funkcionál $\varphi : X \rightarrow \mathbb{R}$ předpisem

$$\varphi(f, y) = \int_0^{\pi} f(t) \cos t \, dt + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{y_n}{n2^n}, \quad f \in L_{\infty}([0, \pi]), \quad y = (y_n)_{n=1}^{\infty} \in \ell_2.$$

Ukažte, že $\varphi \in X^*$ a určete normu $\|\varphi\|$.

2. V následujících příkladech je dán operátor $\varphi : C([0, 1]) \rightarrow \mathbb{R}$. Nalezněte $\mu \in M([0, 1])$ splňující, že μ reprezentuje funkcionál ϕ pomocí duality z Rieszovy věty o reprezentaci a určete hodnotu $\|\phi\|$.

a) $\phi(f) = \frac{f(0)+f(1)}{2} + \int_0^1 tf(t) \, dt$ pro každé $f \in C([0, 1])$; b) $\phi(f) = f(0) - \int_0^{1/2} f(2t) \, dt$ pro každé $f \in C([0, 1])$.

3. Ukažte, že $T \in L(X, Y)$ a vyjádřete duální operátor $T^* \in L(Y^*, X^*)$ pomocí reprezentace duálů klasických prostorů.

a) $X = \ell_1, Y = L_p([0, 1])$, kde $p \in [1, \infty)$, $T((x_n))(t) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n t^n, t \in [0, 1]$;

b) $X = \ell_1, Y = C([0, 1])$, $T((x_n))(t) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n t^n, t \in [0, 1]$;

c) $X = L_2([0, 1]), Y = c_0, Tf = (\int_0^{2\pi} f(t) \cos kt \, dt)_{k=1}^{\infty}$; d) $X = L_2([0, 1]), Y = \ell_2, Tf = (\int_0^{2\pi} f(t) \cos kt \, dt)_{k=1}^{\infty}$;

e) $X = Y = C([0, 1]), Tf(t) = f + f(1) - f(0)$; f) $X = Y = C([0, 1]), Tf(t) = f(1 - t)$;

g) $X = Y = C([-1, 1]), Tf(t) = f(t^2)$; h) $X = Y = C([0, 1]), Tf(t) = \int_0^t f$;

4. Ať $k \in \mathbb{N}$.

(a) Ukažte, že $\varphi \in (C^k([0, 1]))^*$ právě když existují $\mu_0, \dots, \mu_k \in M([0, 1])$ splňující

$$\varphi(f) = \sum_{i=0}^k \int_0^1 f(t) \, d\mu_i(t), \quad f^{(k)} \in C^k([0, 1]).$$

a $\|\varphi\| = \max\{\|\mu_i\| : i = 0, \dots, k\}$.

• Ukažte, že $\varphi \in (C^k([0, 1]))^*$ právě když existují $\alpha_0, \dots, \alpha_{k-1} \in \mathbb{K}$ a $\mu \in M([0, 1])$ splňující

$$\varphi(f) = \sum_{i=0}^{k-1} \alpha_i f^{(i)}(0) + \int_0^1 f(t) \, d\mu(t), \quad f^{(k)} \in C^k([0, 1]).$$

3. Další vhodné příklady:

a) teoretičtější k reprezentaci duálních prostorů viz. [3, příklady 25 (1)-(4), 26 bez poznámky o reflexivitě, 29, 30 (1) a (2), 31, 32 (1) a (2), 33, 34, 35]

b) teoretičtější k anihilátorům a kanonickému vnoření do druhého duálu viz. [3, příklady 15, 24 (1) a (2), 27]

c) teoretičtější k duálním a adjungovaným operátorům viz. [4, příklady 23-30]

d) počítači k duálním a adjungovaným operátorům viz. [6, příklady 1 a 2 (n)-(y)]

(mnoho z nich je použito výše)

[3] materiály prof. Kalendy, umístěny na webu zde:

<https://www2.karlin.mff.cuni.cz/~kalenda/data/ufa15-pr2.pdf>

[6] materiály prof. Kalendy, umístěny na webu zde:

<https://www2.karlin.mff.cuni.cz/~kalenda/data/ufa15-dualniop.pdf>

CVIČENÍ 9

Studenti mohou při řešení následujících příkladů používat následující větu

Věta 11 (Arzela-Ascoli). Nechť K je kompaktní metrický prostor a $F \subset C(K, \mathbb{R})$. Pak F je relativně kompaktní v $C(K, \mathbb{R})$ právě když je omezená a stejně spojitá.

