I. Banachovy algebry

1. Základní vlastnosti

Definice 1. Řekneme, že $(A, +, -, 0, \cdot_{\mathrm{s}}, \cdot)$ je *algebra* nad $\mathbb{K}$, pokud $(A, +, -, 0, \cdot_{\mathrm{s}})$ je vektorový prostor nad $\mathbb{K}$, $(A, +, -, \cdot, 0)$ je okruh (tj. násobení $\cdot$ je asociativní a distributivní vzhledem ke sčítání zleva i zprava), a navíc platí, že $(\alpha \cdot_{\mathrm{s}} a) \cdot b = a \cdot (\alpha \cdot_{\mathrm{s}} b) = \alpha \cdot_{\mathrm{s}} (a \cdot b)$ pro všechna $a, b \in A$ a $\alpha \in \mathbb{K}$. Algebra nad $\mathbb{K}$ se nazývá *komutativní*, pokud je její okruhové násobení $\cdot$ komutativní.

Nechť A, B jsou algebry nad $\mathbb{K}$. (Algebrový) homomorfismus $\Phi\colon A \to B$ je zobrazení, které je homomorfismem mezi příslušnými vektorovými prostory (tj. je lineární) a zároveň je homomorfismem mezi příslušnými okruhy (tj. je multiplikativní, neboli $\Phi(ab) = \Phi(a)\Phi(b)$).

Φ nazýváme (algebraickým) izomorfismem algeber A a B, pokud Φ je bijekce.

Tvrzení 2. *Nechť A je algebra nad $\mathbb{K}$. Položme $A_{\mathrm{e}} = A \times \mathbb{K}$ a definujme vektorové operace na A_{e} obvyklým způsobem (tj. po složkách) a dále násobení prvků A_{e} pomocí vzorce*

$$(a, \alpha)(b, \beta) = (ab + \alpha b + \beta a, \alpha\beta) \quad \text{pro } a, b \in A,\ \alpha, \beta \in \mathbb{K}.$$

Pak A_{e} je algebra s jednotkou $(0, 1)$ a A lze identifikovat s její podalgebrou $A \times \{0\}$. Je-li A komutativní, je A_{e} též komutativní.

Definice 3. Dvojici $(A, \|\cdot\|)$ nazýváme *normovaná algebra*, pokud A je algebra, $(A, \|\cdot\|)$ je normovaný lineární prostor, a pro každé $a, b \in A$ platí, že $\|ab\| \leqslant \|a\|\|b\|$. Je-li metrika generovaná $\|\cdot\|$ úplná, pak $(A, \|\cdot\|)$ se nazývá *Banachovou algebrou*.

Příklad 4. Příklady Banachových algeber:

- komutativní s jednotkou: $\ell_\infty(I)$, $C_b(T)$, $C(K)$, $(\ell_1(\mathbb{Z}), *)$;
- komutativní bez jednotky: $C_0(T)$, $(L_1(\mathbb{R}^d), *)$;
- nekomutativní s jednotkou: $\mathcal{L}(X)$ (speciálně M_n, $n \geqslant 2$);
- nekomutativní bez jednotky: $\mathcal{K}(X)$.

Tvrzení 5. *Nechť $(A, \|\cdot\|)$ je normovaná algebra. Násobení prvků A je lipschitzovské na omezených množinách (a tedy spojité) jakožto zobrazení z $A \times A$ do A.*

Tvrzení 6. *Nechť $(A, \|\cdot\|)$ je Banachova algebra. Definujeme-li na A_{e} normu předpisem $\|(a, \alpha)\|_{A_{\mathrm{e}}} = \|a\| + |\alpha|$ (tj. $A_{\mathrm{e}} = A \oplus_1 \mathbb{K}$), pak A_{e} s touto normou je Banachova algebra.*

Definice 7. Nechť A a B jsou normované algebry a $\Phi\colon A \to B$ je (algebrový) homomorfismus. Říkáme, že Φ je izomorfismus normovaných algeber A a B (nebo jen *izomorfismus*), pokud Φ je homeomorfismus A na B; říkáme, že Φ je izomorfismus A do B (nebo jen *izomorfismus do*), pokud Φ je izomorfismus A na $\operatorname{Rng}\Phi$.

Věta 8. *Nechť A je Banachova algebra. Pro každé $a \in A$ definujme levou translaci $L_a\colon A \to A$ předpisem $L_a(x) = ax$. Pak $L_a \in \mathcal{L}(A)$ a zobrazení $I\colon A \to \mathcal{L}(A)$, $I(a) = L_a$ je spojitý algebrový homomorfismus s $\|I\| \leqslant 1$. Má-li A jednotku e, pak I je izomorfismus do a $I(e) = Id$. Platí-li $\|x^2\| = \|x\|^2$ pro každé $x \in A$ (např. je-li A podalgebra $\ell_\infty(\Gamma)$), pak I je izometrie do.*

Důsledek 9. *Nechť $(A, \|\cdot\|)$ je netriviální Banachova algebra s jednotkou. Pak na A existuje ekvivalentní norma $|||\cdot|||$ taková, že $(A, |||\cdot|||)$ je Banachova algebra a $|||e||| = 1$.*

Připomeňme, že v monoidu jsou inverzní prvky k invertibilním prvkům jednoznačně určeny a invertibilní prvky tvoří grupu, tj. jsou-li $x, y \in A$ invertibilní, pak i xy je invertibilní a $(xy)^{-1} = y^{-1}x^{-1}$. Tuto grupu invertibilních prvků budeme značit $A^\times$.

Fakt 10. *Nechť $(A, \cdot, e)$ je monoid a $x_1, \dots, x_n \in A$ komutují. Pak $x_1 \cdots x_n \in A^\times$, právě když $\{x_1, \dots, x_n\} \subset A^\times$.*

Lemma 11 (Neumannova řada)**.** *Nechť A je Banachova algebra s jednotkou.*

(a) Pokud $x \in U_A$, pak $e - x \in A^\times$ a navíc $\sum_{n=0}^{\infty} x^n = (e - x)^{-1}$.

(b) Nechť $x \in A^\times$ a nechť $h \in A$ je takové, že $\|h\| < \frac{1}{\|x^{-1}\|}$. Pak $x + h \in A^\times$ a navíc $\left\|(x + h)^{-1} - x^{-1}\right\| \leqslant \frac{\|x^{-1}\|^2\|h\|}{1 - \|x^{-1}\|\|h\|}$.

Věta 12. *Nechť A je Banachova algebra s jednotkou. Pak $A^\times$ je otevřená podmnožina A a je to topologická grupa.*

2. Spektrální teorie

Definice 13. Nechť A je Banachova algebra s jednotkou a $x \in A$. Pro $x \in A$ definujeme *rezolventní množinu* prvku x jako

$$(\rho_A(x) =) \quad \rho(x) = \{\lambda \in \mathbb{K};\ \lambda e - x \in A^\times\},$$

a *spektrum* prvku x jako

$$(\sigma_A(x) =) \quad \sigma(x) = \mathbb{K} \backslash \rho(x).$$

Na $\rho(x)$ definujeme *rezolventu* (též *rezolventní zobrazení*) prvku x předpisem

$$R_x(\lambda) = (\lambda e - x)^{-1}, \quad \lambda \in \rho(x).$$

Nemá-li A jednotku, pak pro $x \in A$ definujeme výše uvedené pojmy vzhledem k Banachově algebře A_e.

Tvrzení 14. *Nechť A je Banachova algebra.*

(a) Pro každé $x \in A$ je $0 \in \sigma_{A_\mathrm{e}}\big((x, 0)\big)$. Nemá-li tedy A jednotku, pak $0 \in \sigma(x)$ pro každé $x \in A$.

(b) Má-li A jednotku, pak $\sigma_{A_\mathrm{e}}\big((x, 0)\big) = \sigma_A(x) \cup \{0\}$ pro každé $x \in A$.

Konec přednášek z 1. týdne

Věta 15. *Nechť A je netriviální komplexní Banachova algebra a $x \in A$. Pak $\sigma(x) \subset B_\mathbb{C}(0, \|x\|)$ je neprázdná kompaktní množina.*

Definice 16. Nechť Y je Banachův prostor nad $\mathbb{K}$, $\Omega \subset \mathbb{K}$, $f\colon \Omega \to Y$ a $a \in \Omega$. Jestliže existuje limita $\lim\limits_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \in Y$, pak tuto limitu nazýváme *derivací* zobrazení f v bodě a a značíme ji $f'(a)$.

Fakt 17. *Nechť Y je Banachův prostor nad $\mathbb{K}$, $\Omega \subset \mathbb{K}$, $f\colon \Omega \to Y$ a $a \in \Omega$. Pokud existuje $f'(a)$, pak f je spojité v a a pro každé $x^* \in Y^*$ je $(x^* \circ f)'(a) = x^*(f'(a))$.*

Tvrzení 18. *Nechť A je Banachova algebra s jednotkou a $x \in A$.*

(a) $\rho(x)$ je otevřená,

(b) Pro $|\lambda| > \|x\|$ platí $\lambda \in \rho(x)$ a $R_x(\lambda) = \sum_{n=0}^\infty \frac{x^n}{\lambda^{n+1}}$,

(c) Rezolventní zobrazení $\lambda \mapsto R_x(\lambda)$ má derivaci v každém bodě množiny $\rho(x)$.

