III. PARCIÁLNÍ DERIVACE

Spočtěte parciální derivace funkcí všude, kde existují

1. $x^m y^n$ **2.** e^{xy} **3.** $xy + yz + zx$ **4.** $|x| \cdot |y|$ **5.** $|y + \cos x|$ **6.** $|\sin y - \sin x|$ **7.** $|\cos y - \sin x|$ **8.** $\left(\frac{x}{y}\right)^z$
9. $x^{\frac{y}{z}}$ **10.** $\sin(x^y)$ **11.** $f(x,y) = e^{\frac{-\pi}{x^2+3xy+3y^2}}$, $f(0,0) = 0$ **12.** $\sqrt{x + y^2}$ **13.** $\sqrt{x^2 - y^2}$

III.PŘÍKLADY NA PARCIÁLNÍ DERIVACE Z MINULÝCH LET

Určete a nakreslete definiční obor funkce f, spočtěte parciální derivace podle všech proměnných všude, kde existují, a napište rovnici funkce jejímž grafem je tečná rovina ke grafu funkce f v bodě B

14. $f(x,y) = \sqrt{e^{xy} - e}$; $B = [1, 1+\log 2, f(1, 1+\log 2)]$ **15.** $f(x,y) = \log \frac{1-|x|}{1-|y|}$; $B = [5, -5, f(5,-5)]$ **16.** $f(x,y) = \sqrt{e^{x^2+y^2} - e^4}$; $B = [3, 0, f(3,0)]$ **17.** $f(x,y) = \sqrt{x^2 - y^2}$; $B = [-1, 0, f(-1,0)]$

IV. EXTRÉMY FUNKCÍ VÍCE PROMĚNNÝCH - BEZ LAGRANGEOVÝCH MULTIPLIKÁTORŮ

V následujících úlohách zjistěte sup **a** inf **funkce na množině** M **a vyšetřete, zda těchto hodnot funce na** M **nabývá.**

1. $f(x,y) = x - 2y - 3$; $M = \{[x,y]; 0 \le x \le 1, 0 \le y \le 1, x + y \le 1\}$
2. $M = \langle -1, 1\rangle \times \langle -1, 1\rangle \times \langle -1, 1\rangle$; a) $f(x,y,z) = 2x + 3y - z^2$ b) $f(x,y,z) = (x+y)^2 + (x-y)^2 + z$
3. $f(x,y) = x^2 - xy + y^2$; $M = \{[x,y]; |x| + |y| \le 1\}$ **4.** $f(x,y) = \frac{x}{a} + \frac{y}{b}, a > 0, b > 0$; $M = \{[x,y]; x^2 + y^2 \le 1\}$
5. $M = \mathbb{R}^2$; a) $f(x,y,z) = x^2 + 2x + 2 + y^2$ b) $f(x,y,z) = x^2 + 4x + 5 - 3y^2 - 3y$
c) $f(x,y,z) = 3x + 5 - 2x^2 - y^2$ **6.** $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 + 2x + 4y - 6z$; $M = \mathbb{R}^3$
7. $M = \mathbb{R}^2$; a) $f(x,y,z) = (x^2 + y^2)e^{-(x^2+y^2)}$ b) $f(x,y,z) = (x^2 + 5y^2)e^{-(3x^2+y^2)}$
8. $f(x,y) = x^2 + y^2$; $M = \{[x,y]; x^2 + 4y^2 = 1\}$ **9.** $f(x,y) = x^2 + 12xy + 2y^2$; $M = \{[x,y]; 4x^2 + y^2 = 1\}$
10. $f(x,y) = xy$; $M = \{[x,y]; x + y = 5\}$ **11.** $f(x,y,z) = x^2 + 3y^2 - z^2$; $M = \{[x,y,z]; x^2 + y^2 + z^2 \le 100\}$
12. $f(x,y) = (x+y)e^{-(2x+3y)}$; $M = \{[x,y]; x > 0, y > 0\}$

