

# 1. Taylorův polynom

**Definice.** Necht  $f$  je funkce,  $n \in \mathbb{N}$ ,  $a \in \mathbb{R}$  a existuje vlastní  $f^{(n)}(a)$ . Pak polynom

$$T_n^{f,a}(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \dots + \frac{1}{n!}f^{(n)}(a)(x-a)^n$$

nazýváme **Taylorovým polynomem řádu  $n$  funkce  $f$  v bodě  $a$** .

**Úmluva.** V dalším textu budeme symbol tvaru  $(x-a)^0$  chápat jako 1, a to i tehdy, jestliže  $x = a$ . Symbolem  $f^{(0)}$  (tedy „nultou derivací“ funkce  $f$ ) budeme rozumět samotnou funkci  $f$ .

**Lemma 1.1.** Necht  $n \in \mathbb{N}$ ,  $a \in \mathbb{R}$ ,  $Q$  je polynom, st  $Q \leq n$  a  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{Q(x)}{(x-a)^n} = 0$ . Pak  $Q$  je nulový polynom.

*Důkaz.* Důkaz nebyl, nebude zkoušen. □

**Věta 1.2** (Charakterizace Taylorova polynomu). Necht  $n \in \mathbb{N}$ ,  $a \in \mathbb{R}$  a necht má funkce  $f$  v bodě  $a$  vlastní  $n$ -tou derivaci. Potom

(a) Polynom  $T_n^{f,a}(x)$  je jediný polynom stupně nejvýše  $n$  splňující

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - T_n^{f,a}(x)}{(x-a)^n} = 0.$$

(b) Polynom  $P(x) = T_n^{f,a}(x)$  je jediný polynom stupně nejvýše  $n$  takový, že pro každé  $i \in \{0 \dots n\}$  platí  $f^{(i)}(a) = P^{(i)}(a)$ .

*Důkaz.* Důkaz byl přednesen na přednášce a bude zkoušen. □

**Důsledek 1.3.** Necht  $n \in \mathbb{N}$ ,  $a \in \mathbb{R}$  a necht má funkce  $f$  v bodě  $a$  vlastní  $n$ -tou derivaci. Potom

$$f(x) = T_n^{f,a}(x) + \omega(x)(x-a)^n,$$

kde  $\lim_{x \rightarrow a} \omega(x) = 0$ .

*Důkaz.* Důkaz byl přednesen na přednášce a bude zkoušen. □

**konec 1. přednášky (20.2.2024)**

**Věta 1.4** (Taylorův polynom základních funkcí). Necht  $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ , pak

$$\begin{aligned} T_n^{\exp,0}(x) &= 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} \\ T_{2n-1}^{\sin,0}(x) &= T_{2n}^{\sin,0}(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} \\ T_{2n}^{\cos,0}(x) &= T_{2n+1}^{\cos,0}(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} \\ T_n^{\log(1+x),0}(x) &= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} \\ \forall \alpha \in \mathbb{R} : T_n^{(1+x)^\alpha,0}(x) &= 1 + \frac{\alpha}{1!}x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \dots + \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!}x^n. \end{aligned}$$

*Důkaz.* Důkaz byl přednesen na přednášce a bude zkoušen. □

**Věta 1.5** (Lagrangeův tvar zbytku). *Nechť  $n \in \mathbb{N}$  a necht'  $a, x \in \mathbb{R}$ ,  $a < x$ . Předpokládejme, že funkce  $f$  má v každém bodě intervalu  $[a, x]$  vlastní derivaci řádu  $(n + 1)$ . Pak existuje  $\xi \in (a, x)$  takové, že*

$$f(x) - T_n^{f,a}(x) = \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi)(x-a)^{n+1}.$$

*Důkaz.* Důkaz byl přednesen na přednášce a bude zkoušen. □

**Poznámka.** Věta 1.5 platí i v případě  $x < a$ .

**Důsledek 1.6.** *Nechť  $n \in \mathbb{N}$ ,  $a \in \mathbb{R}$ ,  $r > 0$  a necht' má funkce  $f$  v každém bodě intervalu  $(a-r, a+r)$  vlastní derivaci řádu  $(n + 1)$ . Pak*

$$\forall x \in (a-r, a+r): |f(x) - T_n^{f,a}(x)| \leq \frac{r^{n+1}}{(n+1)!} \sup_{|y-a|<r} |f^{(n+1)}(y)|.$$

*Důkaz.* Důkaz byl přednesen na přednášce a bude zkoušen. □

**Důsledek 1.7.** *Nechť  $a \in \mathbb{R}$ ,  $r > 0$  a necht' má funkce  $f$  v každém bodě intervalu  $(a-r, a+r)$  vlastní derivaci řádu  $n$  pro každé  $n \in \mathbb{N}$ . Ať existuje konstanta  $K > 0$  taková, že  $\sup_{|y-a|<r} |f^{(n+1)}(y)| \leq K^{n+1}$  pro  $n \in \mathbb{N}$ . Pak platí:*

(a) *Pro každé  $\varepsilon > 0$  existuje  $n_0$  tak, že pro každé přirozené číslo  $n \geq n_0$  platí*

$$\forall x \in (a-r, a+r): |f(x) - T_n^{f,a}(x)| \leq \varepsilon.$$

(b)

$$\forall x \in (a-r, a+r): f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x-a)^n.$$

*Důkaz.* Důkaz byl přednesen na přednášce a bude zkoušen. □

**Definice.** Necht'  $f$  je funkce,  $a \in \mathbb{R}$  a  $f^{(n)}(a) \in \mathbb{R}$  pro každé  $n \in \mathbb{N}$ . Potom řadu

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x-a)^n$$

nazýváme **Taylorovou řadou funkce  $f$  o středu  $a$** . Ve speciálním případě  $a = 0$  mluvíme o **Maclaurinově řadě**.

**Věta 1.8** (Taylorovy řady elementárních funkcí). *Platí (například) následující vztahy mezi elementárními funkcemi a jejich Taylorovými řadami (středem Taylorovy řady je ve všech případech bod  $a = 0$ ):*

$$(a) \forall x \in \mathbb{R}: \exp x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!},$$

$$(b) \forall x \in \mathbb{R}: \sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1},$$

$$(c) \forall x \in \mathbb{R}: \cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n},$$

$$(d) \forall x \in (-1, 1]: \log(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n,$$

$$(e) \forall x \in (-1, 1), \forall \alpha \in \mathbb{R}: (1+x)^\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n,$$

*Důkaz.* Důkaz (a), (b) a (c) byl přednesen na přednášce a bude zkoušen. Důkaz (d) a (e) nebyl a zkoušen nebude.  $\square$

**konec 3. přednášky (27.2.2024)**

## 2. Primitivní funkce

**Značení.** Nechť  $I$  je interval a  $n \in \mathbb{N}$ . Budeme používat značení

$$\begin{aligned}\mathcal{C}(I) &:= \{f : I \rightarrow \mathbb{R}; f \text{ je spojitá na } I\}; \\ \mathcal{C}^n(I) &:= \{f : I \rightarrow \mathbb{R}; f \text{ má spojitou } n\text{-tou derivaci na } I\}.\end{aligned}$$

Symbol  $f \in \mathcal{C}([a, b])$  znamená, že interval  $[a, b]$  je omezený a funkce  $f$  je na tomto intervalu spojitá.

### 2.1. Základní vlastnosti

**Definice.** Nechť funkce  $f$  je definovaná na neprázdném otevřeném intervalu  $I$ . Řekneme, že funkce  $F$  je *primitivní funkcí k  $f$  na  $I$* , jestliže pro každé  $x \in I$  existuje  $F'(x)$  a platí  $F'(x) = f(x)$ .

**Věta 2.1** (vlastnosti primitivní funkce). *Nechť funkce  $F$  je primitivní funkce k funkci  $f$  na neprázdném otevřeném intervalu  $I$ . Pak:*

- (a)  $F$  je spojitá na  $I$ .
- (b) Pro každé  $c \in \mathbb{R}$  je  $F + c$  primitivní funkce k  $f$  na  $I$ .
- (c) Pokud  $G$  je primitivní funkce k  $f$  na  $I$ , pak existuje  $c \in \mathbb{R}$  takové, že  $F(x) = G(x) + c$  pro každé  $x \in I$ .

*Důkaz.* Důkaz byl přednesen na přednášce a bude zkoušen. □

**Věta 2.2** (vztah spojitosti a existence primitivní funkce). *Nechť  $I$  je neprázdny otevřený interval a  $f \in \mathcal{C}(I)$ . Pak  $f$  má na  $I$  primitivní funkci.*

*Důkaz.* Důkaz nebyl, nebude zkoušen. □

**Značení.** Fakt, že  $F$  je primitivní funkce k  $f$  na neprázdném otevřeném intervalu  $I$ , značíme symbolem

$$\int f(x) dx \stackrel{c}{=} F(x), \quad x \in I.$$

Symbol  $\int f(x) dx$  označuje množinu všech primitivních funkcí na  $k f$  na  $I$ .