(d) Pro každá $\mu, \nu \in \rho(x)$ platí $R_x(\mu)R_x(\nu) = R_x(\nu)R_x(\mu)$.

(e) Pro každá $\mu, \nu \in \rho(x)$ platí $R_x(\mu) - R_x(\nu) = (\nu - \mu)R_x(\mu)R_x(\nu)$ (tzv. rezolventní identita).

Fakt. *Nechť G je grupa. Jsou-li $u, v \in G$ takové, že $uv = vu$, pak i $u^{-1}v^{-1} = v^{-1}u^{-1}$, $uv^{-1} = v^{-1}u$ a $u^{-1}v = vu^{-1}$.*

Věta 19 (Liouvilleova věta)**.** *Nechť Y je komplexní Banachův prostor a $f\colon \mathbb{C} \to Y$ je omezená funkce, která má derivaci v každém bodě. Pak f je konstantní.*

Úmluva 20. Ve zbytku této kapitoly (I. Banachovy algebry) budeme všechny Banachovy prostory uvažovat nad tělesem komplexních čísel (pokud nebude explicitně řečen opak).

Věta 21 (S. Mazur (1938), I. M. Gelfand (1941))**.** *Nechť A je netriviální Banachova algebra s jednotkou. Pokud $A^\times = A \backslash \{0\}$, pak A je izomorfní $\mathbb{C}$. Pokud navíc $\|e\| = 1$, pak A je izometricky izomorfní $\mathbb{C}$.*

Definice 22. Nechť A je Banachova algebra. Pro $x \in A$ definujeme *spektrální poloměr* prvku x jako

$$r(x) = \sup\{|\lambda|;\ \lambda \in \sigma(x)\}.$$

Věta 23 (Beurlingův-Gelfandův vzorec)**.** *Nechť A je Banachova algebra a $x \in A$. Pak*

$$r(x) = \inf_{n \in \mathbb{N}} \sqrt[n]{\|x^n\|} = \lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{\|x^n\|}.$$

Lemma 24 (spektrum a polynom)**.** *Nechť A je Banachova algebra s jednotkou a $x \in A$. Je-li $p(z) = \sum_{j=1}^n \alpha_j z^j$ polynom s komplexními koeficienty, definujeme $p(x) = \sum_{j=1}^n \alpha_j x^j$. Pak platí $\sigma(p(x)) = p(\sigma(x))$.*

Důsledek 25. *Je-li A Banachova algebra, $x \in A$ a $\lambda \in \mathbb{C}$, $|\lambda| > r(x)$, pak řada $\sum_{n=1}^\infty \frac{x^n}{\lambda^n}$ konverguje absolutně. Má-li tedy A jednotku, pak $R_x(\lambda) = \sum_{n=0}^\infty \frac{x^n}{\lambda^{n+1}}$.*

Věta 26. *Nechť A je Banachova algebra s jednotkou, B je její uzavřená podalgebra obsahující e a $x \in B$. Pak platí následující tvrzení:*

(a) Je-li C komponenta $\rho_A(x)$, pak buď $C \subset \sigma_B(x)$, nebo $C \cap \sigma_B(x) = \emptyset$.

(b) $\partial\sigma_B(x) \subset \sigma_A(x) \subset \sigma_B(x)$.

(c) Je-li $\mathbb{C}\backslash\sigma_A(x)$ souvislá, pak $\sigma_B(x) = \sigma_A(x)$.

(d) Má-li $\sigma_B(x)$ prázdný vnitřek, pak $\sigma_B(x) = \sigma_A(x)$.

Důsledek 27. *Nechť A je Banachova algebra, B je její uzavřená podalgebra a $x \in B$. Pak platí (a)-(d) ve Větě 26, pokud v nich všude nahradíme $\sigma_A(x)$ a $\sigma_B(x)$ za $\sigma_A(x) \cup \{0\}$ a $\sigma_B(x) \cup \{0\}$.*

Poznámka: důkaz Důsledku 27 byl vynechán
Konec přednášek 2. týdne

3. Holomorfní kalkulus

Nechť X je Banachův prostor, $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{C}$ cesta a $f\colon \langle\gamma\rangle \to X$ spojité zobrazení. Integrál f podél γ definujeme předpisem

$$\int_\gamma f = \int_{[a,b]} \gamma'(t) f(\gamma(t))\,\mathrm{d}\lambda(t).$$

Integrál podél řetězce $\Gamma = \gamma_1 \dotplus \cdots \dotplus \gamma_n$ v $\mathbb{C}$ ze spojitého zobrazení $f\colon \langle\Gamma\rangle \to X$ definujeme předpisem

$$\int_\Gamma f = \int_{\gamma_1} f + \cdots + \int_{\gamma_n} f.$$

Lemma 28. *Nechť Γ je řetězec v $\mathbb{C}$, X je Banachův prostor, $f\colon \langle\Gamma\rangle \to X$ je spojité a $x \in X$. Pak $x = \int_\Gamma f$, právě když pro každé $x^* \in X^*$ platí $x^*(x) = \int_\Gamma x^* \circ f$.*

Je-li $\Omega \subset \mathbb{C}$ otevřená a $K \subset \Omega$ kompaktní, pak řekneme, že cykl Γ obíhá K v Ω, pokud $\langle\Gamma\rangle \subset \Omega\backslash K$, $\operatorname{ind}_\Gamma z = 1$ pro $z \in K$ a $\operatorname{ind}_\Gamma z = 0$ pro $z \in \mathbb{C}\backslash\Omega$.

Definice 29. Nechť A je Banachova algebra s jednotkou a $x \in A$. Je-li $f \in H(\Omega)$, kde $\Omega \subset \mathbb{C}$ je otevřené okolí $\sigma(x)$, pak definujeme

$$f(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma f R_x = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma f(\alpha)(\alpha e - x)^{-1}\,\mathrm{d}\alpha,$$

kde Γ je libovolný cykl obíhající $\sigma(x)$ v Ω.

Poznámka 30. Integrál v definici $f(x)$ výše existuje a jeho hodnota nezávisí na volbě Γ.

Věta 31 (holomorfní kalkulus)**.** *Nechť A je Banachova algebra s jednotkou, $x \in A$, $\Omega \subset \mathbb{C}$ je otevřené okolí $\sigma(x)$ a $f \in H(\Omega)$. Zobrazení $\Phi\colon H(\Omega) \to A$, kde $\Phi(g) = g(x)$ z Definice 29, má následující vlastnosti:*

(a) Φ je algebrový homomorfismus, pro který navíc $\Phi(1) = e$ a $\Phi(Id) = x$.

(b) Pokud $f_n \to f$ lokálně stejnoměrně v $H(\Omega)$, pak $f_n(x) \to f(x)$.

(c) $f(x) \in A^\times$, právě když $f(\lambda) \neq 0$ pro každé $\lambda \in \sigma(x)$. V tom případě je $f(x)^{-1} = \frac{1}{f}(x)$.

(d) $\sigma(f(x)) = f(\sigma(x))$ (tzv. věta o obrazu spektra).

(e) Pokud $g \in H(\Omega_1)$, kde Ω_1 je otevřené okolí $f(\sigma(x))$, pak $(g \circ f)(x) = g(f(x))$.

(f) Pokud $y \in A$ komutuje s x, pak y komutuje i s $f(x)$.

Navíc pokud zobrazení $\Psi\colon H(\Omega) \to A$ splňuje (a) a (b), pak $\Psi = \Phi$.

Poznámka: důkaz vlastností (d)-(f) byl na přednášce vynechán.

Lemma 32. *Nechť (Ω, μ) je prostor s úplnou mírou, A je Banachova algebra a $f \in L_1(\mu, A)$. Pak pro každé $x \in A$ a každou měřitelnou $E \subset \Omega$ platí, že*

$$x\left(\int_E f d\mu\right) = \int_E x f(t)\,\mathrm{d}\mu(t) \quad a \quad \left(\int_E f\,\mathrm{d}\mu\right)x = \int_E f(t) x\,\mathrm{d}\mu(t).$$

Poznámka: důkaz byl na přednášce vynechán.
Konec přednášek 3. týdne

4. Multiplikativní lineární funkcionály

Definice 33. Nechť A je Banachova algebra. Homomorfismus $\varphi\colon A \to \mathbb{C}$ nazýváme *multiplikativním lineárním funkcionálem* (tedy φ je lineární a $\varphi(xy) = \varphi(x)\varphi(y)$ pro všechna $x, y \in A$). Množinu všech nenulových multiplikativních lineárních funkcionálů na A značíme $\Delta(A)$.

Tvrzení 34. *Nechť A je Banachova algebra a φ multiplikativních lineární funkcionál.*

(a) Existuje jednoznačné rozšíření $\widetilde{\varphi} \in \Delta(A_{\mathrm{e}})$ dané vzorcem $\widetilde{\varphi}(x, \lambda) = \varphi(x) + \lambda$ a $\Delta(A_{\mathrm{e}}) = \{\widetilde{\varphi};\ \varphi \in \Delta(A) \cup \{0\}\}$.

