VÝSLEDKY

I. NEROVNOSTI, ATD. - OPAKOVÁNÍ

1. a) $x \in (4; 6 >$, $\quad x \in (-6; -3) \cup (\frac{-1-\sqrt{13}}{2}; \frac{-1+\sqrt{13}}{2})$,
b) $x \in < 1; 2 >$, $\quad x = \frac{4}{3}$,
c) $x \in \bigcup_{k\in\mathbb{N}} ((-\frac{\pi}{2} + 2k\pi; \frac{\pi}{6} + 2k\pi) \cup (\frac{\pi}{2} + 2k\pi; \frac{5\pi}{6} + 2k\pi))$

II. VÝROKOVÁ LOGIKA

1. a) $\forall m \in M\ \forall z \in Z : S(m, z) \Rightarrow L_1(m, z)$,
b) $\forall z \in Z\ \exists m \in M : L_1(m, z)$,
c) $\forall z \in Z\ \forall m_1 \in M\ \forall m_2 \in M : S(m_1, z)\ \&\ S(m_2, z) \Rightarrow m_1 = m_2$,
d) $\forall m \in M\ \forall z_1 \in Z\ \forall z_2 \in Z : S(m, z_1)\ \&\ S(m, z_2) \Rightarrow z_1 = z_2$ (NE);
e) $\exists z \in Z\ \exists m \in M : S(m, z)$;
f) $\exists m \in M\ \exists z \in Z : S(m, z)$ (ANO);
g) Existuje nevěrná manželka (aspoň jedna):
$\exists z \in Z\ \exists m_1 \in M\ \exists m_2 \in M(m_1 \neq m_2\ \&\ S(m_1, z)\ \&\ L_2(m_2, z))$,
existují nevěrné manželky (aspoň dvě):
$\exists z_1 \in Z\ \exists z_2 \in Z \exists m_1 \in M\ \exists m_2 \in M\ \exists m_3 \in M\ \exists m_4 \in M$
$(z_1 \neq z_2\ \& m_1 \neq m_2\ \&\ m_3 \neq m_4\ \&\ S(m_1, z_1)\ \&\ L_2(m_2, z_1)\ \&\ S(m_3, z_2)\ \&\ L_2(m_4, z_2))$.
h) Existuje svobodný muž.
i) Existuje žena, která žádnému muži neopětuje lásku.
j) Existuje žena, jíž žádný muž neopětuje lásku.
k) Každá žena, která někoho miluje, nemiluje některého muže, který miluje ji.

2. a) Platí, negace $\exists x \in \mathbb{N}\ \forall y \in \mathbb{N}\ \exists z \in \mathbb{N}\,(z > x\ \&\ y \geq z)$;
b) Platí, negace $\forall y \in \mathbb{N}\ \exists x \in \mathbb{N}\ \exists z \in \mathbb{N}\ (z > x\ \&\ y \geq< z)$;
c) Neplatí, negace $\forall x \in \mathbb{N}\ \exists y \in \mathbb{N}\ \exists z \in \mathbb{N}\,(z > x\ \&\ y \geq z)$;
d) Platí, negace $\forall x \in \mathbb{N}\ \exists y \in \mathbb{N}\ \exists z \in \mathbb{N}\,(z < x\ \&\ y \leq z)$;
e) Platí, negace $\exists x \in \mathbb{R}\ \exists \varepsilon > 0\ \forall \delta > 0\ \exists y \in \mathbb{R}\,(|y - x| < \delta\ \&\ y \geq x + \frac{\varepsilon}{3})$.

3. a) $f(y) = 15$ pro všechna $y \in (2, 12)$;
b) Funkce f je na konstantní na $\mathbb{R}$.

4. Pokud je $a \neq 0$, pak za δ lze zvolit číslo menší rovno jak $\min\{|\frac{1}{a}|, |\frac{3}{a}|\}$. Pokud je $a = 0$, pak lze za δ zvolit cokoliv.
Platné výroky jsou: a, b, d, e, f, neplatné pak: c.

5. a) oba lhali; b) buď sto, nebo více jak sto; c) Jsou tři možná řešení rozložení nákladu zvířat, a to sice:
Osel olej, kozel olej, velbloud datle,
Osel datle, kozel olej, velbloud olej,
Osel datle, kozel olej, velbloud datle.