**Věta 2.3** (linearita primitivní funkce). *Nechť funkce  $g, f$  mají na neprázdném otevřeném intervalu  $I$  primitivní funkci. Potom pro  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ,  $(\alpha, \beta) \neq (0, 0)$  je*

$$\int \alpha f(x) + \beta g(x) dx = \alpha \int f(x) dx + \beta \int g(x) dx.$$

*Důkaz.* Důkaz byl přednesen na přednášce a bude zkoušen. □

**Věta 2.4** (integrace per partes). *Nechť  $I$  je neprázdny otevřený interval a  $f, g \in \mathcal{C}(I)$ . Nechť  $F$  je primitivní funkce k  $f$  na  $I$  a  $G$  je primitivní funkce ke  $g$  na  $I$ . Pak platí*

$$\int g(x)F(x) dx = G(x)F(x) - \int G(x)f(x) dx, \quad x \in I.$$

*Důkaz.* Důkaz byl přednesen na přednášce a bude zkoušen. □

**Věta 2.5** (první věta o substituci). *Nechť  $F$  je primitivní funkce k  $f$  na  $(a, b)$ . Nechť  $\varphi : (\alpha, \beta) \rightarrow (a, b)$  je funkce, která má v každém bodě  $t \in (\alpha, \beta)$  vlastní derivaci. Pak*

$$\int f(\varphi(t))\varphi'(t) dt \stackrel{c}{=} F(\varphi(t)), \quad t \in (\alpha, \beta).$$

Důkaz. Důkaz byl přednesen na přednášce a bude zkoušen. □

#### konec 4. přednášky (28.2.2024)

**Věta 2.6** (druhá věta o substituci). *Nechť  $\varphi : (\alpha, \beta) \rightarrow (a, b)$  má v každém bodě nenulovou vlastní derivaci a  $\varphi((\alpha, \beta)) = (a, b)$ . Nechť  $f$  je funkce definovaná na intervalu  $(a, b)$  a platí*

$$\int f(\varphi(t))\varphi'(t) dt \stackrel{c}{=} G(t), \quad t \in (\alpha, \beta).$$

Pak

$$\int f(x) dx \stackrel{c}{=} G(\varphi^{-1}(x)), \quad x \in (a, b).$$

Důkaz. Důkaz byl přednesen na přednášce a bude zkoušen. □

**Věta 2.7** (lepení). *Nechť funkce  $f$  je spojitá na intervalu  $(a, b)$ ,  $c \in (a, b)$  a  $F$  je funkce spojitá v bodě  $c$ , splňující  $F'(x) = f(x)$  pro  $x \in (a, b) \setminus \{c\}$ . Pak  $F$  je primitivní k  $f$  na  $(a, b)$ .*

Důkaz. Důkaz byl přednesen na přednášce a bude zkoušen. □

#### konec 5. přednášky (5.3.2024)

## 2.2. Integrace racionálních funkcí

**Definice.** *Racionální funkcí* rozumíme podíl dvou polynomů, kde polynom ve jmenovateli není identicky roven nule. Racionální funkce  $R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$  je definovaná na libovolné podmnožině  $\mathbb{R}$ , která neobsahuje žádný kořen polynomu  $Q$ .

**Věta 2.8** (rozklad na parciální zlomky). *Nechť  $P, Q$  jsou polynomy s reálnými koeficienty takové, že*

- (i)  $\text{st } P < \text{st } Q$ ,
- (ii)  $Q(x) = a_n(x - x_1)^{p_1} \dots (x - x_k)^{p_k} (x^2 + \alpha_1 x + \beta_1)^{q_1} \dots (x^2 + \alpha_l x + \beta_l)^{q_l}$ ,
- (iii)  $a_n, x_1, \dots, x_k, \alpha_1, \dots, \alpha_l, \beta_1, \dots, \beta_l \in \mathbb{R}$ ,  $a_n \neq 0$ ,  $k, l \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ ,
- (iv)  $p_1, \dots, p_k, q_1, \dots, q_l \in \mathbb{N}$ ,
- (v) žádný z mnohočlenů  $x^2 + \alpha_1 x + \beta_1, \dots, x^2 + \alpha_l x + \beta_l$  nemá reálný kořen,
- (vi) žádné dva z polynomů  $x - x_1, x - x_2, \dots, x - x_k, x^2 + \alpha_1 x + \beta_1, \dots, x^2 + \alpha_l x + \beta_l$  nemají společný kořen.

Pak existují jednoznačně určená čísla  $A_1^1, \dots, A_{p_1}^1, \dots, A_1^k, \dots, A_{p_k}^k, B_1^1, C_1^1, \dots, B_{q_1}^1, C_{q_1}^1, \dots, B_1^l, C_1^l, \dots, B_{q_l}^l, C_{q_l}^l$  taková, že platí

$$\begin{aligned} \frac{P(x)}{Q(x)} &= \frac{A_1^1}{x - x_1} + \dots + \frac{A_{p_1}^1}{(x - x_1)^{p_1}} \\ &+ \dots + \frac{A_1^k}{x - x_k} + \dots + \frac{A_{p_k}^k}{(x - x_k)^{p_k}} \\ &+ \frac{B_1^1 x + C_1^1}{x^2 + \alpha_1 x + \beta_1} + \dots + \frac{B_{q_1}^1 x + C_{q_1}^1}{(x^2 + \alpha_1 x + \beta_1)^{q_1}} + \dots \\ &+ \frac{B_1^l x + C_1^l}{x^2 + \alpha_l x + \beta_l} + \dots + \frac{B_{q_l}^l x + C_{q_l}^l}{(x^2 + \alpha_l x + \beta_l)^{q_l}} \end{aligned}$$

pro všechna  $x \in \mathbb{R}$  splňující  $Q(x) \neq 0$ .

Důkaz. Důkaz nebyl, nebude zkoušen.  $\square$

**Poznámka** (postup při integraci racionální funkce). Nechť je zadána racionální funkce  $R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ , kde  $P$  a  $Q$  jsou polynomy,  $Q \neq 0$ . Při výpočtu primitivní funkce  $\int R(x) dx$  na libovolném intervalu  $I$ , který neobsahuje žádný z kořenů polynomu  $Q$ , pak postupujeme podle následující osnovy:

1. krok: vyjádříme funkci  $R(x)$  ve tvaru  $R(x) = P_1(x) + \frac{P_2(x)}{Q(x)}$ , kde  $\text{st } P_2 < \text{st } Q$  pro všechna  $x \in \mathbb{R}$ ,  $Q(x) \neq 0$ ;
2. krok: provedeme rozklad funkce  $\frac{P_2(x)}{Q(x)}$  na parciální zlomky podle Věty 2.8;
3. krok: integrujeme jednotlivé parciální zlomky podle následujícího návodu.

(a) Je-li

$$I = \int \frac{A}{(x-a)^n} dx,$$

kde  $A \in \mathbb{R}$  a  $n \in \mathbb{N}$ , pak

$$I \stackrel{c}{=} \begin{cases} \frac{1}{1-n} \frac{A}{(x-a)^{n-1}}, & x \in (-\infty, a) \text{ nebo } x \in (a, \infty), \text{ je-li } n > 1; \\ A \log |x-a|, & x \in (-\infty, a) \text{ nebo } x \in (a, \infty), \text{ je-li } n = 1. \end{cases}$$

(b) Je-li

$$I = \int \frac{Bx + C}{(x^2 + \alpha x + \beta)^q} dx,$$

kde  $q \in \mathbb{N}$ ,  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  a  $\beta - \frac{1}{4}\alpha^2 > 0$ , pak nejprve vyjádříme  $I$  ve tvaru

$$I = \frac{B}{2} \int \frac{2x + \alpha}{(x^2 + \alpha x + \beta)^q} dx + \left(C - \frac{B\alpha}{2}\right) \int \frac{1}{(x^2 + \alpha x + \beta)^q} dx.$$

Označíme-li

$$I_1 = \int \frac{2x + \alpha}{(x^2 + \alpha x + \beta)^q} dx \quad \text{a} \quad I_2 = \int \frac{1}{(x^2 + \alpha x + \beta)^q} dx,$$

potom

$$I_1 \stackrel{c}{=} \begin{cases} \frac{1}{(1-q)(x^2 + \alpha x + \beta)^{q-1}}, & x \in \mathbb{R}, \text{ je-li } q > 1, \\ \log(x^2 + \alpha x + \beta), & x \in \mathbb{R}, \text{ je-li } q = 1. \end{cases}$$

Dále platí

$$I_2 = \int \frac{1}{\left(\left(x + \frac{\alpha}{2}\right)^2 + \beta - \frac{\alpha^2}{4}\right)^q} dx = \frac{1}{\left(\beta - \frac{\alpha^2}{4}\right)^q} \int \frac{1}{\left[\left(\frac{2x + \alpha}{\sqrt{4\beta - \alpha^2}}\right)^2 + 1\right]^q} dx.$$

Pro výpočet posledního integrálu využijeme první větu o substituci. Položíme  $\varphi(x) = \frac{2x + \alpha}{\sqrt{4\beta - \alpha^2}}$ , takže  $\varphi'(x) = \frac{2}{\sqrt{4\beta - \alpha^2}}$ , a obdržíme

$$\int \frac{1}{\left[\left(\frac{x + \frac{\alpha}{2}}{\sqrt{\beta - \frac{\alpha^2}{4}}}\right)^2 + 1\right]^q} dx = \frac{2}{\sqrt{4\beta - \alpha^2}} \int \frac{1}{(y^2 + 1)^q} dy.$$

Pro integrál  $\int \frac{1}{(y^2 + 1)^q} dy$  je k dispozici rekurentní vzorec získaný integrací per partes (důkaz vzorce byl na přenašce předveden a bude zkoušen):

$$\int \frac{1}{(y^2 + 1)^q} dy \stackrel{c}{=} \arctg(y),$$
$$\int \frac{1}{(y^2 + 1)^{q+1}} dy = \frac{y}{2q(y^2 + 1)^q} + \frac{2q-1}{2q} \int \frac{1}{(y^2 + 1)^q} dy, \quad q > 1.$$

**konec 6. přednášky (6.3.2024)**

### 2.3. Některé užitečné substituce

**Poznámka** (racionalisace integrálů s exponenciálou a s logaritmem). Ať  $R$  je racionální funkce.

(a) Pro převod integrálů tvaru  $\int R(e^{at}) dt$  (kde  $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ ) na integraci racionální funkce lze využít substituci  $\varphi(t) = e^{at}$ .