(b) Pro každé $x \in A$ je $\varphi(x) \in \sigma(x)$ kdykoliv $\varphi \neq 0$.

(c) $\Delta(A) \subset B_{A^*}$ (speciálně, každý multiplikativní lineární funkcionál na A je automaticky spojitý).

(d) Pokud A má jednotku a $\varphi \neq 0$, pak $\|\varphi\| \geqslant \frac{1}{\|e\|}$ pro každé $\varphi \in \Delta(A)$. Speciálně, je-li $\|e\| = 1$, pak $\Delta(A) \subset S_{A^*}$.

Věta 35. *Nechť A je Banachova algebra a $M = \Delta(A) \cup \{0\} \subset (B_{A^*}, w^*)$ je množina všech lineárních multiplikativních funkcionálů na A. Pak M je kompaktní, $\Delta(A)$ je lokálně kompaktní a má-li A jednotku, pak $\Delta(A)$ je kompaktní.*

Zobrazení $\Phi\colon M \to \Delta(A_{\mathrm{e}})$, kde $\Phi(\varphi) = \widetilde{\varphi}$ je jednoznačné rozšíření φ na prvek $\Delta(A_{\mathrm{e}})$, je homeomorfismus.

Příklad 36. (a) Pro K kompaktní máme $\Delta(C(K)) = \{\delta_x\colon x \in K\}$.

(b) Pro $n \geqslant 2$ máme $\Delta(M_n) = \varnothing$.

Definice 37. Nechť A je Banachova algebra. *Ideálem* v A rozumíme vektorový podprostor $I \subset A$ takový, že kdykoliv $x \in I$ a $y \in A$, pak $xy \in I$ a $yx \in I$. *Maximálním ideálem* v A nazveme takový vlastní ideál v A, který je maximální vzhledem k uspořádání všech vlastních ideálů v A inkluzí.

Tvrzení 38. *Nechť A je Banachova algebra s jednotkou.*

(a) Každý vlastní ideál v A je obsažen v nějakém maximálním ideálu v A.

(b) Je-li I vlastní ideál v A, je i $\overline{I}$ vlastní ideál. Speciálně, každý maximální ideál v A je uzavřený.

Tvrzení 39. *Nechť A je Banachova algebra a $I \subset A$ uzavřený ideál. Pak kvocient A/I je Banachova algebra se součinem $q(x)q(y) = q(xy)$, kde $q : A \to A/I$ je kvocientové zobrazení.*

Je-li A komutativní, je i A/I komutativní. Má-li A jednotku, má i A/I jednotku.

Věta 40. *Nechť A je komutativní Banachova algebra s jednotkou. Pak zobrazení $\Phi\colon \varphi \mapsto \operatorname{Ker}\varphi$ je bijekce mezi $\Delta(A)$ a množinou všech maximálních ideálů v A.*

Lemma 41. *Nechť A je komutativní Banachova algebra s jednotkou a $x \in A$ není invertibilní. Pak xA je vlastní ideál.*

Důsledek 42. *Nechť A je komutativní Banachova algebra s jednotkou a I je vlastní ideál v A. Pak existuje $\varphi \in \Delta(A)$ takový, že $\varphi\restriction_I = 0$.*

Tvrzení 43. *Nechť A, B jsou Banachovy algebry a $\Phi\colon A \to B$ je algebraický izomorfismus. Pak zobrazení $\Phi^{\#} : \Delta(B) \to \Delta(A)$ definované předpisem $\Phi^{\#}(\varphi) := \varphi \circ \Phi$, $\varphi \in \Delta(B)$ je homeomorfismus.*

Tvrzení 44. *Nechť L je lokálně kompaktní Hausdorffův topologický prostor. Pak zobrazení $\delta : L \to \Delta(C_0(L))$ definované předpisem $\delta(x) = \delta_x$, $x \in L$ je homeomorfismus.*

Věta 45. *Nechť K, L jsou lokálně kompaktní Hausdorffovy topologické prostory. Pak následující tvrzení jsou ekvivalentní:*

(i) Banachovy algebry $C_0(K)$ a $C_0(L)$ jsou izometricky izomorfní.

(ii) Algebry $C_0(K)$ a $C_0(L)$ jsou algebraicky izomorfní.

(iii) Prostory K a L jsou homeomorfní.

Konec přednášek 4. týdne

Definice 46. Komutativní Banachova algebra A se nazývá *polojednoduchá*, pokud $\Delta(A)$ odděluje body A, tj. pokud $\bigcap\{\operatorname{Ker}\varphi;\ \varphi \in \Delta(A)\} = \{0\}$.

Věta 47. *Nechť A, B jsou Banachovy algebry. Pokud B je komutativní a polojednoduchá, pak každý homomorfismus z A do B je automaticky spojitý.*

Důsledek 48. *Nechť A je komutativní a polojednoduchá algebra. Pak všechny normy na A, ve kterých je A Banachova algebra, jsou ekvivalentní.*

5. Gelfandova transformace

Definice 49. Nechť A je Banachova algebra. Pro $x \in A$ definujeme $\widehat{x}\colon \Delta(A) \to \mathbb{C}$ předpisem $\widehat{x}(\varphi) = \varphi(x)$, tj. $\widehat{x} = \varepsilon_x\restriction_{\Delta(A)}$. Funkci $\widehat{x}$ říkáme *Gelfandova transformace* prvku x.

Věta 50. *Nechť A je komutativní Banachova algebra a $x \in A$.*

(a) Má-li A jednotku, pak $\sigma(x) = \operatorname{Rng}\widehat{x}$.

(b) Nemá-li A jednotku, pak $\sigma(x) = \operatorname{Rng}\widehat{x} \cup \{0\}$.

(c) $\|\widehat{x}\| = r(x)$.

Definice 51. Nechť A je Banachova algebra. Zobrazení $\Gamma\colon A \to C_0(\Delta(A))$, $\Gamma(x) = \widehat{x}$ nazýváme *Gelfandovou transformací* algebry A.

Věta 52. *Nechť A je komutativní Banachova algebra a Γ je její Gelfandova transformace. Pak platí následující tvrzení:*

(a) Γ je spojitý homomorfismus a $\|\Gamma\| \leqslant 1$.

(b) Podalgebra $\Gamma(A) \subset C_0(\Delta(A))$ odděluje body $\Delta(A)$.

(c) Γ je prostá, právě když $\Delta(A)$ odděluje body A, tj. právě tehdy, pokud A je polojednoduchá.

(d) Γ je izomorfismus do, právě když Γ je prostá a $\Gamma(A) \subset C_0(\Delta(A))$ je uzavřený, právě když existuje $K > 0$ takové, že $\|x^2\| \geqslant K\|x\|^2$ pro každé $x \in A$.

(e) Γ je izometrie do právě tehdy, když $\|x^2\| = \|x\|^2$ pro každé $x \in A$.

II. C*-algebry

1. Základní vlastnosti

Ve této kapitole budeme všechny Banachovy prostory uvažovat nad tělesem komplexních čísel (pokud nebude explicitně řečen opak).

Definice 53. Nechť A je Banachova algebra.

- Zobrazení $^\star\colon A \to A$ se nazývá *involuce*, pokud pro každé $x, y \in A$ a $\lambda \in \mathbb{C}$ platí:

$$(x+y)^\star = x^\star + y^\star, \qquad (\lambda x)^\star = \overline{\lambda} x^\star, \qquad (xy)^\star = y^\star x^\star, \qquad (x^\star)^\star = x.$$

- Banachova algebra A s involucí se nazývá *C*-algebra*, pokud pro každé $x \in A$ je

$$\|x^\star x\| = \|x\|^2.$$

- Je–li A Banachova algebra s involucí, pak prvek $x \in A$ se nazývá *samoadjungovaný* (resp. *normální*), pokud $x^\star = x$ (resp. $x^\star x = x x^\star$).

Tvrzení 54. *Nechť A je algebra s involucí a $x \in A$. Pak platí následující tvrzení:*

(a) Je-li e levá nebo pravá jednotka v A, pak e je jednotka a $e^\star = e$.

(b) A je C*-algebra, právě když pro každé $x \in A$ platí $\|x^\star x\| \geqslant \|x\|^2$. V tomto případě pak $\|x\| = \|x^*\|$ pro každé $x \in A$.

(c) Nechť A má jednotku. Pak $x \in A^\times$ právě tehdy, když $x^\star \in A^\times$. V tomto případě pak $(x^\star)^{-1} = (x^{-1})^\star$.

(d) $\lambda \in \sigma(x)$ právě tehdy, když $\overline{\lambda} \in \sigma(x^\star)$.

(e) Prvky $x + x^\star$, $x^\star x$, $x x^\star$ a $i(x - x^\star)$ jsou samoadjungované.

(f) Existují jednoznačně určené samoadjungované prvky $u, v \in A$ takové, že $x = u + iv$. Pro ně pak platí, že $x^\star = u - iv$ a že x je normální, právě když $uv = vu$.