V. EXTRÉMY FUNKCÍ VÍCE PROMĚNNÝCH - S LAGRANGEOVÝMI MULTIPLIKÁTORY

V následujících úlohách zjistěte sup **a** inf **funkce na množině** M **a vyšetřete, zda těchto hodnot funce na** M **nabývá.**

1. $f(x,y,z) = x - 2y + 2z$, a) $M = \{[x,y,z]\,, x^2+y^2+z^2 = 1\}$, b) $M = \{[x,y,z]\,, x^2+y^2+z^2 = 1, x+y+z = 0\}$
2. $f(x,y,z) = \sin x \sin y \sin z$, $M = \{[x,y,z]\,; x+y+z = \frac{\pi}{2}, x > 0, y > 0, z > 0\}$
3. $f(x,y,z) = xy^2z^3$, $M = \{[x,y,z]\,; x+2y+3z = a, x > 0, y > 0\}$, kde $a > 0$.
4. $f(x,y,z) = 10z + x - y$, $M = \{[x,y,z], x^2+y^2+z^2 \leq 1, y+x \geq 0\}$

V. IMPLICITNÍ FUNKCE

1. Je dána vztah $x^2 + 2xy^2 + y^4 - y^5 = 0$ a bod $[0, 1]$. Dokažte, že:

a) tímto vztahem je definována hladká funkce $y = f(x)$ v jistém okolí bodu 0, pro kterou platí $f(0) = 1$;

b) spočtěte $f'(0)$.

c) spočtěte $f''(0)$.

2. Je dán vztah $x^2 + 2y^2 + 3z^2 + xy - z - 9 = 0$ a bod $[1, -2, 1]$:

a) Dokažte, že tímto vztahem je definována hladká funkce $z = z(x, y)$ v jistém okolí U bodu $[1, -2]$, pro kterou platí $z(1, -2) = 1$;

b) určete $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$ v okolí U;

c) napište rovnici tečné roviny ke grafu funkce $z = z(x, y)$ v bodě $[1, -2]$.

V následujících příkladech ukažte, že daná rovnice určuje v jistém okolí bodu $M = [m_1, m_2]$ implicitně zadanou funkci $y = f(x)$. Spočtěte $f'(m_1)$ a $f''(m_1)$ a napište rovnici tečny ke grafu funkce f v bodě 0. Jedná se o příklady, které byli v minulých letech u zkouškových písemek.

3. $\operatorname{arctg} \frac{x+2y}{3} + \operatorname{arctg} \frac{2x+y}{3} = \frac{\pi}{2}$, $M = [1, 1]$ **4.** $x^y + y^x = 3$, $M = [1, 2]$

5. $\cos(y + xe^x) + \sin(y - xe^x) = -1$, $M = [0, \pi]$

VII. MATICE - SOUSTAVY ROVNIC

1. Najděte řešení soustav lineárních rovnic:

a) $\begin{array}{rcrcrl} x & + & 2y & - & z & = 1 \\ 2x & + & 3y & & & = 1, \\ & - & y & + & z & = 1 \end{array}$ b) $\begin{array}{rcrcrl} x & & & - & z & = -2 \\ -x & + & y & & & = 1\ , \\ 2x & + & y & + & 3z & = 13 \end{array}$ c) $\begin{array}{rcrcrcrl} x_1 & + & 2x_2 & - & x_3 & + & x_4 & = 2 \\ x_1 & & & & & - & x_4 & = -1 \\ & & x_2 & + & x_3 & & & = 0\ , \\ x_1 & + & 2x_2 & & & & & = -1 \end{array}$

2. Najděte všechna řešení soustavy $\mathbb{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ pro uvedenou matici $\mathbb{A}$ a uvedený vektor $\mathbf{b}$, kde

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 1 \\ 2 & 3 & -1 & 2 \\ 7 & -1 & 4 & -3 \\ 1 & 1 & -2 & -1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} -5 \\ 0 \\ 15 \\ -3 \end{pmatrix}$$