(b) Pro převod integrálů tvaru  $\int \frac{R(\log t)}{t} dt$  na integraci racionální funkce lze využít substituci  $\varphi(t) = \log t$ .

**Značení.** Ve zbytku této kapitoly budeme symbolem  $R(x, y)$  značit *racionální funkci dvou proměnných*, tj.  $R(x, y) = \frac{P(x, y)}{Q(x, y)}$ , kde

$$P(x, y) = \sum_{i, j=0}^{N_1} a_{ij} x^i y^j, \quad Q(x, y) = \sum_{i, j=0}^{N_2} b_{ij} x^i y^j.$$

**Poznámka** (racionalisace trigonometrických integrálů). Pro převod integrálů tvaru  $\int R(\sin x, \cos x) dx$  na integraci racionální funkce lze využít jedné z následujících substitucí:

(a) vždy lze užít substituci  $t = \operatorname{tg}(\frac{x}{2})$ ,  $x \in (-\pi, \pi) + 2k\pi$  ( $k \in \mathbb{Z}$ ),

(b) pokud  $R(a, -b) = -R(a, b)$ , lze užít substituci  $t = \sin x$ ,  $x \in \mathbb{R}$ ,

(c) pokud  $R(-a, b) = -R(a, b)$ , pak lze užít substituci  $t = \cos x$ ,  $x \in \mathbb{R}$ ,

(d) pokud  $R(-a, -b) = R(a, b)$ , pak lze užít substituci  $t = \operatorname{tg} x$ ,  $x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) + k\pi$  ( $k \in \mathbb{Z}$ ).

**konec 7. přednášky (12.3.2024)**

**Poznámka** (racionalisace integrálů s odmocninou). Nechť  $q \in \mathbb{N}$ ,  $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ ,  $ad \neq bc$ . Potom pro převod integrálů tvaru  $\int R(x, (\frac{ax+b}{cx+d})^{\frac{1}{q}}) dx$ , na integraci racionální funkce lze využít substituci  $t = (\frac{ax+b}{cx+d})^{\frac{1}{q}}$ .

**Poznámka** (racionalisace integrálů tvaru  $\int R(x, \sqrt{ax^2 + bx + c}) dt$ ). Nechť  $a, b, c \in \mathbb{R}$ ,  $a \neq 0$ . Potom pro převod integrálů tvaru  $\int R(x, \sqrt{ax^2 + bx + c}) dx$  na integraci racionální funkce rozlišujeme následující případy:

(a) Nechť má trojčlen  $ax^2 + bx + c$  dvojnásobný reálný kořen  $\alpha$  a platí  $ax^2 + bx + c = a(x - \alpha)^2$ . Má-li mít úloha smysl, musí platit  $a > 0$ . Pak ale

$$\sqrt{ax^2 + bx + c} = \sqrt{a}|x - \alpha|.$$

(b) Nechť má trojčlen  $ax^2 + bx + c$  dva různé reálné kořeny  $\alpha_1, \alpha_2$ ,  $\alpha_1 < \alpha_2$  a platí  $ax^2 + bx + c = a(x - \alpha_1)(x - \alpha_2)$ . Je-li  $a > 0$ , pak pro  $t \in (-\infty, \alpha_1)$  a  $t \in (\alpha_2, \infty)$  platí

$$\begin{aligned} \sqrt{ax^2 + bx + c} &= \sqrt{a(x - \alpha_1)(x - \alpha_2)} \\ &= \sqrt{a}|x - \alpha_1| \sqrt{\frac{x - \alpha_2}{x - \alpha_1}}. \end{aligned}$$

Je-li  $a < 0$ , pak pro  $x \in (\alpha_1, \alpha_2)$  platí

$$\begin{aligned} \sqrt{ax^2 + bx + c} &= \sqrt{(-a)(x - \alpha_1)(\alpha_2 - x)} \\ &= \sqrt{-a}(x - \alpha_1) \sqrt{\frac{\alpha_2 - x}{x - \alpha_1}}. \end{aligned}$$

V obou případech jsme tedy zadání převedli na úlohu nalézt primitivní funkci  $\int R(x, (\frac{ax+b}{cx+d})^{\frac{1}{q}}) dx$ , jejíž řešení již známe. Povšimněme si, že v obou případech je splněna podmínka  $ad \neq bc$ , neboť v prvním případě platí  $ad = -\alpha_1$  a  $bc = -\alpha_2$ , zatímco ve druhém případě platí  $ad = \alpha_1$  a  $bc = \alpha_2$ .

(c) Polynom  $ax^2 + bx + c$  nemá reálné kořeny, nebo má dva různé reálné kořeny. Má-li mít úloha smysl, musí platit  $a > 0$  a  $c > 0$ . V tomto případě lze užít takzvanou *Eulerovu substituci*  $t = \pm\sqrt{ax} + \sqrt{ax^2 + bx + c}$ .

**konec 8. přednášky (13.3.2024)**

**Fakt 2.9.** Jsou-li  $a > 0$ ,  $b, c \in \mathbb{R}$  taková, že  $b^2 - 4ac \neq 0$ , pak funkce  $\psi(x) := \pm\sqrt{ax} + \sqrt{ax^2 + bx + c}$  definovaná na množině  $\{x \in \mathbb{R}; ax^2 + bx + c > 0\}$  je prostá na každém intervalu  $I$  svého definičního oboru a označíme-li  $\varphi := (\psi|_I)^{-1}$ , pak  $\varphi(t) = \frac{t^2 - c}{b \pm 2\sqrt{at}}$  má nenulovou vlastní derivaci na svém definičním oboru danou předpisem  $\varphi'(t) = 2 \frac{\pm\sqrt{at^2 + bt} \pm \sqrt{ac}}{(b \pm 2\sqrt{at})^2}$ .

*Důkaz.* Důkaz byl přednesen na přednášce a bude zkoušen. □

Z výše uvedeného faktu vyplývá, že Eulerovu substituci můžeme použít kdykoliv  $a > 0$  a  $b^2 - 4ac \neq 0$  a že v takovém případě jsou předpoklady 2. věty o substituci automaticky splněny (kde  $x = \varphi(t)$  a  $dx = \varphi'(t) dt$ ).



### 3. Newtonův, Riemannův a Riemannův-Stieltjesův integrál

#### 3.1. Newtonův integrál

**Definice.** Necht'  $a, b \in \mathbb{R}^*$ ,  $a < b$ . Řekneme, že *Newtonův integrál z funkce  $f$  na intervalu  $(a, b)$  existuje*, jestliže

- $f$  má na  $(a, b)$  primitivní funkci (označme ji  $F$ ),
- existují limity  $\lim_{x \rightarrow a^+} F(x)$  a  $\lim_{x \rightarrow b^-} F(x)$  (nikoli nutně vlastní);
- rozdíl těchto dvou limit je definován jako prvek množiny  $\mathbb{R}^*$ .

Hodnotou Newtonova integrálu z funkce  $f$  na intervalu  $(a, b)$  pak rozumíme prvek

$$(N) \int_a^b f(x) dx = \lim_{x \rightarrow b^-} F(x) - \lim_{x \rightarrow a^+} F(x).$$

Pokud  $a > b$ , pak klademe  $(N) \int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx$ . Pro  $a \in \mathbb{R}^*$  definujeme  $(N) \int_a^a f(x) dx = 0$ . Jestliže  $(N) \int_a^b f(x) dx$  existuje vlastní, pak říkáme, že integrál je *konvergentní*. Není-li integrál konvergentní, říkáme, že je *divergentní*.