Poznámka: důkaz bodu (d) byl proveden jen pro případ, kdy A má jednotku

Věta 55. *Nechť A je C*-algebra a $x \in A$ je normální. Pak $r(x) = \|x\|$.*

Důsledek 56. *Nechť A je algebra s involucí. Pak na A existuje nejvýše jedna norma, se kterou A je C*-algebra.*

Tvrzení 57. *Nechť A je Banachova algebra s involucí.*

(a) A_{e} je Banachova algebra s involucí $(a,\alpha)^\star = (a^\star, \overline{\alpha})$ pro $(a,\alpha) \in A_{\mathrm{e}}$.

(b) Je–li A C*-algebra, pak existuje norma $|||\cdot|||$ na A_{e} rozšiřující původní normu na A (a ekvivalentní normě z Tvrzení 6) taková, že A_{e} je C*-algebra.

Poznámka: důkaz Tvrzení 57 byl na přednášce vynechán

Tvrzení 58. *Nechť A je C*-algebra a $x \in A$.*

(a) Je–li x samoadjungovaný, pak $\sigma(x) \subset \mathbb{R}$.

(b) Pokud A má jednotku a x je unitární (tj. $x^* = x^{-1}$), pak $\sigma(x) \subset \{\lambda \in \mathbb{C} \colon |\lambda| = 1\}$.

Konec přednášek z 5. týdne

Definice 59. Nechť A a B jsou algebry s involucí. Pak algebrový homomorfismus $\Phi \colon A \to B$ nazýváme **-homomorfismus*, pokud zachovává operaci *, tj. $\Phi(x^\star) = \Phi(x)^\star$ pro každé $x \in A$.

Důsledek 60. *Nechť A je C*-algebra. Pak každý multiplikativní lineární funkcionál na A je *-homomorfismus.*

Tvrzení 61. *Nechť A, B jsou C*-algebry a $\Phi \colon A \to B$ je *-homomorfismus. Pak Φ je automaticky spojitý a navíc $\|\Phi\| \leqslant 1$.*

Lemma 62. *Nechť A, B jsou Banachovy algebry a $\Phi \colon A \to B$ je algebrový homomorfismus. Pak pro každé $x \in A$ platí $\sigma_B(\Phi(x)) \subset \sigma_A(x) \cup \{0\}$.*

Věta 63 (I. M. Gelfand a M. A. Najmark (1943))**.** *Nechť A je komutativní C*-algebra. Pak Gelfandova transformace je izometrický *-izomorfismus A na $C_0(\Delta(A))$.*

Důsledek 64. *Nechť A a B jsou komutativní C*-algebry. Pak následující tvrzení jsou ekvivalentní:*

(i) A a B jsou izometricky *-izomorfní.

(ii) A a B jsou algebraicky izomorfní.

(iii) Prostory $\Delta(A)$ a $\Delta(B)$ jsou homeomorfní.

Definice 65. Nechť A je Banachova algebra a $M \subset A$. *Algebrovým obalem M* nazveme množinu

$$\operatorname{alg} M = \bigcap \{B \supset M;\ B \text{ je podalgebra } A\}.$$

Uzavřeným algebrovým obalem M nazveme množinu

$$\overline{\operatorname{alg}}\, M = \bigcap \{B \supset M;\ B \text{ je uzavřená podalgebra } A\}.$$

Fakt 66. *Nechť A je C*-algebra a nechť $M \subset A$ komutuje a je uzavřená na involuci. Pak $\overline{\operatorname{alg}}\, M$ je komutativní C*-podalgebra A.*

Věta 67. *Nechť A a B jsou C*-algebry a $h : A \to B$ je prostý *-homomorfismus. Pak h je izometrie do.*

Lemma 68. *Nechť K, L jsou Hausdorffovy kompaktní prostory a $\varphi : C(K) \to C(L)$ je $*$-homomorfismus splňující $\varphi(1) = 1$. Pak existuje spojité zobrazení $\alpha : L \to K$ takové, že $\varphi(f) = f \circ \alpha$ pro každou $f \in C(K)$. Pokud je navíc φ prosté, pak $\alpha(L) = K$ a tedy φ je izometrie do.*

7. Spojitý kalkulus pro normální prvky C*-algeber

Lemma 69. *Nechť A je C*-algebra a B je její C*-podalgebra. Pokud A a B mají společnou jednotku, pak $B^\times = A^\times \cap B$. Dále nechť $x \in B$. Pokud B má jednotku, která není jednotkou v A, pak $\sigma_A(x) = \sigma_B(x) \cup \{0\}$, v ostatních případech je $\sigma_A(x) = \sigma_B(x)$.*

Nechť A je C*-algebra s jednotkou a $x \in A$ je normální. Položme $B = \overline{\operatorname{alg}}\{e, x, x^\star\}$. Pak pro $f \in C(\sigma_A(x))$ můžeme definovat

$$f(x) = \Gamma_B^{-1}(f \circ \Gamma_B(x)). \tag{1}$$

Věta 70 (spojitý kalkulus)**.** *Nechť A je C*-algebra s jednotkou, $x \in A$ je normální a $f \in C(\sigma(x))$. Zobrazení $\Phi \colon C(\sigma(x)) \to A$, kde $\Phi(g) = g(x)$ je definováno vzorcem* (1)*, má následující vlastnosti:*

(a) Φ je izometrický *-izomorfismus $C(\sigma(x))$ na $B = \overline{\operatorname{alg}}\{e, x, x^\star\}$, pro který navíc $\Phi(1) = e$ a $\Phi(Id) = x$.

(b) Pokud $\Psi\colon C(\sigma(x)) \to A$ je *-homomorfismus, pro který $\Psi(1) = e$ a $\Psi(Id) = x$, pak $\Psi = \Phi$.

(c) Je-li $g \in H(\Omega)$, kde $\Omega \subset \mathbb{C}$ je otevřené okolí $\sigma(x)$, pak $\Phi(g\restriction_{\sigma(x)}) = \Psi(g)$, kde Ψ je holomorfní kalkulus z Věty 31.

(d) $f(x) \in A^\times$, právě když $f(\lambda) \neq 0$ pro každé $\lambda \in \sigma(x)$. V tom případě je $f(x)^{-1} = \frac{1}{f}(x)$.

(e) $\sigma(f(x)) = f(\sigma(x))$ (věta o obrazu spektra).

(f) Pokud $g \in C\big(f(\sigma(x))\big)$, pak $(g \circ f)(x) = g(f(x))$.

Poznámka: důkazy bodů (c) a (f) byly vynechány.

Konec přednášek z 6. týdne

(g) Pokud $y \in A$ komutuje s x, pak y komutuje i s $f(x)$.

Nemá-li A jednotku, provedeme celou konstrukci v A_{e}. Pokud pro $f \in C(\sigma(x))$ platí, že $f(0) = 0$, pak $f(x) \in A$.

Věta 71 (Bent Fuglede (1950), Calvin R. Putnam (1951))**.** *Nechť A je komplexní C*-algebra, $x \in A$, a nechť $a, b \in A$ jsou normální a platí, že $ax = xb$. Pak $a^\star x = xb^\star$.*

Poznámka: důkaz Věty 78 byl vynechán.

III. Operátory na Hilbertových prostorech

1. Základní vlastnosti

Ve této kapitole (III. Operátory na Hilbertových prostorech) budeme všechny Banachovy prostory uvažovat nad tělesem komplexních čísel (pokud nebude explicitně řečen opak).

Definice 72. Nechť X, Y jsou vektorové prostory nad $\mathbb{C}$. Zobrazení $S\colon X \times X \to Y$ se nazývá *seskvilineární*, pokud je lineární v první souřadnici a sdruženě lineární ve druhé souřadnici. V případě, že $Y = \mathbb{C}$, se S nazývá *seskvilineární forma*.

Tvrzení 73 (polarizační vzorec)**.** *Nechť X, Y jsou vektorové prostory nad $\mathbb{C}$ a $S\colon X \times X \to Y$ je seskvilineární zobrazení. Pak pro všechna $x, y \in X$ platí, že*

$$S(x,y) = \frac{1}{4}\big(S(x+y,x+y) - S(x-y,x-y) + iS(x+iy,x+iy) - iS(x-iy,x-iy)\big).$$

Důsledek 74. *Nechť H je netriviální Hilbertův prostor a $T, S \in \mathcal{L}(H)$. Pak $T = S$, právě když $\langle Tx, x\rangle = \langle Sx, x\rangle$ pro každé $x \in H$.*

Věta 75. *Nechť H je netriviální Hilbertův prostor a $T \in \mathcal{L}(H)$. Pak*

(a) T je samoadjungovaný, právě když $\langle Tx, x\rangle \in \mathbb{R}$ pro každé $x \in H$.

(b) T je normální, právě když $\|Tx\| = \|T^\star x\|$ pro každé $x \in H$.

(c) $\langle Tx, x\rangle \geqslant 0$ pro každé $x \in H$, právě když T je samoadjungovaný a $\sigma(T) \subset [0, \infty)$.

Definice 76. Nechť A je C*-algebra a $x \in A$. Řekneme, že x je *nezáporný* (značíme $x \geqslant 0$), pokud je samoadjungovaný a $\sigma(x) \subset [0, +\infty)$.