Proof. Viz. [8, Věta 13.4.6]. □

1. Určete, zda je operátor $T : X \rightarrow Y$ kompaktní

- a) $X = (\mathbb{K}^n, \|\cdot\|_2)$, $Y = (\mathbb{K}^4, \|\cdot\|)$, $T(x_1, x_2) = (x_1 + x_2, x_3 + 4x_4, x_2 - 3x_3, 4x_1 + 5x_2 + x_4)$
 b) $X = Y = \ell_2$, $T((x_n)) = (0, x_3, x_4, x_5, x_6, \dots)$ c) $X = Y = \ell_2$, $T((x_n)) = (\frac{1}{\sqrt{n}}x_n)_{n=1}^\infty$
 d) $X = \ell_{3/2}$, $Y = c_0$, $T((x_n)) = (\frac{x_1 + \dots + x_{2n}}{\sqrt{n}})_{n=1}^\infty$ e) $X = L_p([0, 1])$, $Y = L_p([0, \frac{\pi}{2}])$, kde $p \in [1, \infty)$, $T(f)(t) = f(\sin t)$
 f) $X = \ell_1$, $Y = L_1([0, 1])$, $T((x_n))(t) = \sum_{n=1}^\infty x_n t^n$ g) $X = Y = \mathcal{C}([0, 1])$, $T(f) = f - 3f(0) + 2f(1)$
 h) $X = Y = \mathcal{C}([0, 1])$, $T(f)(t) = \int_0^1 \exp(2ts)f(s) ds$ i) $X = L_1([0, 2\pi])$, $Y = c_0$, $T(f)(t) = (\int_0^{2\pi} f(t) \sin kt dt)_{k=1}^\infty$

2. Dokažte následující tvrzení:

- a) Nechť (e_n) je ortonormální posloupnost v Hilbertově prostoru H . Dokažte, že pak $e_n \xrightarrow{w} 0$.

Hint: použijte Besselovu nerovnost

- b) Nechť $T \in L(X, Y)$ a $\{x_n\}$ je slabě konvergentní posloupnost v X . Pak $\{Tx_n\}$ je slabě konvergentní.

- c) Pokud $\{x_n\}$ je posloupnost v ℓ_1 , pak x_n konverguje slabě, právě když konverguje v normě (tj. ℓ_1 má **Schurovu vlastnost**).

Návod: Postupujte sporem: Pokud ne, pak v ℓ_1 existuje posloupnost $\{x_k\}$, která slabě konverguje k nule a přitom existuje $\varepsilon > 0$, že $\|x_k\| > \varepsilon$ pro každé $k \in \mathbb{N}$. Ze slabé konvergence plyne konvergence na každé souřadnici. Pomocí matematické indukce zkonstruujte rostoucí posloupnosti přirozených čísel $\{N_j\}$ a $\{M_j\}$, že $\sum_{i=N_j}^\infty |x_{M_j-1}(i)| < \frac{\varepsilon}{100}$ a $\sum_{i=1}^{N_j} |x_{M_j}(i)| < \frac{\varepsilon}{100}$ pro každé $j \in \mathbb{N}$ kde $M_0 = 1$ (tj. x_{M_j} má "98% supportu v $\{N_j, \dots, N_{j+1}\}$ "). Následně najděte $f \in \ell_\infty = (\ell_1)^$, že $f(x_{M_j}) > \frac{\varepsilon}{10}$ pro každé j a z toho odvoďte spor.*

- d) Položíme-li $f_n(x) = \sin(nx) \in L_1([0, 2\pi])$, pak $f_n \xrightarrow{w} 0$, ale $f_n \not\xrightarrow{\|\cdot\|} 0$. Odvoďte, že ℓ_1 není izomorfní $L_1([0, 1])$.