**Poznámka.** Necht'  $a, b \in \mathbb{R}^*$ ,  $a < b$ , a necht'  $f$  je funkce definovaná na intervalu  $(a, b)$ . Pak nastává právě jedna z následujících možností:

$$(N) \int_a^b f(x) dx \begin{cases} \text{neexistuje,} \\ \text{existuje} \begin{cases} = \infty, \\ = -\infty, \\ \in \mathbb{R}. \end{cases} \end{cases}$$

**Značení.** Necht'  $a, b \in \mathbb{R}^*$ ,  $a < b$ . Množinu všech funkcí  $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ , které mají na intervalu  $(a, b)$  konvergentní Newtonův integrál, značíme symbolem  $\mathcal{N}(a, b)$ .

**Úmluva.** Je-li  $(a, b) \subset D(f)$ , pak symbol  $f \in \mathcal{N}(a, b)$  znamená  $f|_{(a,b)} \in \mathcal{N}(a, b)$ .

**Značení.** Necht' funkce  $F$  je definovaná na  $(a, b)$  a existují (vlastní nebo nevlastní) jednostranné limity  $\lim_{x \rightarrow a^+} F(x)$  a  $\lim_{x \rightarrow b^-} F(x)$ . Potom budeme značit  $F(a+) = \lim_{x \rightarrow a^+} F(x)$ ,  $F(b-) = \lim_{x \rightarrow b^-} F(x)$  a  $[F]_a^b = F(b-) - F(a+)$ , pokud má rozdíl smysl. Budeme občas psát  $\int$  místo  $(N) \int$ .

**Příklad.**

$$(N) \int_0^1 x^\alpha dx = \begin{cases} [\frac{1}{\alpha+1} x^{\alpha+1}]_0^1 = \frac{1}{\alpha+1}, & \alpha \in (-1, \infty) \quad (\text{konverguje}), \\ [\frac{1}{\alpha+1} x^{\alpha+1}]_0^1 = \infty, & \alpha \in (-\infty, -1) \quad (\text{diverguje}), \\ [\log x]_0^1 = \infty, & \alpha = -1 \quad (\text{diverguje}). \end{cases}$$

$$(N) \int_1^\infty x^\alpha dx = \begin{cases} [\frac{1}{\alpha+1} x^{\alpha+1}]_1^\infty = \infty, & \alpha \in (-1, \infty) \quad (\text{diverguje}), \\ [\frac{1}{\alpha+1} x^{\alpha+1}]_1^\infty = \frac{-1}{\alpha+1}, & \alpha \in (-\infty, -1) \quad (\text{konverguje}), \\ [\log x]_1^\infty = \infty, & \alpha = -1 \quad (\text{diverguje}). \end{cases}$$

**Značení.** Nemůže-li dojít ke zmatení, píšeme  $\int_a^b f$  místo  $(N) \int_a^b f(x) dx$ .

konec 9. přednášky (19.3.2024)

**Věta 3.1** (vlastnosti Newtonova integrálu). *Nechť  $a, b \in \mathbb{R}^*$ ,  $a < b$ .*

(a) *Pro  $\alpha \in \mathbb{R}$  platí následující rovnosti, pokud pravé strany rovností mají smysl*

$$\int_a^b f + g = \int_a^b f + \int_a^b g, \quad \int_a^b \alpha f = \alpha \int_a^b f.$$

(b) *Jestliže  $f, g \in \mathcal{N}(a, b)$  a  $f \leq g$ , pak  $\int_a^b f \leq \int_a^b g$ .*

(c) *At  $f \in \mathcal{N}(a, b)$  a  $m \leq f(x) \leq M$  pro  $x \in [a, b]$ . Pak*

$$m(b-a) \leq \int_a^b f \leq M(b-a).$$

(d) *Jestliže  $f \in \mathcal{N}(a, b) \cap \mathcal{C}((a, b))$ , pak  $\int_a^b |f|$  existuje a  $|\int_a^b f| \leq \int_a^b |f|$ .*

(e) *Nechť  $a, b, c \in \mathbb{R}^*$ ,  $a < b < c$ . Jestliže  $f \in \mathcal{N}(a, c)$ , pak  $f \in \mathcal{N}(a, b) \cap \mathcal{N}(b, c)$  a platí*

$$\int_a^c f = \int_a^b f + \int_b^c f.$$

(f) *Nechť  $a, b, c \in \mathbb{R}^*$ ,  $a < b < c$ . Nechť  $f$  je spojitá v  $b$ . Pak  $f \in \mathcal{N}(a, b) \cap \mathcal{N}(b, c) \Leftrightarrow f \in \mathcal{N}(a, c)$ .*

(g) *At  $f \in \mathcal{N}(a, b)$ . At  $\{a_n\}, \{b_n\}$  jsou posloupnosti z  $(a, b)$  splňující  $\lim a_n = a$ ,  $\lim b_n = b$ . Pak*

$$\int_a^b f = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{a_n}^{b_n} f.$$

(h) *At  $f \in \mathcal{N}(a, b)$ ,  $c \in (a, b)$ . Pak  $(x \mapsto \int_c^x f(t) dt)' = f(x)$  pro  $x \in (c, b)$ .*

*Důkaz.* Důkaz byl přednesen na přednášce a bude zkoušen. □

**Věta 3.2** (per partes pro Newtonův integrál). *Nechť  $a, b \in \mathbb{R}^*$ ,  $a < b$ , a nechť  $f$  a  $g$  jsou funkce definované na  $(a, b)$ . Nechť  $F$  je primitivní funkce k funkci  $f$  na  $(a, b)$  a  $G$  je primitivní funkce k funkci  $g$  na  $(a, b)$ . Potom platí*

$$\int_a^b Fg = [FG]_a^b - \int_a^b fG,$$

*jestliže má pravá strana smysl.*

*Důkaz.* Důkaz nebyl, nebude zkoušen. □

**Věta 3.3** (substituce pro Newtonův integrál). *Nechť  $a, b, \alpha, \beta \in \mathbb{R}^*$ ,  $a < b$  a  $\alpha < \beta$ . Nechť  $f$  je funkce definovaná na  $(a, b)$  a nechť  $\varphi$  je funkce definovaná na  $(\alpha, \beta)$ . Nechť  $\varphi$  má vlastní nenulovou derivaci na  $(\alpha, \beta)$  a nechť platí  $\varphi((\alpha, \beta)) = (a, b)$ . Potom*

$$\int_a^b f = \int_\alpha^\beta (f \circ \varphi) |\varphi'|,$$

*má-li alespoň jedna strana smysl.*

*Důkaz.* Důkaz nebyl, nebude zkoušen. □

**konec 10. přednášky (20.3.2024)**

### 3.2. Riemannův integrál

**Definice.** Konečnou posloupnost  $\{x_j\}_{j=0}^n$  nazýváme **dělením intervalu**  $[a, b]$ , jestliže platí

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b.$$

Body  $x_0, \dots, x_n$  nazýváme **dělicími body**. **Normou dělení**  $D = \{x_j\}_{j=0}^n$  rozumíme číslo

$$\nu(D) = \max\{x_j - x_{j-1}; j = 1, \dots, n\}.$$

**Definice.** Necht  $f$  je omezená funkce definovaná na intervalu  $[a, b]$  a  $D = \{x_j\}_{j=0}^n$  je dělení  $[a, b]$ . Označme

$$\overline{S}(f, D) = \sum_{j=1}^n M_j(x_j - x_{j-1}), \text{ kde } M_j = \sup\{f(x); x \in [x_{j-1}, x_j]\},$$

$$\underline{S}(f, D) = \sum_{j=1}^n m_j(x_j - x_{j-1}), \text{ kde } m_j = \inf\{f(x); x \in [x_{j-1}, x_j]\},$$

$$\int_a^b f(x) dx = \inf\{\overline{S}(f, D); D \text{ je dělení intervalu } [a, b]\},$$

$$\int_a^b f(x) dx = \sup\{\underline{S}(f, D); D \text{ je dělení intervalu } [a, b]\}.$$

**Definice.** Řekneme, že omezená funkce  $f$  na intervalu  $[a, b]$ ,  $a < b$ , má **Riemannův integrál od  $a$  do  $b$** , pokud  $\int_a^b f(x) dx = \int_a^b f(x) dx$ . Hodnota integrálu  $f$  od  $a$  do  $b$  je rovna této společné hodnotě. Značíme ji  $(R) \int_a^b f$ . Nemůže-li dojít ke zmatení, píšeme  $\int_a^b f$  místo  $(R) \int_a^b f(x) dx$ . Jestliže  $a > b$ , definujeme  $\int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx$ . V případě, že  $a = b$ , definujeme  $\int_a^b f(x) dx = 0$ .

**Poznámka.** Necht  $f$  je omezená funkce definovaná na intervalu  $[a, b]$ , která má Riemannův integrál od  $a$  do  $b$ . Pak hodnotu integrálu můžeme určit následujícím způsobem.