Věta 77. *Nechť H je Hilbertův prostor a $T \in \mathcal{L}(H)$ je normální. Pak platí následující tvrzení:*

(a) $\operatorname{Ker} T = \operatorname{Ker} T^\star$ a $\operatorname{Ker} T = (\operatorname{Rng} T)^\perp$.

(b) $\operatorname{Rng} T$ je hustý v H právě tehdy, když T je prostý.

(c) $\lambda \in \sigma_{\mathrm{p}}(T)$ právě tehdy, když $\overline{\lambda} \in \sigma_{\mathrm{p}}(T^\star)$. Vlastní prostor T příslušný vlastnímu číslu λ je shodný s vlastním prostorem $T^\star$ příslušným vlastnímu číslu $\overline{\lambda}$.

(d) Pokud λ_1, λ_2 jsou různá vlastní čísla T, pak $\operatorname{Ker}(\lambda_1 I - T) \perp \operatorname{Ker}(\lambda_2 I - T)$.

Věta 78 (Hilbert-Schmidt)**.** *Nechť H je Hilbertův prostor a $T \in \mathcal{K}(H)$ je nenulový normální. Pak existuje ortonormální báze B prostoru H tvořená vlastními vektory T. Vektorů z B příslušných nenulovým vlastním číslům T je spočetně mnoho, a seřadíme-li je libovolně do prosté posloupnosti $\{e_n\}_{n=1}^N$, $N \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, pak $\{e_n\}$ je ortonormální báze $\overline{\operatorname{Rng} T}$ a pro každé $x \in H$ je*

$$Tx = \sum_{n=1}^{N} \lambda_n \langle x, e_n\rangle e_n,$$

kde λ_n je vlastní číslo příslušné vlastnímu vektoru e_n.

Poznámka: důkaz Věty 78 byl vynechán (je stejný jako důkaz předvedený v kurzu "Úvod do funkcionální analýzy")

Věta 79 (Schmidt)**.** *Nechť H je Hilbertův prostor a $T \in \mathcal{L}(H)$ je nenulový kompaktní. Pak existuje $N \in \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$, posloupnost kladných čísel $\{\lambda_n\}_{n=1}^N$ a ortonormální systémy $\{u_n\}_{n=1}^N \subset H$ a $\{v_n\}_{n=1}^N \subset H$ takové, že pro každé $x \in H$ je*

$$Tx = \sum_{n=1}^{N} \lambda_n \langle x, u_n \rangle v_n.$$

Věta 80. *Nechť H je Hilbertův prostor a $P \in \mathcal{L}(H)$ je projekce. Pak následující tvrzení jsou ekvivalentní:*

(i) P je ortogonální, tj. $\operatorname{Rng} P \perp \operatorname{Ker} P$.

(ii) $P \geqslant 0$.

(iii) P je samoadjungovaná.

(iv) P je normální.

Navíc, jsou-li $P, Q \in \mathcal{L}(H)$ dvě ortogonální projekce, pak $\operatorname{Rng}(P) \perp \operatorname{Rng}(Q)$ *právě tehdy, když* $PQ = 0$.

Definice 81. Nechť H, K jsou Hilbertovy prostory. Operátor $T \in \mathcal{L}(H, K)$ se nazývá *unitární*, pokud $T^{-1} = T^\star$, tj. $T^\star \circ T = I_H$ a $T \circ T^\star = I_K$.

Tvrzení 82. *Nechť H, K jsou Hilbertovy prostory a $T \in \mathcal{L}(H, K)$. Uvažujme následující podmínky:*

(i) T je unitární.

(ii) T je izometrie na.

(iii) T je izometrie do.

(iv) $\langle Tx, Ty \rangle = \langle x, y \rangle$ pro každé $x, y \in H$.

Pak (i)⇔(ii)⇒(iii)⇔(iv). *Navíc, pokud je T na, pak jsou všechny podmínky ekvivalentní.*

Definice 83. Nechť H je Hilbertův prostor. Operátor $U \in \mathcal{L}(H)$ se nazývá *částečná izometrie*, pokud existuje uzavřený podprostor $K \subset H$ (říkáme mu *iniciační podprostor U*) splňující, že $U|_K$ je izometrie do a $U|_{K^\perp} \equiv 0$.

Věta 84 (polární rozklad)**.** *Nechť H je Hilbertův prostor a $T \in \mathcal{L}(H)$.*

1. *Existují právě jedny operátory $P, U \in \mathcal{L}(H)$ splňující, že $P \geqslant 0$, U je částečná izometrie s iniciačním podprostorem $\overline{\operatorname{Rng} P}$ a $T = UP$. Navíc pak platí, že $P = \sqrt{T^\star T} = U^\star T$.*

2. *Pokud je T invertovatelný, pak existují právě jedny operátory $P, U \in \mathcal{L}(H)$ splňující, že $P \geqslant 0$ je invertovatelný, U je unitární a $T = UP$.*

Konec přednášek z 7. týdne

2. Borelovsky měřitelný kalkulus pro normální operátory

Lemma 85 (Lax-Milgram)**.** *Nechť H je Hilbertův prostor. Je-li S seskvilineární forma na H splňující $\|S\| := \sup_{x,y \in B_H} |S(x,y)| < \infty$, pak existuje jednoznačně určený $T \in \mathcal{L}(H)$ takový, že $S(x,y) = \langle Tx, y \rangle$ pro všechna $x, y \in H$. Navíc platí, že $\|S\| = \|T\|$.*

Definice 86. Nechť H je Hilbertův prostor, $T \in \mathcal{L}(H)$ je normální a $\Phi\colon C(\sigma(T)) \to \mathcal{L}(H)$ je spojitý kalkulus z Věty 70. Pak pro $x, y \in H$ symbolem $\mu_{x,y}$ označujeme jedinou regulární borelovskou komplexní míru na $\sigma(T)$ splňující

$$\int_{\sigma(T)} f \, \mathrm{d}\mu_{x,y} = \langle \Phi(f)x, y \rangle, \quad f \in C(\sigma(T)).$$

Pro každou $f \in \operatorname{Bor}_b(\sigma(T))$ dále definujeme $\Phi(f) \in \mathcal{L}(H)$ jako (jediný) operátor splňující

$$\langle \Phi(f)x, y \rangle = \int_{\sigma(T)} f \, \mathrm{d}\mu_{x,y}, \quad x, y \in H.$$

Místo $\phi(f)$ píšeme také $f(T)$.

Poznámka 87. Nechť H je Hilbertův prostor a $T \in \mathcal{L}(H)$ je normální.

1. Zobrazení $H \times H \ni (x,y) \mapsto \mu_{x,y} \in M(\sigma(T))$ z Definice 86 je seskvilineární, a proto platí

$$\mu_{x,y} = \frac{1}{4}\sum_{k=0}^{3} i^k \mu_{x+i^k y, x+i^k y}, \quad x,y \in H.$$

2. Pro každé $x \in H$ je $\mu_{x,x} \geqslant 0$.

3. $\mathrm{Bor}_b(\sigma(T)) \subset \ell_\infty(\sigma(T))$ je C*-algebra.

4. Zobrazení $\Phi\colon \mathrm{Bor}_b(\sigma(T)) \to \mathcal{L}(H)$ z Definice 86 je rozšířením spojitého kalkulu $\Phi\colon C(\sigma(T)) \to \mathcal{L}(H)$ z Věty 70.

Věta 88. *Nechť P je metrický prostor. Nechť $\Phi \supset C_\mathrm{b}(P)$ je systém funkcí na P, který je uzavřený vzhledem k bodovým limitám omezených posloupností. Pak $\Phi = \mathrm{Bor}_b(P)$.*

Remark: důkaz Věty 88 byl vynechán

Definice 89. Nechť X, Y jsou normované lineární prostory. Na prostoru $\mathcal{L}(X,Y)$ definujeme následující lokálně konvexní topologie:

- silná operátorová topologie τ_{SOT} je generovaná systémem pseudonorem $\{p_x(T) = \|Tx\|;\ x \in X\}$,
- slabá operátorová topologie τ_{WOT} je generovaná systémem pseudonorem $\{p_{x,f}(T) = |f(Tx)|;\ x \in X, f \in Y^*\}$.

Věta 90 (borelovský kalkulus)**.** *Nechť H je Hilbertův prostor, $T \in \mathcal{L}(H)$ je nenulový normální operátor a $f \in \mathrm{Bor}_b(\sigma(T))$. Zobrazení $\Phi\colon \mathrm{Bor}_b(\sigma(T)) \to \mathcal{L}(H)$ z Definice 86 má následující vlastnosti:*

(a) Φ je spojitý *-homomorfismus a $\|\Phi\| = 1$.

(b) Je-li $\{f_n\} \subset \mathrm{Bor}_b(\sigma(T))$ omezená posloupnost konvergující bodově k f, pak $\Phi(f_n) \to \Phi(f)$ v topologii τ_{SOT}.