III. SUPREMA A INFIMA

1. $\sup A = 1$, $\inf A = 0$, maximum a minimum neexistuje.
2. a),b) $\max B_1 = \max B_2 = 1$, $\min B_1 = \min B_2 = -1$; c) $\max B_3 = 1$, $\inf B_3 = 0$, minimum neexistuje.
3. a) C_1 není shora ani zdola omezená; b) C_2 není shora omezená, $\min C_2 = 3$; c) C_3 není zdola omezená, $\max C_3 = 0$.
4. a) $\max D_1 = \frac{5}{6}$, $\inf D_1 = 0$, minimum neexistuje; b) D_2 není shora omezená, $\inf D_2 = 0$, minimum neexistuje.
5. E není shora omezená, $\inf E = 0$, minimum neexistuje.
6. a) $\max F_1 = 1$, $\inf F_1 = -1$, minimum neexistuje; b) $\sup F_2 = 1$, $\min F_1 = 0$, maximum neexistuje; c) $\max F_3 = 1$, $\inf F_3 = -1$, minimum neexistuje.
7. a) $\sup(A\cup B) = \max\{S, T\}$, $\inf(A\cup B) = \min\{s, t\}$. b) Pokud $A\cap B \neq \emptyset$, pak $\max\{s, t\} \leq \inf(A\cap B) \leq \sup(A\cap B) \leq \min\{S, T\}$ (a víc říci nelze). c) $\sup(A + B) = S + T$, $\inf(A + B) = s + t$. d) $\sup(-A) = -s$, $\inf(-A) = -S$. e) $\sup(A \cdot B) = \max\{S \cdot T, s \cdot t, s \cdot T, S \cdot t\}$, $\inf(A \cdot B) = \min\{S \cdot T, s \cdot t, s \cdot T, S \cdot t\}$. f) $\sup(A - B) = S - t$, $\inf(A - B) = s - T$. g) Pokud $A \setminus B \neq \emptyset$, pak $s \leq \inf(A \setminus B) \leq \sup(A \setminus B) \leq S$ (a víc říci nelze). h) Pokud $A\triangle B \neq \emptyset$, pak $\min\{s, t\} \leq \inf(A \cap B) \leq \sup(A \cap B) \leq \max\{S, T\}$ (a víc říci nelze).

IV. LIMITY POSLOUPNOSTÍ

3. a) 0 b) 2 c) 2 d) 0 e) 0 f) Nemá limitu g) 0 h) 0 i) 0 j) $\frac{1}{2}$ k) $-\frac{1}{2}$ l) $\frac{1}{3}$ m) $\frac{1}{4}$ n) 1 pro $a > 0$, 0 pro $a = 0$ o) 1 p)$\max\{A, B, C\}$ q) $\frac{x}{2}$ r) 1 s) 2 t) ∞
4. a) $-\frac{7^7}{3^6}$ b) 30 c) 2 d) $-54 \cdot 5^{10} \cdot \sqrt[6]{21}$ e) -5^{35} f) $\frac{11}{9}$ g) $\frac{3}{4}$ h) $-\frac{50}{99}$

V. LIMITY FUNKCÍ

1. $-\frac{1}{2}$ **2.** $\frac{3}{2}$ **3.** $\frac{112}{27}$ **4.** $\frac{1}{2}mn(n-m)$ **5.** $\frac{1}{2}n(n+1)$ **6.** $\frac{1}{n}$ **7.** $\frac{an-bm}{mn}$ **8.** $\frac{m}{n}$ **9.** Limita neexistuje (zleva -1, zprava 0) **10.** 1 **11.** -3 **12.** $\frac{\sqrt{3}}{3}$ **13.** 2 **14.** $\frac{\alpha}{\beta}$, pokud $\beta \neq 0$ **15.** $\frac{4}{3}$ **16.** -1 **17.** $-\frac{1}{12}$ **18.** $\frac{\alpha^2}{\beta^2}$, pokud $\beta \neq 0$ **19.** $-\frac{1}{2}$ **20.** 0 **21.** e^3 **22.** e **23.** 1 **24.** $\frac{1}{5}$ **25.** **26.** $\frac{3}{2}$ **27.** $\frac{1}{e}$ **28.** Limita neexistuje (zleva $+\infty$, zprava $-\infty$) **29.** $+\infty$ **30.** $\frac{2}{3}$ **31.** $3\log 2$ **32.** 0 **33.** $\frac{1}{2}$ **34.** 1 **35.** 0 pro $\alpha < \frac{1}{2}$, $\sqrt{2}$ pro $\alpha = \frac{1}{2}$, $+\infty$ pro $\alpha > \frac{1}{2}$ **36.** $-\frac{1}{2}$ **37.** 2 **38.** -1

V. LIMITY FUNKCÍ - ze zkouškových písemek

1. $\sqrt{2}$ **2.** $\frac{1}{3\log 3}$ **3.** limita neexistuje (zprava $\sqrt{2}$, zleva $-\sqrt{2}$) **4.** $\frac{9}{2}$ **5.** $\frac{3}{4}$ **6.** -6 **7.** $\sqrt{e}$

VI. SPOJITOSTI A DERIVACE

1. f je definována a spojitá na $\mathbb{R}$, $f'(x) = 87(x^2 + 51x + 119)^{86} \cdot (2x + 51)$.
2. f je definována a spojitá na $\mathbb{R}$, $f'(x) = 3(x+15)^2(x-17)^{10}x^9 + 10(x+15)^3(x-17)^9x^9 + 9(x+15)^3(x-17)^{10}x^8$.
3. f je definována a spojitá na $(-\infty, -1) \cup (-1, 0) \cup (0, +\infty)$,

$$f'(x) = \frac{\left((2x+1)e^{x^2+1} \cdot \cos x - e^{x^2+1} \cdot \sin x\right) \cdot (x+1) \cdot \log(x^2+1) - e^{x^2+1} \cdot \cos x \cdot \left(2 \cdot \log(x^2+1) + \frac{2x(x+1)}{x^2+1}\right)}{(x+1)^3 \cdot \log^2(x^2+1)}$$