- pro každé  $n \in \mathbb{N}$  zvolíme dělení  $D_n = \{x_{n,k}\}_{k=1}^{k_n}$  tak, že  $\lim_{n \rightarrow \infty} \nu(D_n) = 0$ ;
- pro každé  $n \in \mathbb{N}$  a  $i \in \{1, \dots, k_n\}$  zvolíme  $c_{n,i} \in [x_{n,i-1}, x_{n,i}]$ ;

$$\text{Pak } \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^{k_n} f(c_{n,i})(x_{n,i} - x_{n,i-1}) = \int_a^b f(x) dx.$$

**Definice.** Necht  $a, b \in \mathbb{R}$ . Množinu všech funkcí, které mají Riemannův integrál od  $a$  do  $b$ , značíme  $\mathcal{R}([a, b])$ . Pokud  $[a, b] \subset D(f)$ , potom symbol  $f \in \mathcal{R}([a, b])$  znamená, že  $f|_{[a,b]} \in \mathcal{R}([a, b])$ .

**Příklady.** (a) Existuje omezená funkce na  $[0, 1]$ , která není Riemannovsky integrovatelná (například charakteristická funkce racionálních čísel).

*Důkaz.* Důkaz byl přednesen na přednášce a bude zkoušen. □

#### konec 11. přednášky (26.3.2024)

(b) Existuje funkce, která je Riemannovsky integrovatelná, ale není Newtonovsky integrovatelná (například  $|\operatorname{sgn} x|$  na intervalu  $[-1, 1]$ ).

*Důkaz.* Důkaz byl přednesen na přednášce a bude zkoušen. □

(c) Existuje funkce, která je Newtonovsky integrovatelná, ale není Riemannovsky integrovatelná (například  $\frac{1}{\sqrt{x}}$  na intervalu  $(0, 1]$  dodefinovaná libovolnou hodnotou v bodě 0).

*Důkaz.* Důkaz byl přednesen na přednášce a bude zkoušen. □

**Věta 3.4** (spojitost a Riemannův integrál). *Nechť  $f \in \mathcal{C}([a, b])$ . Potom  $f \in \mathcal{R}([a, b])$ .*

*Důkaz.* Důkaz nebyl, nebude zkoušen. □

**Věta 3.5** (vztah Riemannova a Newtonova integrálu). *Nechť  $a, b \in \mathbb{R}$ ,  $a < b$ , a nechť  $f \in \mathcal{R}([a, b]) \cap \mathcal{N}(a, b)$ . Potom*

$$(R) \int_a^b f(x) dx = (N) \int_a^b f(x) dx.$$

*Důkaz.* Důkaz byl přednesen na přednášce a bude zkoušen. Část, která nebyla dokázána je následující

**Fakt:** Pokud  $f \in \mathcal{R}([a, b])$ , pak pro každé  $\varepsilon > 0$  existuje  $\delta > 0$  splňující, že kdykoliv  $D = \{x_i\}_{i=0}^n$  je dělení  $[a, b]$  a  $\nu(D) < \delta$  a kdykoliv zvolíme  $t_i \in [x_{i-1}, x_i]$ ,  $i = 1, \dots, n$ , pak

$$\left| (R) \int_a^b f(x) dx - \sum_{i=1}^n f(t_i)(x_i - x_{i-1}) \right| < \varepsilon.$$

□

**Důsledek 3.6** (spojitost a existence Riemannova a Newtonova integrálu). *Nechť  $f \in \mathcal{C}([a, b])$ . Potom  $f \in \mathcal{R}([a, b]) \cap \mathcal{N}(a, b)$  a*

$$(R) \int_a^b f(x) dx = (N) \int_a^b f(x) dx.$$

*Důkaz.* Důkaz byl přednesen na přednášce a bude zkoušen. □

### 3.3. Konvergence Newtonova integrálu

**Věta 3.7** (vztah spojitosti a konvergence Newtonova integrálu). *Nechť  $a, b \in \mathbb{R}$  a  $f \in \mathcal{C}((a, b))$  je omezená. Potom  $f \in \mathcal{N}(a, b)$ .*

*Speciálně, pokud  $f \in \mathcal{C}((a, b))$ ,  $f(a+) \in \mathbb{R}$  a  $f(b-) \in \mathbb{R}$ , pak  $f \in \mathcal{N}(a, b)$ .*

*Důkaz.* Důkaz nebyl, nebude zkoušen. □

**konec 12. přednášky (27.3.2024)**

**Věta 3.8** (srovnávací kritérium pro konvergenci Newtonova integrálu). *Nechť  $a \in \mathbb{R}$ ,  $b \in \mathbb{R}^*$  a nechť  $a < b$ . Nechť funkce  $f, g : [a, b) \rightarrow \mathbb{R}$  splňují  $0 \leq f(x) \leq g(x)$  pro každé  $x \in [a, b)$ . Nechť je  $f \in \mathcal{C}([a, b))$  a  $g \in \mathcal{N}(a, b)$ . Potom  $f \in \mathcal{N}(a, b)$ .*

*Důkaz.* Důkaz byl přednesen na přednášce a bude zkoušen. □

**Věta 3.9** (limitní srovnávací kritérium pro konvergenci Newtonova integrálu). *Nechť  $a \in \mathbb{R}$ ,  $b \in \mathbb{R}^*$ ,  $a < b$ . Nechť  $f, g$  jsou spojité nezáporné funkce na  $[a, b)$ . Jestliže  $\lim_{x \rightarrow b-} \frac{f(x)}{g(x)} \in (0, \infty)$ , pak  $f \in \mathcal{N}(a, b)$  právě tehdy, když  $g \in \mathcal{N}(a, b)$ .*

*Důkaz.* Důkaz byl přednesen na přednášce a bude zkoušen. □

**Poznámka.** Tvrzení Vět 3.8 a 3.9 platí s příslušnými úpravami i pro intervaly typu  $(a, b]$ .

**Věta 3.10** (vztah absolutní konvergence a konvergence Newtonova integrálu). *Nechť  $a, b \in \mathbb{R}^*$ ,  $a < b$ , a nechť je dána funkce  $f \in \mathcal{C}((a, b))$  splňující  $|f| \in \mathcal{N}(a, b)$ . Potom  $f \in \mathcal{N}(a, b)$ .*

*Důkaz.* Důkaz byl přednesen na přednášce a bude zkoušen. □

**konec 13. přednášky (2.4.2024)**

**Věta 3.11** (Abelovo-Dirichletovo kritérium konvergence Newtonova integrálu). *Nechť  $a \in \mathbb{R}$ ,  $b \in \mathbb{R}^*$ ,  $a < b$ . Nechť  $f, g \in \mathcal{C}([a, b])$  a  $g$  je monotónní na  $[a, b]$ . Nechť  $F$  je primitivní funkce k funkci  $f$  na  $(a, b)$ .*

(a) *Jestliže  $f \in \mathcal{N}(a, b)$  a  $g$  je omezená na  $[a, b]$ , potom  $fg \in \mathcal{N}(a, b)$ .*

(b) *Jestliže  $F$  je omezená na  $(a, b)$  a  $\lim_{x \rightarrow b^-} g(x) = 0$ , potom  $fg \in \mathcal{N}(a, b)$ .*

*Důkaz.* Důkaz nebyl, nebude zkoušen. □

**Poznámka.** Tvrzení Věty 3.11 platí s příslušnými úpravami i pro intervaly typu  $(a, b]$ .

konec 14. přednášky (3.4.2024)

### 3.4. Riemannův-Stieltjesův integrál

**Úmluva.** V této sekci  $[a, b]$  značí omezený interval,  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  a  $\varphi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  jsou omezené funkce.

Následující definice je přímočaým zobecněním Riemannova integrálu.

**Definice.** Nechť  $D = \{x_j\}_{j=0}^n$  je dělení  $[a, b]$  a  $\varphi : [a, b]$  je neklesající. Označme

$$\overline{S}(f, D, \varphi) = \sum_{j=1}^n M_j(\varphi(x_j) - \varphi(x_{j-1})), \text{ kde } M_j = \sup\{f(x); x \in [x_{j-1}, x_j]\},$$

$$\underline{S}(f, D, \varphi) = \sum_{j=1}^n m_j(\varphi(x_j) - \varphi(x_{j-1})), \text{ kde } m_j = \inf\{f(x); x \in [x_{j-1}, x_j]\},$$

$$\overline{\int_a^b} f(x) d\varphi(x) = \inf\{\overline{S}(f, D, \varphi); D \text{ je dělením intervalu } [a, b]\},$$

$$\underline{\int_a^b} f(x) d\varphi(x) = \sup\{\underline{S}(f, D, \varphi); D \text{ je dělením intervalu } [a, b]\}.$$

Řekneme, že  $f$  má **Riemannův-Stieltjesův integrál od  $a$  do  $b$  vzhledem k funkci  $\varphi$** , pokud  $\overline{\int_a^b} f(x) d\varphi(x) = \underline{\int_a^b} f(x) d\varphi(x)$ . Hodnota integrálu  $f$  od  $a$  do  $b$  vzhledem k funkci  $\varphi$  je rovna této společné hodnotě. Značíme ji  $(RS) \int_a^b f d\varphi(x)$ .

Tuto definici je ale možné dále zobecnit.