(c) Pokud kompaktní $K \subset \mathbb{C}$ obsahuje $\sigma(T)$ a $\Psi\colon \mathrm{Bor}_b(K) \to \mathcal{L}(H)$ je spojitý *-homomorfismus, pro který $\Psi(1) = I$, $\Psi(Id) = T$ a platí pro něj vlastnost (b) s topologií τ_{WOT}, pak $\Psi(g) = \Phi(g\restriction_{\sigma(T)})$ pro každou $g \in \mathrm{Bor}_b(K)$.

(d) $f(T)$ je normální. Je-li f reálná, pak $f(T)$ je samoadjungovaný.

(e) $\sigma(f(T)) \subset \overline{f(\sigma(T))}$.

(f) Pokud $g \in \mathrm{Bor}_b\big(\overline{\mathrm{Rng}\, f}\big)$, pak $(g \circ f)(T) = g(f(T))$.

(g) Pokud $S \in \mathcal{L}(H)$ komutuje s T, pak S komutuje i s $f(T)$.

Poznámka: důkaz vlastností (c)-(g) byl na přednášce vynechán.
Konec přednášek z 8. týdne

3. Integrál podle spektrální míry, spektrální rozklad normálního operátoru

Definice 91. Nechť H je Hilbertův prostor a $(X,\mathcal{A})$ je měřitelný prostor. Řekneme, že $E : \mathcal{A} \to \mathcal{L}(H)$ je *spektrální míra pro* $(X,\mathcal{A},H)$, pokud jsou splněny následující podmínky

(a) $E(A)$ je ortogonální projekce pro každé $A \in \mathcal{A}$,

(b) $E(X) = I$ a $E(\varnothing) = 0$,

(c) Kdykoliv $\{A_n\colon n \in \mathbb{N}\} \subset \mathcal{A}$ jsou po dvou disjunktní, pak platí

$$E(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n)x = \sum_{n=1}^{\infty} E(A_n)x, \quad x \in H.$$

Tvrzení 92 (základní vlastnosti spektrální míry)**.** *Nechť H je Hilbertův prostor, $(X,\mathcal{A})$ je měřitelný prostor a E je spektrální míra pro $(X,\mathcal{A},H)$. Pak jsou splněny následující podmínky.*

(a) Kdykoliv $A, B \in \mathcal{A}$ a $A \subset B$, pak $E(A) \leqslant E(B)$,

(b) Kdykoliv $A, B \in \mathcal{A}$, pak $E(A \cap B) = E(A)E(B)$,

(c) Pro každé $x,y \in H$ je zobrazení $E_{x,y} : \mathcal{A} \to \mathbb{C}$ definované předpisem $E_{x,y}(A) = \langle E(A)x, y\rangle$, $A \in \mathcal{A}$ komplexní míra s totální variací $\|E_{x,y}\| \leqslant \|x\|\|y\|$.

(d) Zobrazení $H \times H \ni (x,y) \mapsto E_{x,y}$ je seskvilineární.

(e) Pro každé $x, y \in H$ a $A \in \mathcal{A}$ platí $|E_{x,y}(A)| \leqslant \frac{1}{2}(E_{x,x}(A) + E_{y,y}(A))$.

(f) Pro každé $x, y \in H$ platí $E_{x+y,x+y} \leqslant 2(E_{x,x} + E_{y,y})$.

Definice 93. Nechť H je Hilbertův prostor, $(X, \mathcal{A})$ je měřitelný prostor, E je spektrální míra pro $(X, \mathcal{A}, H)$ a $f : X \to \mathbb{C}$ je omezená $\mathcal{A}$-měřitelná funkce. Pak *integrál f podle spektrální míry E*, je (jednoznačný) operátor $T \in \mathcal{L}(H)$ splňující

$$\langle Tx, y\rangle = \int_X f \,\mathrm{d}E_{x,y}, \quad x, y \in H.$$

Tento operátor pak značíme symbolem $T = \int f \,\mathrm{d}E$.

Konec přednášek z 9. týdne

Tvrzení 94. *Nechť H je Hilbertův prostor, $(X, \mathcal{A})$ je měřitelný prostor, E je spektrální míra pro $(X, \mathcal{A}, H)$ a $f : X \to \mathbb{C}$ je omezená $\mathcal{A}$-měřitelná funkce. Pak pro každé $\varepsilon > 0$, disjunktní rozklad $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{A}$ množiny X splňující $\max\{\operatorname{diam} f(A_i) : i = 1, \dots, n\} < \varepsilon$ a body $x_i \in A_i$, $i = 1, \dots, n$ platí*

$$\left\| \int f \,\mathrm{d}E - \sum_{i=1}^{n} f(x_i)E(A_i) \right\| < \varepsilon.$$

Definice 95. Nechť $(X, \mathcal{A})$ je měřitelný prostor. Pak symbolem $B(X, \mathcal{A}) \subset \ell_\infty(X)$ označujeme C*-algebru všech omezených $\mathcal{A}$-měřitelných funkcí $f : X \to \mathbb{C}$.

Věta 96 (vlastnosti integrálu podle spektrální míry)**.** *Nechť H je Hilbertův prostor, $(X, \mathcal{A})$ je měřitelný prostor, E je spektrální míra pro $(X, \mathcal{A}, H)$ a nechť $\rho : B(X\mathcal{A}) \to \mathcal{L}(H)$ je zobrazení definované předpisem $\rho(f) = \int f \,\mathrm{d}E$, $f \in B(X, \mathcal{A})$. Pak platí:*

(a) ρ je spojitý *-homomorfismus, $\|\rho\| = 1$ a $\rho(1) = I$.

(b) Pro $f \in B(X, \mathcal{A})$ je $\rho(f) \in \mathcal{L}(H)$ normální, pokud je f reálná tak je $\rho(f)$ samoadjungovaný a $f \geqslant 0$ implikuje $\rho(f) \geqslant 0$.

(c) Je-li $\{f_n\} \subset B(X, \mathcal{A})$ omezená posloupnost konvergující bodově k f, pak $\rho(f_n) \to \rho(f)$ v topologii τ_{WOT}.

(d) Pro $f \in B(X, \mathcal{A})$ a $x \in H$ platí $\|\rho(f)x\| = \sqrt{\int |f|^2 \,\mathrm{d}E_{x,x}}$.

Důsledek 97 (spektrální rozklad normálního operátoru)**.** *Nechť H je Hilbertův prostor a $T \in \mathcal{L}(H)$ je normální. Pak existuje právě jedna spektrální míra E pro $(\sigma(T), \mathrm{Bor}(\sigma(T)), H)$ splňující $\int id \,\mathrm{d}E = T$. Navíc, pak platí $E(A) = \Phi(\chi_A)$ pro každou $A \in \mathrm{Bor}(\sigma(T))$, kde $\Phi : \mathrm{Bor}_b(\sigma(T)) \to \mathcal{L}(H)$ je borelovský kalkulus z Definice 86.*

IV. Neomezené operátory

1. Neomezené operátory na Banachových prostorech

Definice 98. Nechť X, Y jsou Banachov prostory, *operátorem z X do Y* budeme označovat lineární zobrazení T, které je definované na lineárním podprostoru $D(T) \subset X$ a jehož obor hodnot $R(T)$ je podmnožinou Y. Pokud $Y = X$, říkáme také, že T je *operátor v X*.

Grafem T pak rozumíme množinu $G(T) := \{(x, Tx) : x \in D(T)\} \subset X \times Y$.

Konečně, nechť T je operátor z X do Y. Pak

(a) T je *hustě definovaný*, pokud $D(T)$ je husté v X;

(b) T je *uzavřený*, pokud $G(T) \subset X \times Y$ je uzavřený;

(c) operátor S z X do Y je *rozšířením operátoru T*, pokud $G(T) \subset G(S)$ (pak píšeme $T \subset S$);

(d) pokud S je operátor z X do Y, pak $S+T$ je operátor s $D(S+T) = D(S) \cap D(T)$ definovaný předpisem $(S+T)x = Sx+Tx$, $x \in D(S+T)$;

(e) pokud S je operátor z Y do Banachova prostoru Z, pak ST je operátor s $D(ST) = \{x \in D(T) : Tx \in D(S)\}$ definovaný předpisem $(ST)x = S(Tx)$, $x \in D(ST)$;

(f) pro $\alpha \in \mathbb{K}$ definujeme operátor αT takto: pokud je $\alpha = 0$, pak $D(\alpha T) = X$ a $\alpha T \equiv 0$; jinak je $D(\alpha T) = D(T)$ a $(\alpha T)x = \alpha(Tx)$ pro $x \in D(T)$.

Poznámka 99. Je lehké si rozmyslet, že pro operátory S, T, V vždy platí $(S+T)+V = S+(T+V)$, $S(TV) = (ST)V$ a $(S+T)V = SV+TV$ kdykoliv jsou příslušné operátory dobře definovány. Obecně ale nemusí platit, že $V(S+T) = VS+VT$ (obecně platí jen inkluze "$\supset$" a rovnost platí například pokud V je definován všude).

Lemma 100. *Nechť X, Y jsou Banachovy prostory a $L \subset X \times Y$. Pak L je grafem operátoru z X do Y, právě když L je podprostor splňující $\{(x,y) \in L\colon x = 0\} = \{(0,0)\}$.*

Tvrzení 101. *Nechť X, Y jsou Banachovy prostory a T je operátor z X do Y.*

(a) Je-li $D(T) = X$ a T je uzavřený, pak $T \in \mathcal{L}(X,Y)$.