Hint: Pro důkaz $f_n \xrightarrow{w} 0$ použijte Riemannovo-Lebesgueovo Lemma z teorie Fourierových řad a fakt, že $\sin t = \frac{1}{2i}(e^{it} - e^{-it})$ pro $t \in \mathbb{R}$

- e) Ukažte, že prostory c_0 , ℓ_p , $p \in (1, \infty)$ a $\mathcal{C}([0, 1])$ nemají Schurovu vlastnost.

- f) Položíme-li $f_n(x) = \sin(nx) \in L_1([0, 2\pi])$, pak $f_n \xrightarrow{w} 0$, ale $(f_n)^2 \xrightarrow{w} \frac{1}{2}$.

- g) Položíme-li $\mu_n(A) = n\mu(A \cap [0, \frac{1}{n}]) \in \mathcal{M}([0, 1])$, pak $\mu_n \xrightarrow{w^*} \delta(0)$.

3. Další vhodné příklady:

- a) teoretičtější k reflexivním prostorům viz. [3, příklady 24 (3), 25 (5), 32 (3)] a [4, příklad 31]

- b) teoretičtější ke kompaktním operátorům viz. [4, příklady 32-39]

- c) počítačí ke kompaktním operátorům viz. [7, všechny příklady]

[3] materiály prof. Kalendy, umístěny na webu zde:

<https://www2.karlin.mff.cuni.cz/~kalenda/data/ufa15-pr2.pdf>

[4] materiály prof. Kalendy, umístěny na webu zde:

<https://www2.karlin.mff.cuni.cz/~kalenda/data/ufa15-pr3.pdf>

[7] materiály prof. Kalendy, umístěny na webu zde:

<https://www2.karlin.mff.cuni.cz/~kalenda/data/ufa15-kompakt.pdf>

[8] připravovaná skripta z mat. analýzy, umístěna na webu zde:

<https://www2.karlin.mff.cuni.cz/~pick/analyza.pdf>

CVIČENÍ 10

Na desátém cvičení jsme psali zápočtovou písemku.

1. Necht' $k \in C([0, 1]^2)$. Pro $f \in C([0, 1])$ definujeme

$$Tf(t) = \int_0^1 f(s)k(s, t) ds, \quad t \in [0, 1].$$

Ukažte, že $T \in \mathcal{L}(C([0, 1]), C([0, 1]))$ a že T je kompaktní operátor.

2. Necht' $k \in L_2([0, 1]^2)$. Pro $f \in L_2([0, 1]^2)$ definujeme

$$Tf(t) = \int_0^1 f(s)k(s, t) ds, \quad t \in [0, 1].$$

Ukažte, že $T \in \mathcal{L}(L_2([0, 1]^2), L_2([0, 1]^2))$ a že T je kompaktní operátor.

3. Další vhodné teoretické příklady:

a) teoretičtější k úplnosti v Banachových prostorech viz. [4, příklady 1-12]

[4] materiály prof. Kalendy, umístěny na webu zde:

<https://www2.karlin.mff.cuni.cz/~kalenda/data/ufa15-pr3.pdf>

CVIČENÍ 11

1. Dokažte následující tvrzení:

- a) Nechť X je Banachův a $T \in L(X)$ má levý inverz S_1 a pravý inverz S_2 . Dokažte, že T je invertovatelný a $S_1 = S_2 = T^{-1}$.
- b) Nechť X je Banachův a $T \in L(X)$ je invertibilní (tj. T je izomorfismus X na X). Ukažte, že $\lambda \in \sigma(T)$ právě když $\lambda^{-1} \in \sigma(T^{-1})$.
- c) Nechť X je Banachův a $T \in L(X)$ je izometrie X na X . Ukažte, že pak $\sigma(T) \subset \{\lambda : |\lambda| = 1\}$.