.
4. f je definována a spojitá na $\mathbb{R}$, $f'(x) = \frac{2x+1}{x^2+x+1}$
5. f je definována a spojitá na $\mathbb{R}$,

$$f'(x) = -18\cos\left(\cos\left((x^3 + 17x^2 - 56x + 1)^{18}\right)\right) \cdot \sin\left((x^3 + 17x^2 - 56x + 1)^{18}\right) \cdot (x^3 + 17x^2 - 56x + 1)^{17} \cdot (3x^2 + 34x - 56)$$

.
6. f je definována a spojitá na $(0, \infty)$, $\lim\limits_{x\to 0+} f(x) = +\infty$, nelze spojitě rozšířit. $f'(x) = \left(\frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{x}+2} \cdot (\log x - 1)$ pro $x > 0$.
7. f je definována a spojitá na $\bigcup\limits_{k\in\mathbb{Z}}(2k\pi, (2k+1)\pi)$. $\lim\limits_{x\to 2k\pi+} f(x) = 0$, $\lim\limits_{x\to(2k+1)\pi-} f(x) = +\infty$, lze tedy spojitě rozšířit na $\bigcup\limits_{k\in\mathbb{Z}}\langle 2k\pi, (2k+1)\pi)$. $f'(x) = (\sin x)^{\cos x} \cdot (\frac{\cos^2 x}{\sin x} - \sin x \log \sin x)$ pro $x \in \bigcup\limits_{k\in\mathbb{Z}}(2k\pi, (2k+1)\pi)$. Po dodefinování je $f'_+(2k\pi) = 1$.
8. f je definována a spojitá na $\langle -1, 1)$, $\lim\limits_{x\to 1-} f(x) = -\infty$. $f'(x) = -\frac{1}{\arccos x \cdot \sqrt{1-x^2}}$ pro $x \in (-1, 1)$, $f'_+(-1) = -\infty$.
9. f je definována a spojitá na $\langle 0, +\infty)$. $f'(x) = \arcsin\sqrt{\frac{x}{x+1}}$ pro $x > 0$, $f'_+(0) = 0$.
10. f je definována a spojitá na $\mathbb{R}$, $f'(x) = \frac{e^x - 1}{e^{2x} + 1}$ pro $x \in \mathbb{R}$.

VI. SPOJITOSTI A DERIVACE - některé příklady z loňských písemek

1 - 3. viz. výsledky zkouškové písemky z roku 2008/2009, varianty A, B, C
http://www.karlin.mff.cuni.cz/ kalenda/pis-fsv/0809/pis.htm

VII. PRŮBĚH FUNKCE

1. $D_f = \mathbb{R}$, f je spojitá na $\mathbb{R}$, limita v $-\infty$ je $-\infty$, limita v $+\infty$ je $+\infty$, f je rostoucí na $(-\infty, -\frac{1}{3}\rangle$, klesající na $\langle -\frac{1}{3}, 1\rangle$, rostoucí na $\langle 1, +\infty)$;$f'(-1) = +\infty$, $f'_-(1) = -\infty$, $f'_+(1) = +\infty$; v bodě $-\frac{1}{3}$ má f lokální maximum, v bodě 1 má lokální minimum; $H_f = \mathbb{R}$, f je konvexní na $(-\infty, -1)$, konkávní na $(-1, 1) \cup (1, +\infty)$, f nemá žádné inflexní body. Asymptota v $+\infty$ i v $-\infty$ je $y = x - \frac{1}{3}$.
2. $D_f = \mathbb{R}$, f je spojitá na $\mathbb{R}$, limita v $-\infty$ je $\frac{\pi}{2}$, limita v $+\infty$ je $\frac{\pi}{2}$, f je rostoucí na $(-\infty, -1\rangle$, klesající na $\langle -1, 1\rangle$, rostoucí na $\langle 1, +\infty\rangle$; v bodě -1 má globální maximum rovné π, v bodě 1 má globální minimum rovné 0, $f'_-(-1) = -1$, $f'_+(-1) = 1$, $f'_-(1) = 1$, $f'_+(1) = -1$, $H_f = \langle 0, \pi\rangle$. f je konvexní na $(-\infty, -1) \cup (-1, 0\rangle$, konkávní na $\langle 0, 1) \cup (1, +\infty)$. V bodě 0 má inflexní bod. Asymptota v $+\infty$ i v $-\infty$ je $y = \frac{\pi}{2}$.

3 - 5. viz. výsledky zkouškové písemky z roku 2008/2009, varianty E, D, B
http://www.karlin.mff.cuni.cz/ kalenda/pis-fsv/0809/pis.htm