(b) Následující tvrzení jsou ekvivalentní:

(i) Operátor T má uzavřené rozšíření.

(ii) Pokud $(x_n, Tx_n) \to (0,y)$ v $D(T) \times Y$, pak $y = 0$.

(iii) Množina $\overline{G(T)} \subset X \times Y$ je grafem operátoru z X do Y.

(c) Pokud T je prostý a uzavřený, je T^{-1} též uzavřený.

Definice 102. Nechť X, Y jsou Banachovy prostory a T je operátor z X do Y. Pokud T má uzavřené rozšíření, pak $\overline{T}$ je jeho minimální uzavřené rozšíření, tj. operátor z X do Y splňující $G(\overline{T}) = \overline{G(T)}$.

Tvrzení 103. *Nechť X, Y, Z jsou Banachovy prostory a T uzavřený operátor z X do Y.*

(a) Pokud $S \in \mathcal{L}(X,Y)$, pak $S + T$ je uzavřený a $D(S+T) = D(T)$.

(b) Pokud $S \in \mathcal{L}(Y,Z)$, pak $D(ST) = D(T)$. Pokud S je isomorfizmus do, je ST uzavřený.

(c) Pokud $S \in \mathcal{L}(Z,X)$, je TS uzavřený.

Konec přednášek z 10. týdne

Poznámka 104. Součet uzavřených hustě definovaných operátorů v X nemusí mít ani uzavřené rozšíření. Složení uzavřeného hustě definovaného operátoru v X s operátorem z $\mathcal{L}(X)$ nemusí mít ani uzavřené rozšíření.

Tvrzení 105. *Nechť X, Y jsou Banachovy prostory a T je prostý uzavřený operátor z X do Y. Pak následující tvrzení jsou ekvivalentní.*

(i) $\operatorname{Rng} T = Y$ *a* $T^{-1} \in \mathcal{L}(Y,X)$.

(ii) $\operatorname{Rng} T = Y$.

(iii) $\operatorname{Rng} T$ *je hustý v* Y *a* $T^{-1} \in \mathcal{L}(\operatorname{Rng} T, X)$.

Definice 106. Nechť X je Banachův prostor a T je lineární operátor v X. Rezolventní množinu operátoru T definujeme jako

$$\rho(T) = \{\lambda \in \mathbb{K};\ \lambda I - T \text{ má inverzi patřící do } \mathcal{L}(X)\},$$

rezolventu (též rezolventní zobrazení) operátoru T předpisem

$$R_T(\lambda) = (\lambda I - T)^{-1}, \quad \lambda \in \rho(T)$$

a spektrum T jako $\sigma(T) = \mathbb{K} \setminus \rho(T)$.

Věta 107. *Nechť X je Banachův prostor a T je lineární operátor v X. Množina $\rho(T)$ je otevřená a $\sigma(T)$ je uzavřená. Rezolventní zobrazení R_T má derivaci v každém bodě množiny $\rho(T)$. Je-li tedy X komplexní, pak R_T je holomorfní na $\rho(T)$.*

Lemma 108. *Nechť X je Banachův prostor a T je operátor v X takový, že $0 \notin \sigma(T)$. Pak pro nenulové $\lambda \in \mathbb{K}$ platí $\lambda \in \sigma(T)$, právě když $\frac{1}{\lambda} \in \sigma(T^{-1})$.*

Důsledek 109. *Nechť X je komplexní Banachův prostor a T je operátor v X takový, že $\sigma(T) = \emptyset$. Pak $T^{-1} \in \mathcal{L}(X)$ a $\sigma(T^{-1}) = \{0\}$.*

2. Neomezené operátory na Hilbertových prostorech - základní pojmy

Úmluva 110. Ve zbytku této kapitoly (IV. Neomezené operátory) budeme všechny Banachovy prostory uvažovat nad tělesem komplexních čísel (pokud nebude explicitně řečen opak).

Definice 111. Nechť H je Hilbertův prostor a T je hustě definovaný operátor v H. Hilbertovsky adjungovaný operátor k T, označený jako $T^\star$, definujeme na množině

$$D(T^\star) = \{y \in H;\ x \mapsto \langle Tx, y\rangle \text{ je spojitý funkcionál na } D(T)\}.$$

Pro každé $y \in D(T^\star)$ definujeme $T^\star y$ jako jednoznačně určený prvek H, který splňuje $\langle x, T^\star y\rangle = \langle Tx, y\rangle$ pro každé $x \in D(T)$.

Poznámka 112. $D(T^\star) \subset H$ je podprostor a $T^\star$ je operátor na H.

Tvrzení 113. *Nechť S, T jsou hustě definované operátory v Hilbertově prostoru H.*

(a) Pokud $S \subset T$, pak $T^\star \subset S^\star$.

(b) Pokud $S + T$ je hustě definovaný, pak $S^\star + T^\star \subset (S+T)^\star$. Pokud je navíc $S \in \mathcal{L}(H)$, pak $S^\star + T^\star = (S+T)^\star$.

(c) Pokud ST je hustě definovaný, pak $T^\star S^\star \subset (ST)^\star$. Pokud je navíc $S \in \mathcal{L}(H)$, pak $T^\star S^\star = (ST)^\star$.

Konec přednášek z 11. týdne

Tvrzení 114. *Nechť T je hustě definovaný operátor v Hilbertově prostoru H.*

(a) $T^\star$ je uzavřený.

(b) T má uzavřené rozšíření, právě když $T^\star$ je hustě definovaný. V takovém případě platí $\overline{T} = T^{\star\star}$.

(c) T je uzavřený, právě když $T^\star$ je hustě definovaný a $T = T^{\star\star}$.

Lemma 115. *Nechť T je hustě definovaný operátor v Hilbertově prostoru H a $V \in \mathcal{L}(H \oplus_2 H)$ je definovaný předpisem $V(x,y) = (-y, x)$, $(x,y) \in H \oplus_2 H$. Pak V je unitární operátor a $G(T^\star) = (V(G(T)))^\perp$.*

Tvrzení 116. *Nechť T je hustě definovaný operátor v Hilbertově prostoru H.*

(a) $\operatorname{Ker} T^\star = (R(T))^\perp$,

(b) Je-li navíc T uzavřený, pak $\operatorname{Ker} T = (R(T^\star))^\perp$.

Tvrzení 117. *Je-li T prostý hustě definovaný operátor v Hilbertově prostoru H a $R(T)$ je hustý v H, pak $T^\star$ je prostý a $(T^\star)^{-1} = (T^{-1})^\star$.*

Poznámka: důkaz Tvrzení 117 byl na přednášce vynechán.

Definice 118. Nechť T je operátor v Hilbertově prostoru. Řekneme, že T je *samoadjungovaný*, pokud $T^\star = T$. Řekneme, že T je *symetrický*, pokud $\langle Tx, y\rangle = \langle x, Ty\rangle$ pro každé $x, y \in D(T)$. Dále řekneme, že T je maximální symetrický, pokud je symetrický a neexistuje vlastní symetrické rozšíření T.

Tvrzení 119. *Nechť T je hustě definovaný, symetrický operátor v Hilbertově prostoru H.*

(a) T má uzavřené rozšíření a $\overline{T}$ je symetrický.

(b) Je–li $D(T) = H$, pak $T \in \mathcal{L}(H)$ a je samoadjungovaný.

(c) Je–li $R(T)$ hustý, pak T je prostý.

(d) Je–li $R(T) = H$, pak T je prostý, samoadjungovaný a $T^{-1} \in \mathcal{L}(H)$.

(e) Je–li T samoadjungovaný, pak je maximální symetrický. Navíc, T je pak prostý, právě když je $R(T)$ hustý a v takovém případě je T^{-1} samoadjungovaný.

Poznámka: důkaz Tvrzení 119 byl na přednášce vynechán.

Věta 120. *Nechť T je samoadjungovaný operátor v netriviálním Hilbertově prostoru H. Pak $\emptyset \neq \sigma(T) \subset \mathbb{R}$.*

Lemma 121. *Nechť T je symetrický operátor v Hilbertově prostoru H a $\lambda \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}$. Pak $\lambda I - T$ je prostý a $(\lambda I - T)^{-1}$ je spojitý na $R(\lambda I - T)$. Navíc $R(\lambda I - T)$ je uzavřený, právě když T je uzavřený.*

Konec přednášek z 12. týdne

Důsledek 122. *Nechť T je operátor v Hilbertově prostoru H. Pak následující tvrzení jsou ekvivalentní:*

(i) T je samoadjungovaný.

(ii) T je hustě definovaný, symetrický a $\sigma(T) \subset \mathbb{R}$.

(iii) T je hustě definovaný, symetrický a existuje $\lambda \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}$ takové, že $\lambda, \overline{\lambda} \in \rho(T)$.

3. Cayleyova transformace

Definice 123. Nechť T je symetrický operátor v Hilbertově prostoru H. Cayleyova transformace operátoru T je definována předpisem $\mathcal{C}(T) = (T - iI) \circ (T + iI)^{-1}$.