2. Pro zadané operátory $T \in L(X)$ určete $\sigma(T)$ a $\sigma_p(T)$:

- a) $X = \ell_2$, $T((x_n)) = (0, x_1, x_2, x_3, \dots)$; b) $X = \ell_2$, $T((x_n)) = (x_2, x_3, x_4, \dots)$;
 c) $X = c_0$, $T((x_n)) = (\frac{1}{n}x_n)_{n=1}^\infty$; d) $X = c_0$, $T((x_n)) = (x_1, \frac{1}{2}x_2, x_3, \frac{1}{4}x_4, x_5, \frac{1}{6}x_6, \dots)$.

3. Další vhodné příklady:

- a) teoretičtější k vyšetřování spektra viz. [4, příklady 41,43,45,46]
 b) počítačí k vyšetřování spektra viz. [8, příklady 3,4,7-10]
 [4] materiály prof. Kalendy, umístěny na webu zde:
<https://www2.karlin.mff.cuni.cz/~kalenda/data/ufa15-pr3.pdf>
 [8] materiály prof. Kalendy, umístěny na webu zde:
<https://www2.karlin.mff.cuni.cz/~kalenda/data/ufa15-spektrum.pdf>

CVIČENÍ 12

1. Pro zadané operátory $T \in L(X)$ určete $\sigma(T)$ a $\sigma_p(T)$:

- a) $X = \mathcal{C}([0, 1])$, $T(f)(t) = \int_0^t f$, $t \in [0, 1]$; b) $X = L_p([0, 1])$ kde $p \in [1, \infty]$, $T(f)(t) = (t - \frac{1}{2})^+ f(t)$, $t \in [0, 1]$;
 c) $X = L_1([0, 1])$, $T(f)(t) = f(t - 1)$, $t \in [0, 1]$.

2. Nechť $T : \ell_2 \rightarrow \ell_2$ je definován předpisem

$$T((x_n)) = (\frac{x_{n+1}}{n+1})_{n=1}^\infty, \quad x \in \ell_2.$$

- a) Nalezněte předpis pro T^* ; b) Dokažte, že operátor T^*T je kompaktní a samoadjungovaný;
 c) Diagonalizujte T^*T , tj. nalezněte posloupnost čísel $\{\lambda_n\}$ a ortonormální posloupnost $\{z_n\}$ splňující

$$T^*Tx = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \langle x, z_n \rangle z_n, \quad x \in \ell_2.$$

3. Uvažujme Banachův prostor $X := \{f \in \mathcal{C}^2([0, 1]) : f(0) = 0 = f(1)\} \subset \mathcal{C}^2([0, 1])$ a operátor $L : X \rightarrow X$ definovaný předpisem $Lf := f''$, $f \in X$.

- a) Dokažte, že vlastní čísla operátoru L jsou $\{-k^2\pi^2\}_{k=1}^\infty$ a příslušně vlastní podprostory jsou jednodimenzionální, generované funkcemi $\{\sin(k\pi x)\}_{k=1}^\infty$.
 b) Uvažujme operátor $T : L_2([0, 1]) \rightarrow L_2([0, 1])$ definovaný předpisem

$$Tf(x) := \int_0^1 k(x, y)f(y) dy, \quad f \in L_2([0, 1]),$$

kde $k(x, y) := \min\{x, y\}(\max\{x, y\} - 1)$, $(x, y) \in [0, 1]^2$. Dokažte, že T je kompaktní samoadjungovaný operátor a $(Tf)'' = f$ pro každé $f \in \mathcal{C}([0, 1])$.

c) Odvoďte, že každý nenulový vlastní vektor T (příslušný vlastnímu číslu λ) je vlastním vektorem L (s příslušným vlastním číslem $\frac{1}{\lambda}$). Z Hilbert-Schidtovy věty pak odvoďte, že

$$Tf(x) = - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2\pi^2} \left(\int_0^1 f(t) \sin(k\pi t) dt \right) \sin(k\pi x), \quad f \in L_2([0, 1]).$$

4. Další vhodné příklady:

a) počítací k vyšetřování spektra viz. [8, příklady 13-16, 18-25 (u příkladu 25 je vyšetření bodového spektra pro $p = \infty$ trikové)]