**Definice.** Nechť  $D = \{x_j\}_{j=0}^n$  je dělení  $[a, b]$  a  $c_j \in [x_{j-1}, x_j]$  pro  $j = 1, \dots, n$ . Pak *Riemannova-Stieltjesova suma*  $S(f, D, \varphi, (c_j)_{j=1}^n)$  je definována jako

$$S(f, D, \varphi, (c_j)_{j=1}^n) = \sum_{j=1}^n f(c_j)(\varphi(x_j) - \varphi(x_{j-1})).$$

Většinou místo  $S(f, D, \varphi, (c_j)_{j=1}^n)$  píšeme kratší zápis  $S(f, D, \varphi)$ .

**Fakt 3.12.** *Nechť  $\varphi$  je neklesající a  $A \in \mathbb{R}$ . Pak  $(RS) \int_a^b f d\varphi(x) = A$  právě tehdy, když pro každé  $\varepsilon > 0$  existuje  $D$  dělení  $[a, b]$  takové, že kdykoliv  $D' \supset D$  je dělení  $[a, b]$  a kdykoliv  $S(f, D', \varphi)$  je Riemannova-Stieltjesova suma, pak  $|S(f, D', \varphi) - A| < \varepsilon$ .*

*Důkaz.* Důkaz nebyl, nebude zkoušen. □

Tento fakt nás motivuje k následující definici.

**Definice.** Řekneme, že  $f$  má **Riemannův-Stieltjesův integrál od  $a$  do  $b$  vzhledem k funkci  $\varphi$**  (kde  $\varphi$  není nutně neklesající), pokud existuje  $A \in \mathbb{R}$  takové, že pro každé  $\varepsilon > 0$  existuje  $D$  dělení  $[a, b]$  takové, že kdykoliv  $D' \supset D$  je dělení  $[a, b]$  a kdykoliv  $S(f, D', \varphi)$  je Riemannova-Stieltjesova suma, pak  $|S(f, D', \varphi) - A| < \varepsilon$ .

V takovém případě je číslo  $A$  určeno jednoznačně, značíme jej  $(RS) \int_a^b f d\varphi(x)$  a říkáme, že  $(RS) \int_a^b f d\varphi(x)$  je **Riemannův-Stieltjesův integrál od  $a$  do  $b$  vzhledem k funkci  $\varphi$** . Nemůže-li dojít ke zmatení, píšeme  $\int_a^b f d\varphi(x)$  místo  $(RS) \int_a^b f(x) d\varphi(x)$ . Jestliže  $a > b$ , definujeme  $\int_a^b f(x) d\varphi(x) = -\int_b^a f(x) d\varphi(x)$ . V případě, že  $a = b$ , definujeme  $\int_a^b f(x) d\varphi(x) = 0$ .

**Definice.** Množinu všech funkcí, které mají Riemannův-Stieltjesův integrál od  $a$  do  $b$  vzhledem k funkci  $\varphi$ , značíme  $\mathcal{RS}_\varphi([a, b])$ . Pokud  $[a, b] \subset D(f)$ , potom symbol  $f \in \mathcal{RS}_\varphi([a, b])$  znamená, že  $f|_{[a, b]} \in \mathcal{RS}_\varphi([a, b])$ .

**Věta 3.13** (bilinearita RS integrálu). (i) Je-li  $f, g \in \mathcal{RS}_\varphi([a, b])$  a  $c, d \in \mathbb{R}$ , pak  $cf + dg \in \mathcal{RS}_\varphi([a, b])$  a platí

$$\int_a^b (cf + dg)(x) d\varphi(x) = c \int_a^b f(x) d\varphi(x) + d \int_a^b g(x) d\varphi(x).$$

(ii) Jestliže  $\psi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  je omezená funkce,  $f \in \mathcal{RS}_\varphi([a, b]) \cap \mathcal{RS}_\psi([a, b])$  a  $c, d \in \mathbb{R}$ , pak  $f \in \mathcal{RS}_{c\varphi + d\psi}([a, b])$  a platí

$$\int_a^b f(x) d(c\varphi + d\psi)(x) = c \int_a^b f(x) d\varphi(x) + d \int_a^b f(x) d\psi(x).$$

*Důkaz.* Důkaz byl přednesen na přednášce a bude zkoušen. □

**Věta 3.14** (aditivita RS integrálu vzhledem k intervalům). Nechť  $c \in (a, b)$ . Pak  $f \in \mathcal{RS}_\varphi([a, b])$  právě tehdy, když  $f \in \mathcal{RS}_\varphi([a, c]) \cap \mathcal{RS}_\varphi([c, b])$  a pokud  $f \in \mathcal{RS}_\varphi([a, b])$  pak platí

$$\int_a^b f(x) d\varphi(x) = \int_a^c f(x) d\varphi(x) + \int_c^b f(x) d\varphi(x).$$

*Důkaz.* Na přednášce byl ukázán důkaz jen jedné implikace a tento bude zkoušen. □

**Věta 3.15** (spojitost a RS integrál). Nechť navíc  $\varphi$  je neklesající. Jestliže množina bodů nespojitosti funkce  $f$  je konečná a je-li v každém z těchto bodů funkce  $\varphi$  spojitá, pak  $f \in \mathcal{RS}_\varphi([a, b])$ .

*Důkaz.* Důkaz nebyl, nebude zkoušen. □

**Poznámka.** Speciálně, je-li  $f$  spojitá až na konečně mnoho bodů, pak existuje Riemannův integrál funkce  $f$ . Jedná se tedy o zesílení a zobecnění věty 3.4.

**Důsledek 3.16.** Nechť  $f \in \mathcal{C}([a, b])$  a  $\varphi$  je monotónní. Pak  $f \in \mathcal{RS}_\varphi([a, b])$ .

*Důkaz.* Důkaz byl přednesen na přednášce a bude zkoušen. □

**Věta 3.17** (per partes pro RS integrál). Funkce  $f$  má Riemannův-Stieltjesův integrál od  $a$  do  $b$  vzhledem k funkci  $\varphi$  právě tehdy, když funkce  $\varphi$  má Riemannův-Stieltjesův integrál od  $a$  do  $b$  vzhledem k funkci  $f$  a pokud oba integrály existují pak

$$\int_a^b f(x) d\varphi(x) = [f(x)\varphi(x)]_a^b - \int_a^b \varphi(x) df(x),$$

kde symbol  $[f(x)\varphi(x)]_a^b$  značí rozdíl  $f(b)\varphi(b) - f(a)\varphi(a)$ .

*Důkaz.* Důkaz nebyl, nebude zkoušen. □

**Důsledek 3.18.** Nechť  $f$  je monotónní a  $\varphi \in \mathcal{C}([a, b])$ . Pak  $f \in \mathcal{RS}_\varphi([a, b])$ .

*Důkaz.* Důkaz byl přednesen na přednášce a bude zkoušen. □

**Poznámka.** Speciálně, je-li  $f$  monotónní, pak existuje Riemannův integrál funkce  $f$ . To je nový pro nás nový poznatek i pro Riemannův integrál.

### konec 15. přednášky (9.4.2024)

**Věta 3.19** (vztah Riemannova a Riemannova-Stieltjesova integrálu). *Nechť  $f \in \mathcal{R}([a, b])$  a  $\varphi \in \mathcal{C}^1([a, b])$ . Pak  $f\varphi' \in \mathcal{R}([a, b])$ ,  $f \in \mathcal{RS}_\varphi([a, b])$  a platí*

$$(RS) \int_a^b f(x) d\varphi(x) = (R) \int_a^b f(x)\varphi'(x) dx.$$

*Důkaz.* Důkaz nebyl, nebude zkoušen. □

**Lemma 3.20.** *Nechť  $f \in \mathcal{C}([a, b])$  a  $\varphi$  je neklesající. Označme  $m := \min\{f(x) : x \in [a, b]\}$  a  $M := \max\{f(x) : x \in [a, b]\}$ . Pak*

$$m(\varphi(b) - \varphi(a)) \leq \int_a^b f(x) d\varphi(x) \leq M(\varphi(b) - \varphi(a)).$$

*Důkaz.* Důkaz byl přednesen na přednášce a bude zkoušen. □

**Věta 3.21** (integrál a funkce shodné skoro všude). *Nechť  $f \in \mathcal{C}([a, b])$ ,  $\varphi \in \mathcal{C}^1([a, b])$  a  $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  je funkce která je shodná s  $f$  až na konečný počet bodů. Pak  $g \in \mathcal{RS}_\varphi([a, b])$  a platí*

$$\int_a^b f(x) d\varphi(x) = \int_a^b g(x) d\varphi(x).$$

*Důkaz.* Důkaz byl přednesen na přednášce a bude zkoušen. □

### konec 16. přednášky (10.4.2024)

## 3.5. Aplikace určitého integrálu

Teorie integrálu se používá jako teoretický nástroj v matematice, ale také v geometrii, fyzice a v mnoha dalších vědách, kde se matematika aplikuje. Někjaké základní příklady jsou níže.

### (a) Integrální kritérium konvergence řad

*Nechť  $n_0 \in \mathbb{N}$  a  $f \in \mathcal{C}([n_0, +\infty))$  je nezáporná a nerostoucí. Pak  $\int_{n_0}^{\infty} f(x) dx$  konverguje právě tehdy, když  $\sum_{n=n_0}^{\infty} f(n)$  konverguje.*

**Příklad.** Vyšetřete konvergenci řad  $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \log n}$  a  $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \log^2 n}$ .

