I. DIFERENČNÍ ROVNICE - S NULOVU PRAVOU STRANOU

Najděte všechna řešení diferenčních rovnic (s počátečními podmínkami)

1. $y(n+2) - y(n+1) - 6y(n) = 0,\ y(1) = -3, y(2) = -1$ **2.** $y(n+3) - 3y(n+2) + 3y(n+1) - y(n) = 0$
3. $y(n+2) + y(n) = 0$ **4.** $y(n+4) + 2y(n+2) + y(n) = 0$ **5.** $y(n+2) + 2y(n+1) + 5y(n) = 0,\ y(1) = 0$

II. DIFERENČNÍ ROVNICE - S NENULOVU PRAVOU STRANOU

Najděte všechna řešení diferenčních rovnic (s počátečními podmínkami)

1. $y(n+2) - 7y(n+1) + 6y(n) = n,\ y(1) = \frac{48}{50}, y(2) = \frac{52}{50}$ **2.** $y(n+2) + y(n) = \sin(\frac{n\pi}{2}) + \cos(\frac{n\pi}{2})$
3. $y(n+2) + 4y(n) = (\sqrt{2})^n$ **4.** $y(n+3) - 3y(n+2) - 3y(n+1) + y(n) = n^2 + 2^n$
5. $y(n+2) - 3y(n+1) - 4y(n) = 12n^2 - 2n + 15$ **6.** $y(n+2) - y(n) = -n^2 + 2n + 15$
7. $y(n+1) - y(n) = 3^n \sin(\frac{n\pi}{2})$ **8.** $y(n+3) - y(n+2) - 2y(n+1) + 2y(n) = n + 2^n$
9. $8y(n+3) + y(n) = 3n + \frac{1}{2^n}$ **10.** $y(n+2) - 3y(n+1) + 2y(n) = n^2, y(1) = 3, y(2) = 2$
11. $y(n+2) - y(n) = 17, y(1) = y(2) = 0$

Naivní bonusová slovní úloha: Předpokládejme, že vložíme 2000 Kč na začátku každého roku do banky, která má roční úrokovou sazbu 8% *(což je vskutku naivní)*. Kolik budeme mít v bance na konci n-tého roku? *v úloze neuvažujeme DPH*

III. DIFERENCIÁLNÍ ROVNICE,KTERÉ LZE PŘEVÉST NA ROVNICE SE SEPAROVANÝMI PROMĚNNÝMI

(P1) Rovnice „typu $y' = f(ax + by + c), a, b, c \in \mathbb{R}$" (předpokládáme, že $ab \neq 0$, protože jinak se už jedná o rovnici se separovannými proměnnými). Pak použijeme substituci $z = ax + by + c$ a dostaneme rovnici se separovannými proměnnými.

(P2) Rovnice s „homogenní pravou stranou", tj. rovnice $y' = f(x, y)$ a pro funkci f platí $f(tx, ty) = f(x, y)$ $(t \in \mathbb{R})$. Pak použijeme substituci $y = xz$ a dostaneme rovnici se separovannými proměnnými.

(P3) Rovnice „typu $f(\frac{a_1x+b_1y+c_1}{a_2x+b_2y+c_2}), a_k, b_k, c_k \in \mathbb{R}\ k = 1, 2$" (předpokládáme, že $(a_1, b_1, c_1) \neq t(a_2, b_2, c_2), t \in \mathbb{R}$, protože jinak se jedná o již řešený případ $(P2)$). Pokud $a_1b_2 - a_2b_1 = 0$, substituce $z = a_2x + b_2y$ převede úlohu na případ $(P2)$. Je–li $a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0$, nalezneme bod $[a, b]$, který je řešením soustavy rovnic

$$a_1x + b_1y + c_1 = 0,$$

$$a_2x + b_2y + c_2 = 0,$$

a zavedeme nové proměnné pomocí rovností $x = t + a$, $y = z + b$. V nových proměnných je již rovnice typu $(P2)$.

VIII. HOMOGENNÍ LINEÁRNÍ ROVNICE S KONSTANTNÍMI KOEFICIENTY

Najděte fundamentélní systém řešení následujících rovnic:

1. $y'' - 3y' + 2y = 0$ **2.** $y'' + 2y' + y = 0$ **3.** $y'' + 4y = 0$ **4.** $y'' - 2y' + 5y = 0$ **5.** $y''' + y'' + y' + y = 0$
6. $y''' + 3y'' + 3y' + y = 0$ **7.** $y''' - y'' + 2y = 0$ **8.** $y^{(4)} - 2y'' + y = 0$

XI. SOUSTAVY LDR

Řešte soustavy $y' = Ay$ s počáteční podmínkou, kde:

1. $A = \begin{pmatrix} 5 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 7 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \quad y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ **3.** $A = \begin{pmatrix} 7 & -10 & -4 \\ 4 & -7 & -4 \\ -6 & 7 & 1 \end{pmatrix}, \quad y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

2. $A = \begin{pmatrix} 1 & -6 & 3 \\ 0 & -8 & 6 \\ 3 & -12 & 7 \end{pmatrix}, \quad y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ **4.** $A = \begin{pmatrix} 6 & -7 & 4 \\ 1 & 0 & 1 \\ -2 & 3 & 0 \end{pmatrix}, \quad y(0) = \begin{pmatrix} 8 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$

Řešte soustavy $y' = Ay + b(x)$ s počáteční podmínkou, kde:

5. $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad b(x) = \begin{pmatrix} x \\ -3x^2 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad y(0) = \begin{pmatrix} \frac{137}{2} \\ 30 \\ \frac{97}{4} \end{pmatrix}$

6. $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 4 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad b(x) = \begin{pmatrix} e^{2x} \\ -4e^{-x} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad y(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$