CVIČENÍ 13

1. Nalezněte Fourierovu transformaci následujících funkcí.

- a) $f(x) = \chi_{[-a, a]}(x)$, kde $a > 0$ b) $f(x) = e^{-ax}\chi_{[0, \infty)}(x)$, kde $a > 0$ c) $f(x) = x \cdot \chi_{[-1, 1]}(x)$
d) $f(x) = (1 - |x|) \cdot \chi_{[-1, 1]}(x)$

2. Nalezněte Fourierovu transformaci funkce f a s její pomocí odvoďte Fourierovu transformaci funkce g .

- a) $f(x) = e^{-|x|}$, $g(x) = x \cdot e^{-|x|}$ b) $f(x) = e^{-|x|}$, $g(x) = e^{-|x|} \cos x$
c) $f(x) = e^{-\frac{x^2}{2}}$, $g(x) = x^2 e^{-x^2}$

(Hint pro určení \hat{f} : Ukažte, že f je jediné řešení ODR $f'(x) + xf(x) = 0$, $f(0) = 1$. Aplikujte na rovnici Fourierovu transformaci a s pomocí známého integrálu $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} = \sqrt{\pi}$ odvoďte že $f = \hat{f}$)

3. Nalezněte Fourierovu transformaci funkce $f(x) = (\cos x) \cdot \chi_{[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]}(x)$ a s její pomocí odvoďte hodnotu integrálu $\int_0^{\infty} \frac{\cos \frac{t\pi}{2}}{1-t^2} \cos(tx) dt$ pro $x \in \mathbb{R}$.

4. Pomocí Fourierovy transformace nalezněte řešení diferenciální rovnice

$$y''(t) - y(t) = e^{-t^2}$$

na intervalu $(-\infty, \infty)$ ve tvaru konvoluce.

5. Pomocí Fourierovy transformace nalezněte řešení integrální rovnice

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-a(x-t)^2} y(x) dx = e^{-bt^2}$$

na intervalu $(-\infty, \infty)$.

(Hint: použijte že pro $f(x) = e^{-x^2/2}$ máme dle jednoho z příkladů výše $\hat{f} = f$)

—————VÝSLEDKY—————

1. a) $\hat{f}(t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\sin(at)}{a}$ b) $\hat{f}(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{a+it}$ c) $\hat{f}(t) = -i \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\sin t - t \cos t}{t^2}$ pro $t \neq 0$, $\hat{f}(0) = 0$ d) $\hat{f}(t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1 - \cos t}{t^2}$
pro $t \neq 0$, $\hat{f}(0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$

2. a) $\widehat{f}(t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{1+t^2}$, $\widehat{g}(t) = \sqrt{\frac{8}{\pi}} \frac{-it}{(1+t^2)^2}$ b) $\widehat{f}(t)$ viz. předchozí příklad, $\widehat{g}(t) = \frac{2(t^2+2)}{t^4+4}$

c) $\widehat{f}(t) = f(t)$, $\widehat{g}(t) = \frac{e^{-t^2/4}}{4\sqrt{2}}(2-t^2)$

3. $\widehat{f}(t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\cos \frac{t\pi}{2}}{1-t^2}$ pro $|t| \neq 1$, $\widehat{f}(\pm 1) = \frac{\sqrt{2\pi}}{4}$, $\int_0^\infty \frac{\cos \frac{t\pi}{2}}{1-t^2} \cos(tx) dt = \frac{\pi}{2} f(x)$

4. $y(t) = -\frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} e^{-|x|} e^{-(x-t)^2} dx$ (Hint: aplikací Fourierovy transformace na zadanou rovnici vyjádřete $\widehat{y} = C \cdot \widehat{f} \widehat{g} = C \widehat{f * g}$ pro jisté funkce $f, g \in \mathcal{S}_1$; k nalezení vhodných funkcí f, g použijte výsledek jednoho z příkladů výše .. při řešení dávejte pozor na předpoklady použitých vět a nezapomeňte odůvodnit proč je nalezené řešení opravdu řešením)