*Řešení:* první řada diverguje, druhá konverguje

### (b) Obsah podgrafu spojitě funkce

*Nechť  $f \in \mathcal{C}([a, b])$ ,  $f \geq 0$ . Pak obsah podgrafu  $f$  je roven číslu  $\int_a^b f(x) dx$ . Přesněji,*

$$\text{obsah} \left( \{(x, y); x \in [a, b], 0 \leq y \leq f(x)\} \right) = \int_a^b f(x) dx.$$

**Příklad.** Vypočítejte obsah podgrafu funkce  $\sin x$ ,  $x \in [0, \pi]$ .

*Řešení:* 2

(c) **Obsah množiny vytvořené grafy funkcí**

Nechť  $f, g \in \mathcal{C}([a, b])$ . Pak obsah množiny bodů ležících mezi grafy funkcí  $f$  a  $g$  je roven číslu  $\int_a^b |g(x) - f(x)| dx$ . Přesněji,

$$\text{obsah} \left( \{(x, y); x \in [a, b], f(x) \leq y \leq g(x) \text{ nebo } g(x) \leq y \leq f(x)\} \right) = \int_a^b |g(x) - f(x)| dx.$$

**Příklad.** Vypočítejte obsah plochy ohraničené grafy funkcí  $f(x) = x^2$  a  $g(x) = \sqrt{x}$  pro  $x \in [0, 1]$   
*Řešení:*  $\frac{1}{3}$

(d) **Délka grafu funkce**

Nechť  $f \in \mathcal{C}^1([a, b])$ . Pak

$$\text{délka grafu funkce } f = \int_a^b \sqrt{1 + f'(x)^2} dx.$$

**Příklad.** Spočítejte délku křivky  $y = \arcsin x + \sqrt{1 - x^2}$ ,  $x \in (-1, 1)$ .  
*Řešení:* 4

(e) **Změna polohy a ujetá vzdálenost**

Jestliže se bod pohybuje po přímce (např. po ose  $x$ ) a značí-li  $s(t)$  souřadnici bodu v čase  $t$ , je  $s'(t)$  okamžitá rychlost  $v(t)$  v čase  $t$  a  $v'(t) = s''(t)$  okamžité zrychlení v čase  $t$ . Je-li dána závislost rychlosti na čase funkcí  $v(t)$ , není

$$\int_a^b v(t) dt = s(b) - s(a)$$

ujetá vzdálenost, ale změna polohy pohybujícího se bodu. Ujetá délka cesty od okamžiku  $t = a$  do okamžiku  $t = b$  se spočte jako

$$\int_a^b |v(t)| dt.$$

**Příklad.** Vypočítejte dráhu dešťové kapky za prvních 6 sekund, kde okamžitá rychlost (v metrech za sekundu) kapky je dána vzorcem  $v(t) = g \cdot t$ , kde  $g = 9.81$ .

*Řešení:* 176.58 metrů (176.58 = 9.81 · 18)



## 4. Diferenciální rovnice

**Definice.** *Diferenciální rovnici* rozumíme rovnici tvaru

$$F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0, \quad (4.1)$$

kde  $F$  je reálná funkce  $n + 2$  proměnných. *Řád diferenciální rovnice* (4.1) je nejvyšší řád derivace funkce  $y$  vyskytující se v (4.1).

*Řešením diferenciální rovnice* (4.1) rozumíme funkci  $y$  definovanou na nějakém neprázdném otevřeném intervalu  $I$ , která má v každém bodě intervalu  $I$  vlastní  $n$ -tou derivaci a jejíž hodnoty spolu s hodnotami derivací splňují rovnici (4.1) v každém bodě intervalu  $I$ , tj. pro každé  $x \in I$  platí

$$F(x, y(x), y'(x), y''(x), \dots, y^{(n)}(x)) = 0.$$

**Definice.** Je-li funkce  $y$  řešením rovnice (4.1) na intervalu  $I$  a funkce  $\tilde{y}$  řešením rovnice (4.1) na intervalu  $\tilde{I}$ , kde  $I \subset \tilde{I}$ ,  $I \neq \tilde{I}$  a  $y(x) = \tilde{y}(x)$  pro všechna  $x \in I$ , pak říkáme, že řešení  $\tilde{y}$  je *prodloužením řešení*  $y$  na interval  $\tilde{I}$ .

Řešení rovnice (4.1), které nemá prodloužení, nazýváme *maximálním řešením* rovnice (4.1). *Obecným řešením* rozumíme množinu všech maximálních řešení. Maximálnímu řešení někdy také říkáme *partikulární řešení*.

**Definice.** Rovnice tvaru

$$y^{(n)} = f(x, y, y', y'', \dots, y^{(n-1)}),$$

kde  $f$  je reálná funkce  $n + 1$  proměnných, se nazývá *diferenciální rovnice ( $n$ -tého řádu) vyřešená vzhledem k nejvyšší derivaci*.

### 4.1. Obyčejné diferenciální rovnice prvního řádu

**Rovnice se separovanými proměnnými**

**Definice** (Rovnice se separovanými proměnnými). *Diferenciální rovnice se separovanými proměnnými* je rovnice tvaru

$$y' = g(y)h(x). \quad (4.2)$$

**Lemma 4.1** (Lemma o lepení řešení). *Nechť  $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ ,  $a < b$ ,  $c < d$ , nechť  $h : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$  a  $g : (c, d) \rightarrow \mathbb{R}$  jsou spojité funkce,  $x_0 \in (a, b)$  a  $A \in (c, d)$ . Nechť  $y_l$  je řešením diferenciální rovnice (4.2) na intervalu  $(x_0 - \delta, x_0)$  pro nějaké  $\delta > 0$  a  $y_r$  je řešením diferenciální rovnice (4.2) na intervalu  $(x_0, x_0 + \eta)$  pro nějaké  $\eta > 0$ . Nechť platí*

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} y_l(x) = A = \lim_{x \rightarrow x_0^+} y_r(x).$$

*Pak funkce*

$$y(x) := \begin{cases} y_l(x) & x \in (x_0 - \delta, x_0) \\ A & x = x_0 \\ y_r(x) & x \in (x_0, x_0 + \eta) \end{cases}$$

*je řešením rovnice (4.2) na intervalu  $(x_0 - \delta, x_0 + \eta)$ .*

*Důkaz.* Důkaz byl přednesen na přednášce a bude zkoušen. □

**Lemma 4.2.** *Nechť  $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ ,  $a < b$ ,  $c < d$ , nechť  $h : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$  a  $g : (c, d) \rightarrow \mathbb{R}$  jsou spojité funkce,  $g$  je nenulová,  $x_0 \in (a, b)$  a  $y_0 \in (c, d)$ . Označme*

$$H(x) := \int_{x_0}^x h(t) dt, \quad x \in (a, b)$$

a

$$G(y) := \int_{y_0}^y \frac{1}{g(t)} dt, \quad y \in (c, d).$$

*Potom existuje právě jedno maximální řešení  $y$  rovnice (4.2) splňující podmínku  $y(x_0) = y_0$ . Definičním intervalem  $I$  tohoto řešení je maximální interval ze všech intervalů tvaru  $(x_0 - \delta, x_0 + \eta)$ , které splňují  $(x_0 - \delta, x_0 + \eta) \subset (a, b)$  a*

$$H(x) \in G((c, d)), \quad x \in I.$$

*Důkaz.* Na přednášce bylo pouze dokázáno, že pokud existuje maximální řešení jehož definičním oborem je interval  $I$  jako ve znění, pak je toto řešení právě jedno a platí  $y(x) = G^{-1}(H(x))$ ,  $x \in I$ . Tato část důkazu bude zkoušena, zbytek ne.  $\square$

### konec 17. přednášky (16.4.2024)

Metoda řešení pro  $g, h$  spojité na svých definičních oborech.

- (a) Určíme maximální otevřené intervaly obsažené v definičním oboru funkce  $h$ . (Tím máme vymezeny maximální intervaly, na kterých můžeme hledat řešení.)
- (b) Najdeme všechny nulové body funkce  $g$ . Je-li  $g(c) = 0$ , pak na každém intervalu z 1. kroku je funkce  $y(x) = c$  tzv. *singulárním* (též *stacionárním*) řešením rovnice (4.2).
- (c) Určíme maximální otevřené intervaly, na kterých je funkce  $g$  nenulová.
- (d) Vezmeme interval  $I$  z 1. kroku a interval  $J$  z 3. kroku. Tedy  $h$  je na  $I$  spojitá a  $g$  je na  $J$  spojitá a nenulová. Budeme hledat řešení rovnice (4.2), jejichž definiční obor je obsažen v intervalu  $I$  a mají hodnoty v intervalu  $J$ . Je-li  $y$  takové řešení, pak pro každé  $x \in D(y)$  platí

$$\frac{y'(x)}{g(y(x))} = h(x).$$

Nechť  $H$  je primitivní funkce k funkci  $h$  na intervalu  $I$  a  $G$  je primitivní funkce k funkci  $1/g$  na  $J$ . Potom existuje konstanta  $C \in \mathbb{R}$  taková, že platí

$$G(y(x)) = H(x) + C$$

na definičním oboru řešení  $y$ , který nalezneme v následujícím kroku.