Věta 124. *Nechť T je symetrický operátor v Hilbertově prostoru H a $\mathcal{C}(T)$ je jeho Cayleyova transformace.*

(a) $\mathcal{C}(T)$ je lineární izometrie $D(\mathcal{C}(T)) = R(T + iI)$ na $R(\mathcal{C}(T)) = R(T - iI)$.

(b) $I - \mathcal{C}(T) = 2i(T + iI)^{-1}$, a tedy $I - \mathcal{C}(T)$ je prostý a $R(I - \mathcal{C}(T)) = D(T)$. ***Konec přednášek z 13. týdne***

(c) $T = i(I + \mathcal{C}(T))(I - \mathcal{C}(T))^{-1}$.

(d) $\mathcal{C}(T)$ je uzavřený $\Leftrightarrow$ T je uzavřený $\Leftrightarrow$ $D(\mathcal{C}(T))$ je uzavřený $\Leftrightarrow$ $R(\mathcal{C}(T))$ je uzavřený.

Poznámka: důkaz části (d) ve Větě 124 byl na přednášce vynechán.

Věta 125. *Nechť H je Hilbertův prostor a U je izometrický operátor z $D(U)$ na $R(U)$. Nechť $I - U$ je prostý. Pak $T = i(I + U)(I - U)^{-1}$ je symetrický a $\mathcal{C}(T) = U$. Dále platí, že T je hustě definovaný právě tehdy, když $R(I - U)$ je hustý.*

Věta 126. *Nechť H je Hilbertův prostor*

(a) Nechť T je symetrický operátor v H a $\mathcal{C}(T)$ je jeho Cayleyova transformace. Pak T je samoadjungovaný právě tehdy, když $\mathcal{C}(T)$ je unitární.

(b) Nechť U je unitární operátor na H takový, že $I - U$ je prostý. Pak $T = i(I + U)(I - U)^{-1}$ je samoadjungovaný a $\mathcal{C}(T) = U$.

Definice 127. Nechť T je uzavřený symetrický operátor na Hilbertově prostoru H. Pak čísla

$$n_+(T) = \dim\left(\mathrm{Rng}(T + iI)\right)^\perp \quad \text{a} \quad n_-(T) = \dim\left(\mathrm{Rng}(T - iI)\right)^\perp$$

nazveme indexy defektu operátoru T.

Věta 128. *Nechť T je uzavřený symetrický hustě definovaný operátor na separabilním Hilbertově prostoru H. Pak platí následující tvrzení.*

(a) Operátor T je samoadjungovaný, právě když $n_+(T) = n_-(T) = 0$.

(b) Operátor T je maximální symetrický, právě když $\min\{n_+(T), n_-(T)\} = 0$.

(c) Operátor T má samoadjungované rozšíření, právě když $n_+(T) = n_-(T)$.

Poznámka: důkaz části (b) ve Větě 128 byl na přednášce vynechán.

4. Integrál z neomezené funkce podle spektrální míry

Věta 129. *Nechť H je Hilbertův prostor, $(X, \mathcal{A})$ je měřitelný prostor, E je spektrální míra pro $(X, \mathcal{A}, H)$ a $f : X \to \mathbb{C}$ je $\mathcal{A}$-měřitelná funkce. Pak je*

$$D = \{x \in H;\ \int_X |f|^2 \,\mathrm{d}E_{x,x} < +\infty\}.$$

hustý podprostor H a existuje právě jeden operátor T definovaný na D takový, že

$$\langle Tx, y\rangle = \int_X f(\lambda)\,\mathrm{d}E_{x,y}(\lambda), \quad x, y \in D. \tag{2}$$

Navíc platí

$$\|Tx\| = \sqrt{\int_X |f(\lambda)|^2 \,\mathrm{d}E_{x,x}(\lambda)}, \quad x \in D \tag{3}$$

a pokud f je omezená, pak $T = \int f \,\mathrm{d}E$.

Definice 130. Nechť H je Hilbertův prostor, $(X, \mathcal{A})$ je měřitelný prostor, E je spektrální míra pro $(X, \mathcal{A}, H)$ a $f : X \to \mathbb{C}$ je $\mathcal{A}$-měřitelná funkce. Pak *integrál f podle spektrální míry E*, je (jednoznačný) operátor T na H splňující

$$D(T) = \{x \in H\colon \int |f|^2 \,\mathrm{d}E_{x,x} < \infty\},$$

$$\langle Tx, y\rangle = \int_X f \,\mathrm{d}E_{x,y}, \quad x, y \in D(T).$$

Tento operátor pak značíme symbolem $T = \int f \,\mathrm{d}E$.

Věta 131. *Nechť H je Hilbertův prostor, $(X, \mathcal{A})$ je měřitelný prostor, E je spektrální míra pro $(X, \mathcal{A}, H)$ a $f, g : X \to \mathbb{C}$ jsou $\mathcal{A}$-měřitelné funkce. Pak platí následující tvrzení.*

(a) $\int f \,\mathrm{d}E + \int g \,\mathrm{d}E \subset \int f + g \,\mathrm{d}E$.

(b) $\big(\int f \,\mathrm{d}E\big)\big(\int g \,\mathrm{d}E\big) \subset \int fg \,\mathrm{d}E$ *a* $D\big(\big(\int f \,\mathrm{d}E\big)\big(\int g \,\mathrm{d}E\big)\big) = D\big(\int g \,\mathrm{d}E\big) \cap D\big(\int fg \,\mathrm{d}E\big)$.

(c) $\big(\int f \,\mathrm{d}E\big)^\star = \int \overline{f} \,\mathrm{d}E$ *a* $\int f \,\mathrm{d}E\big(\int f \,\mathrm{d}E\big)^\star = \int |f|^2 \,\mathrm{d}E = \big(\int f \,\mathrm{d}E\big)^\star \int f \,\mathrm{d}E$. *Tedy* $\int f \,\mathrm{d}E$ *je normální.*

(d) $\int f \,\mathrm{d}E$ *je uzavřený.*

(e) $\int f \,\mathrm{d}E \in \mathcal{L}(H)$, *právě když existuje* $A \in \mathcal{A}$ *splňující že* $E(X \backslash A) = 0$ *a* f *je omezená na* A.

Poznámka: důkazy částí (a)-(c) ve Větě 131 byly na přednášce vynechány.

Věta 132. *Nechť H je Hilbertův prostor, $(X, \mathcal{A})$ je měřitelný prostor, E je spektrální míra pro $(X, \mathcal{A}, H)$ a $f : X \to \mathbb{C}$ je $\mathcal{A}$-měřitelná funkce. Pak*

$$\sigma\Big(\int f \,\mathrm{d}E\Big) = \operatorname{ess\,Rng} f := \{\lambda \in \mathbb{C};\ \forall r > 0\colon E(f^{-1}(U(\lambda, r))) \neq 0\}.$$

Navíc pro $\lambda \in \mathbb{C}$ *máme* $\operatorname{Ker}(\lambda I - \int f \,\mathrm{d}E) = \operatorname{Rng}(E(f^{-1}(\{\lambda\})))$. *Tedy* $\lambda \in \sigma_{\mathrm{p}}(\int f \,\mathrm{d}E)$ *právě tehdy, když* $E(f^{-1}(\{\lambda\})) \neq 0$.

Poznámka: důkaz Věty 132 byl na přednášce vynechán.
Konec přednášek z 14. týdne

5. Spektrální rozklad samoadjungovaného operátoru

Lemma 133. *Nechť H je Hilbertův prostor, $(X, \mathcal{A})$ a $(Y, \mathcal{B})$ jsou měřitelné prostory, E je spektrální míra pro $(X, \mathcal{A}, H)$ a $\varphi : X \to Y$ je měřitelná funkce. Pak je zobrazení $\varphi(E)\colon \mathcal{B} \to \mathcal{L}(H)$ definované jako*

$$\varphi(E)(A) = E(\varphi^{-1}(A)), \quad A \in \mathcal{B}$$

je spektrální míra pro $(Y, \mathcal{B}, H)$, která splňuje pro každou $\mathcal{A}$-měřitelnou $g : Y \to \mathbb{C}$ rovnost

$$\int g \,\mathrm{d}\varphi(E) = \int g \circ \varphi \,\mathrm{d}E.$$

Navíc platí $\int \varphi \,\mathrm{d}E = \int Id \,\mathrm{d}\varphi(E)$.

Věta 134. *Nechť T je samoadjungovaný operátor v netriviálním Hilbertově prostoru H. Pak existuje právě jedna spektrální míra E pro $(\mathbb{C}, \operatorname{Bor}(\mathbb{C}), H)$ taková, že $T = \int Id \,\mathrm{d}E$.*
Pro tuto spektrální míru E pak platí, že $E(\mathbb{C} \backslash \sigma(T)) = 0$.

Poznámka: důkaz jednoznačnosti ve Větě 134 zkoušen nebude.

Důsledek 135. *Nechť T je samoadjungovaný operátor na Hilberově prostoru. Pak T je spojitý, právě když $\sigma(T)$ je omezené.*

Konec přednášek z 15. týdne