5. $y(t) = \frac{a}{\sqrt{\pi(a-b)}} \exp\left(-\frac{ab}{a-b} t^2\right)$

CVIČENÍ 2

- 2.** a) $\|\varphi\| = 1$, normy se nabývá například pro $x = e_1$ b) $\|\varphi\| = 1$, normy se nenabývá c) $\|\varphi\| = \frac{1}{4}$, normy se nenabývá d) $\|\varphi\| = \frac{1}{4}$, normy se nabývá pro $f(t) = \operatorname{sgn}(t - \frac{1}{2})$ e) $\|\varphi\| = 1$, normy se nabývá například pro $x = (\frac{-1}{2^n})_{n=1}^\infty$ f) $\|\varphi\| = 1$, normy se nenabývá g) $\|\varphi\| = \|(\frac{1}{n})\|_2$, normy se nabývá například pro $x = (\frac{1}{n} \cdot (\sum_{i=1}^\infty \frac{1}{i^2})^{-1/2})_{n=1}^\infty$ h) $\|\varphi\| = \|(\frac{1}{n})\|_q$, normy se nabývá například pro $x = (\frac{1}{n^{q-1}} \cdot (\sum_{i=1}^\infty \frac{1}{i^q})^{-1/p})_{n=1}^\infty$
i) $\|\varphi\| = 2$, normy se nabývá například pro $f(t) = 1 - 2t$ j) $\|\varphi\| = \frac{1}{2}$, normy se nabývá například pro $\chi_{[0, \frac{1}{2}]}$
k) $\|\varphi\| = 1$, normy se nenabývá l) $\|\varphi\| = \frac{1}{2}$, normy se nenabývá

- 3.** b) pro $p < q$ máme $\ell_p \subsetneq \ell_q \subsetneq c_0$ c) pro $p < q$ máme $L_q([0, 1]) \subsetneq L_p([0, 1])$ d) pro $p < q$ máme $L_q(\mathbb{R}) \not\subset L_p(\mathbb{R})$
a) $L_p(\mathbb{R}) \not\subset L_q(\mathbb{R})$

CVIČENÍ 3

Některé výsledky příkladů **3.-4.** ze zdroje <https://www2.karlin.mff.cuni.cz/~kalenda/data/ufa15-normy.pdf>:

- a) T je izometrie, není na, $\operatorname{Rng} T = \{x: x(1) = 0\}$
b) $\|T\| = 1$, normy se nabývá, T není prostý a je na, $\operatorname{Ker} T = \{x: x(i) = 0 \text{ pro každé } i \neq 1\}$
c) T je izometrie na
e) $\|T\| = 1$, normy se nabývá, T není prostý a není na, $\operatorname{Ker} T = \{x: x(2i) = 0, i \in \mathbb{N}\}$
f) $\|T\| = 1$, normy se nabývá, T je prostý a není na, $\operatorname{Rng} T = \{x: (nx_n)_{n=1}^\infty \in \ell_2\}$, není izomorfismus
g) $\|T\| = 2$, normy se nabývá, T je prostý a na, je izomorfismus
h) $\|T\| = 1$, normy se nenabývá, T je prostý a na, je izomorfismus
i) $\|T\| = 1$, normy se nabývá, T je prostý a není na, $\operatorname{Rng} T = \{x \in \ell_\infty: (x_n - x_{n-1})_{n=1}^\infty \in \ell_1\}$ (kde $x_0 := 0$), není izomorfismus
k) $\|T\| = 3$, normy se nabývá, T je prostý a na, je izomorfismus
l) $\|T\| = r$, normy se nabývá, T je prostý a není na, není izomorfismus
n) $\|T\| = \frac{1}{2}$, normy se nabývá, T je prostý, není izomorfismus
r) $\|T\| = r + 1$, normy se nabývá, T je prostý a není na, $\operatorname{Rng} T = \{f: f(0) = 0\}$, je izomorfismus
s) $\|T\| = 1$, normy se nenabývá, T není prostý a je na, $\operatorname{Ker} T = \{f: f \equiv \operatorname{const}\}$, není izomorfismus