VII. MATICE - PŘÍKLADY Z MINULÝCH LET

1. Najděte všechna řešení soustavy $\mathbb{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ pro uvedenou matici $\mathbb{A}$ a uvedené tři vektory pravých stran $\mathbf{b}_1$, $\mathbf{b}_2$ a $\mathbf{b}_3$:

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 5 & 8 & 13 & 21 \\ 1 & 5 & 1 & 8 \\ 2 & 13 & 3 & 21 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b}_2 = \begin{pmatrix} 9 \\ 6 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

2. Pro která $x \in \mathbb{R}$ je následující matice regulární? Spočtěte inverzní matici v závislosti na x:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 14 \\ 10 & 2 & 4 & 28 \\ 0 & 0 & 0 & 7 \\ 7 & 4 & 4 & 7x \end{pmatrix}$$

3. Určete hodnost následující matice v závislosti na parametrech $x, y \in \mathbb{R}$:

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 & 7 \\ 19 & 17 & 13 & 11 \\ x & 5 & 3 & 2 \\ 11 & 13 & 17 & y \end{pmatrix}$$

4. Určete hodnost následující matice v závislosti na parametrech $x, y \in \mathbb{R}$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & x & x+1 \\ y & y+1 & 15 & 16 \end{pmatrix}$$

VIII. ŘADY

Určete, kdy daná řada konverguje, konverguje absolutně a kdy diverguje

1. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k!}{k^k}$ **2.** $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(k!)^2}{k^k}$ **3.** $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^k}{k!}$ **4.** $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(k!)^2}{(2k)!}$ **5.** $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{A^k k!}{k^k}, A \in \langle 0; \infty)$ **6.** $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \left(\frac{8k+2}{5k+43}\right)^k$

7. $\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{3+(-1)^k}{4}\right)^k$ **8.** $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}, x \in \mathbb{R}$ **9.** $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{x^k}, x \in \mathbb{R}$ **10.** $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^{k^2}}{2^k}, x \in \mathbb{R}$

11. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{e^{kx}}{k}, x \in \mathbb{R}$ **12.** $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{e^{kx}}{k^2}, x \in \mathbb{R}$ **13.** $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k^a \log^b k}, a, b \in \mathbb{R}, a \neq 1$ **14.** $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[k]{\log(k+1)}}$

15. $\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{k-1}{k+1}\right)^{k(k-1)}$ **16.** $\sum_{k=1}^{\infty} (\sqrt{k+1} - \sqrt{k-1})$ **17.** $\sum_{k=1}^{\infty} (\sqrt{k^2+1} - \sqrt{k^2-1})$

18. $\sum_{k=1}^{\infty} (\sqrt[3]{k+1} - \sqrt[3]{k-1})$ **19.** $\sum_{k=1}^{\infty} (\sqrt[3]{k^2+1} - \sqrt[3]{k^2-1})$ **20.** $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{1+x^{2k}}, x \in \mathbb{R}$

21. $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{2k^2+3k+5}{2k^2+4}$ **22.** $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{2k^2+3k+4}{2k^4+3}$ **23.** $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{2k^2+3k+4}{2k^3}$ **24.** $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^8}{3^k+5^k}$

25. $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{k}{k+1} \sin(\frac{1}{k})$ **26.** $\sum_{k=1}^{\infty} \log(1+A^k), A > 0$ **27.** $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+(-1)^k}$ **28.** $\sum_{k=1}^{\infty} \log\left(1 + \frac{(-1)^{k+1}}{k}\right)$

29. $\sum_{k=1}^{\infty} \left(1 - \cos\frac{1}{k}\right)$ **30.** $\sum_{k=1}^{\infty} k^x e^{\sqrt{k^2+11} - \sqrt{k^2+8}}$ **31.** $\sum_{k=2}^{\infty} (-1)^k \frac{\sqrt[k]{k}}{\log k}$