CVIČENÍ 4

- 2.** a) $\|T\| = 1$, normy se nabývá, T není prostý a je na, $\operatorname{Ker} T = \{ce^t: c \in \mathbb{R}\}$
b) pro $p = \infty$ je T izometrie na; pro $p \in [1, \infty)$ je $\|T\| = 2^{1/p}$, normy se nenabývá, T je prostý a není na, není izomorfismus
c) $\|T\| = 1$, normy se nabývá, T není prostý a je na, $\operatorname{Ker} T = \operatorname{span}\{\sin(t), \cos t\}$, není izomorfismus
d) $\|T\| = \frac{1}{2}$, normy se nabývá pouze pokud $p = \infty$, je prosté a není na, není izomorfismus.
3. a) $\|\varphi_1\| = 1$, nenabývá se; $\|\varphi_2\| = \frac{1}{\sqrt{3}}$, nabývá se; $\|\varphi_3\| = 1$, nenabývá se
(podrobnější postup řešení viz. <https://www2.karlin.mff.cuni.cz/~kalenda/pis-fsv/1516/pisufa.htm>)
b) $T \in (L_p([0, 1]))^*$ právě když $k \geq 0$, pro $p = 1$ je $\|T\| = 1$ a normy se nabývá právě když $k = 0$; pro $p \in (1, \infty)$ je $\|T\| = \|x^k\|_q = \sqrt[q]{\frac{p-1}{kp+p-1}}$ kde $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ a normy se nabývá pro každé $k \geq 0$
c) $\|\varphi_1|_{Y_1}\| = \|\varphi_1|_{Y_2}\| = \|\varphi_2|_{Y_1}\| = \|\varphi_2|_{Y_2}\| = \frac{2}{3}$, normy nabývají pouze funkcionály $\varphi_1|_{Y_1}$ a $\varphi_2|_{Y_2}$.

CVIČENÍ 6

3. a) ON báze Y je například $\{\frac{1}{\sqrt{2}}(1, 0, i), \frac{1}{\sqrt{6}}(-1, 2, i)\}$ (vznikne ortogonalizací báze $\{(1, 0, i), (0, 1, i)\}$), OG projekce dána předpisem $P_Y x = (\frac{2}{3}x_1 - \frac{1}{3}x_2 - \frac{i}{3}x_3, -\frac{1}{3}x_1 + \frac{2}{3}x_2 - \frac{i}{3}x_3, \frac{i}{3}x_1 + \frac{i}{3}x_2 + \frac{2}{3}x_3)$, nejbližším bodem v Y k bodu $x_0 = (i, 2, 0)$ je bod $\frac{1}{3}(-2 + 2i, 4 - i, -1 + 2i)$.

b) ON báze Y je například $\{\frac{1}{\sqrt{2}}, \sqrt{\frac{3}{2}}x, \sqrt{\frac{5}{8}}(3x^2 - 1)\}$ (vznikne ortogonalizací báze $\{1, x, x^2\}$), OG projekce dána předpisem

$$P_Y f(x) = \left(\frac{45}{8}x^2 - \frac{5}{8}\right) \int_{-1}^1 t^2 f(t) dt + \frac{3}{2}x \int_{-1}^1 t f(t) dt + \left(-\frac{15}{8}x^2 + \frac{9}{8}\right) \int_{-1}^1 f(t) dt,$$

nejbližším bodem v Y k bodu $x_0 = \sin t$ je bod $f(x) = 3x(\sin 1 - \cos 1)$.

c) ON báze Y je například $\{\frac{1}{\sqrt{\pi}}, \sqrt{\frac{2}{\pi}}x, \sqrt{\frac{2}{\pi}}(2x^2 - 1)\}$ (vznikne ortogonalizací báze $\{1, x, x^2\}$), OG projekce dána předpisem

$$P_Y f(x) = \left(\frac{8}{\pi}x^2 - \frac{4}{\pi}\right) \int_{-1}^1 \frac{t^2 f(t)}{\sqrt{1-t^2}} dt + \frac{2}{\pi}x \int_{-1}^1 \frac{t f(t)}{\sqrt{1-t^2}} dt + \left(-\frac{4}{\pi}x^2 + \frac{3}{\pi}\right) \int_{-1}^1 \frac{f(t)}{\sqrt{1-t^2}} dt,$$

nejbližším bodem v Y k bodu $x_0 = \sin t$ je bod $f(x) = \frac{3}{4}x$.

d) ON báze Y je například $\{1, x - 1, \frac{x^2}{2} - 2x + 1\}$, OG projekce je dána vzorcem

$$P(f)(x) = \left(\frac{x^2}{4} - x + \frac{1}{2}\right) \cdot \int_0^\infty t^2 e^{-t} dt + (-x^2 + 5x - 3) \cdot \int_0^\infty t e^{-t} dt + \left(\frac{x^2}{2} - 3x + 3\right) \cdot \int_0^\infty e^{-t} dt,$$

nejbližší bod je $f(x) = 600x^2 - 2520x + 720$.

CVIČENÍ 7

5. a) $T^*(y_1, y_2, y_3) = (y_1 + y_2 + 2y_3, y_1 - y_2 + y_3) = T^*(y_1, y_2, y_3)$; b) $T^*(y_1, y_2, y_3) = (y_1 + (1+i)y_2 + y_3, iy_1 - y_2 - 2iy_3)$, $T^*(y_1, y_2, y_3) = (y_1 + (1-i)y_2 + y_3, -iy_1 - y_2 + 2iy_3)$; c) $T^*((y_n)) = T^*((y_n)) = (y_2, y_3, y_4, \dots)$; d) $T^*((y_n)) = T^*((y_n)) = (0, y_1, y_2, y_3, \dots)$; e) $T^*((y_n)) = (y_1, iy_2, y_3, iy_4, \dots)$, $T^*((y_n)) = (y_1, -iy_2, y_3, -iy_4, \dots)$; f) $T^*((y_n)) = T^*((y_n)) = (y_1 - 2y_2, y_2 - y_1, y_3, y_4, \dots)$; g) $T^*((y_n)) = (\sum_{k=n}^\infty \frac{y_k}{k})_{n=1}^\infty$; h) $T^*((y_n)) = (\sum_{k=1}^n y_k)_{n=1}^\infty$; i) $T^*(g)(t) = 2tg(t^2)$; j) $T^*(g) = \chi_{[0, \frac{1}{2}]}$.

CVIČENÍ 8

1. a) $\|\varphi\| = \frac{\sqrt{5}}{2}$ b) $\|\varphi\| = 2$. 2. a) $\mu = \frac{\delta_0 + \delta_1}{2} + t\lambda$ b) $\delta_0 - \frac{1}{2}\lambda$
3. a) $T^*(g) = (\int_0^1 g(t)t^n dt)_{n=1}^\infty$, $g \in L_q([0, 1])$ b) $T^*(\mu) = (\int_{[0,1]} t^n d\mu(t))_{n=1}^\infty$, $\mu \in M([0, 1])$
c) $T^*((y_n))(t) = \sum_{n=1}^\infty y_n \cos(nt)$ (řada konverguje absolutně v $L_\infty([0, 2\pi])$) d) $T^*((y_n))(t) = \sum_{n=1}^\infty y_n \cos(nt)$ (řada konverguje v prostoru $L_2([0, 2\pi])$) e) $T^*(\mu) = \mu + \mu([0, 1])(\delta_1 - \delta_0)$ f) $T^*(\mu)(A) = \mu(\{t \in [0, 1] : 1-t \in A\})$ pro $A \subset [0, 1]$ borelovskou g) $T^*(\mu)(A) = \mu(\{t \in [-1, 1] : t^2 \in A\})$ pro $A \subset [-1, 1]$ borelovskou h) $T^*(\mu)(A) = \int_A \mu([t, 1]) dt$ pro $A \subset [0, 1]$ borelovskou

CVIČENÍ 9

1. a) ano b) ne c) ano d) ano e) ne f) ano g) ne h) ano i) ne