- (e) Nyní zafixujeme  $C$  a nalezneme maximální neprázdné otevřené intervaly obsažené v množině

$$\{x \in I; H(x) + C \in G(J)\}.$$

Na každém z těchto intervalů řešení musí mít tvar

$$y(x) = G^{-1}(H(x) + C),$$

kde  $G^{-1}$  značí funkci inverzní k funkci  $G$ . Ta existuje, neboť  $G$  je na intervalu  $J$  buď rostoucí nebo klesající.

- (f) Z řešení nalezených v 5. kroku a singulárních řešení z 2. kroku „slepíme“ všechna maximální řešení rovnice (4.2) pomocí Lemmatu 4.1

## Homogenní rovnice

**Definice** (Homogenní rovnice). *Homogenní diferenciální rovnice 1. řádu* se nazývá rovnice tvaru  $y' = f(x, y)$ , kde pro každé  $\lambda \neq 0$  máme  $f(x, y) = f(\lambda x, \lambda y)$ .

**konec 18. přednášky (17.4.2024)**

Metoda převodu homogenní rovnice na rovnici se separovanými proměnnými.

- (a) Definujme pro  $x \neq 0$  funkci  $z(x) = \frac{y(x)}{x}$ . Pak pro  $x \neq 0$  máme

$$\begin{aligned}y(x) &= xz(x), \\y'(x) &= xz'(x) + z(x).\end{aligned}$$

Rovnice tak přechází na  $xz' + z = f(x, xz) = f(1, z)$ , tj.

$$z' = \frac{1}{x} (f(1, z) - z),$$

což je rovnice se separovanými proměnnými.

- (b) Vyřešíme rovnici se separovanými proměnnými na otevřených podintervalech  $(-\infty, 0)$  a  $(0, \infty)$ . Pak položíme  $y(x) = x \cdot z(x)$ .
- (c) Protože jsme na začátku vyloučili případ  $x = 0$ , je potřeba na závěr ověřit, zda nalezená řešení můžeme prodloužit do počátku.

## Lineární rovnice 1. řádu

**Definice** (Lineární rovnice). *Lineární diferenciální rovnici prvního řádu* rozumíme rovnici tvaru

$$y' + p(x)y = q(x), \quad (4.3)$$

kde  $p, q$  jsou funkce definované na intervalu  $(a, b)$ . Je-li  $q = 0$ , nazývá se rovnice *homogenní*, v opačném případě *nehomogenní*.

Metoda řešení pro  $p, q$  spojitě na svých definičních oborech.

- (a) Obecné řešení homogenní rovnice je tvořeno funkcemi

$$y(x) = Ke^{-P(x)}, \quad x \in (a, b), K \in \mathbb{R},$$

kde  $P$  je primitivní funkce k  $p$  na intervalu  $(a, b)$ .

- (b) Obecné řešení rovnice (4.3) je tvořeno funkcemi

$$y(x) = y_p(x) + Ke^{-P(x)}, \quad x \in (a, b), K \in \mathbb{R},$$

kde  $P$  je primitivní funkce k  $p$  na intervalu  $(a, b)$  a  $y_p(x)$  je libovolné (tzv. “partikulární”) maximální řešení rovnice (4.3).

Navíc, je-li  $c(x)$  primitivní funkce k  $q(x)e^{P(x)}$  na intervalu  $(a, b)$ , pak funkce  $y_p(x) = c(x)e^{-P(x)}$ ,  $x \in (a, b)$  je maximální řešení rovnice (4.3).

- (c) Maximální řešení rovnice (4.3) splňující *počáteční podmínku*  $y(x_0) = y_0$  nalezneme vhodnou volbou konstanty  $K \in \mathbb{R}$ .

Přesněji, pokud je obecné řešení rovnice (4.3) tvaru  $y(x) = y_p(x) + Ke^{-P(x)}$ , pak pro volbu  $K = (y_0 - y_p(x_0))e^{P(x_0)}$  dostáváme, že toto řešení vyhovuje podmínce  $y(x_0) = y_0$ .

*Důkaz.* Podrobné odvození výše popsaného návodu na řešení lineárních diferenciálních rovnic prvního řádu bylo na přednášce předvedeno a bude zkoušeno.  $\square$

**Poznámka.** Pro každé  $x_0 \in (a, b)$  a každé  $y_0 \in \mathbb{R}$  existuje právě jedno maximální řešení rovnice (4.3), které splňuje podmínku  $y(x_0) = y_0$ . Toto řešení je navíc definováno na celém  $(a, b)$ .

**konec 19. přednášky (23.4.2024)**

## 4.2. Obyčejné diferenciální rovnice druhého řádu

### Lineární rovnice 2. řádu

**Definice** (Lineární rovnice 2. řádu). *Lineární diferenciální rovnici druhého řádu* rozumíme rovnici tvaru

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = r(x), \quad (4.4)$$

kde  $p, q, r$  jsou funkce spojité na intervalu  $(a, b)$ .

*Homogenní rovnici* příslušnou k rovnici (4.4) rozumíme rovnici

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0. \quad (4.5)$$

**Věta 4.3** (Existence řešení pro lineární rovnice 2. řádu). *Nechť  $t_0 \in (a, b)$  a  $z_0, z_1 \in \mathbb{R}$ . Pak existuje právě jedno maximální řešení  $y$  rovnice (4.4), které splňuje podmínky  $y(t_0) = z_0, y'(t_0) = z_1$ . Navíc, toto řešení je definováno na celém intervalu  $(a, b)$ .*

*Důkaz.* Důkaz nebyl, nebude zkoušen. □

**Věta 4.4** (Struktura řešení lineární rovnice 2. řádu).

(a) *Obecné řešení rovnice (4.5) tvoří vektorový podprostor prostoru  $C^2((a, b))$  dimenze 2.*

(b) *Nechť  $y_p$  je partikulární řešení rovnice (4.4). Pak obecné řešení rovnice (4.4) je*

$$\{y_h + y_p; y_h \text{ je řešení rovnice (4.5) na intervalu } (a, b)\}.$$

*Důkaz.* Důkaz byl přednesen na přednášce a bude zkoušen. □

### Poznámky.

- Báze prostoru maximálních řešení rovnice (4.5) se nazývá *fundamentální systém řešení* rovnice (4.5).
- Jsou-li funkce  $y_1, y_2$  lineárně nezávislá maximální řešení rovnice (4.5), pak již tvoří fundamentální systém.
- Abychom vyřešili nehomogenní rovnici (4.4), najdeme fundamentální systém  $y_1, y_2$  pro rovnici (4.5) a jedno („partikulární“) řešení  $y_p$  rovnice (4.4). Obecné řešení rovnice (4.4) pak je  $\{y_p + C_1y_1 + C_2y_2; C_1, C_2 \in \mathbb{R}\}$ .

**Věta 4.5** (Obecné řešení homogenní rovnice). *Nechť  $y_1, y_2$  jsou dvě řešení rovnice (4.5) na  $(a, b)$ . Pak následující tvrzení jsou ekvivalentní:*

(a) *Funkce  $y_1, y_2$  jsou lineárně nezávislé;*

(b) *Tzv. Wronského determinant*

$$\begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix}$$

*je nenulový alespoň v jednom bodě intervalu  $(a, b)$  (pak je nenulový v každém bodě  $(a, b)$ ).*

*Důkaz.* Důkaz byl přednesen na přednášce a bude zkoušen (bez části o tom, že pak je Wronského determinant nenulový v každém bodě). □

**konec 20. přednášky (24.4.2024)**

**Věta 4.6** (variacie konstant). *Nechť funkce  $y_1, y_2$  tvoří fundamentální systém řešení rovnice (4.5). Pokud existují funkce  $c_1, c_2$  mající na  $(a, b)$  vlastní derivaci a splňující soustavu rovnic*

$$\begin{aligned} c_1'y_1 + c_2'y_2 &= 0 \\ c_1'y_1' + c_2'y_2' &= r \end{aligned}$$

*na intervalu  $(a, b)$ , pak funkce  $y_p(x) = c_1(x)y_1(x) + c_2(x)y_2(x)$ ,  $x \in (a, b)$  je řešením rovnice (4.4).*

Důkaz. Důkaz byl přednesen na přednášce a bude zkoušen.  $\square$

konec 21. přednášky (30.4.2024)

### Lineární rovnice 2. řádu s konstantními koeficienty

**Definice** (Lineární rovnice 2. řádu s konstantními koeficienty). *Lineární diferenciální rovnici druhého řádu s konstantními koeficienty* rozumíme rovnici tvaru

$$y'' + py' + qy = r(x), \quad (4.6)$$

kde  $p, q \in \mathbb{R}$  a  $r$  je funkce spojitá na intervalu  $(a, b)$ .

*Homogenní rovnici* příslušnou k rovnici (4.6) rozumíme rovnici

$$y'' + py' + qy = 0. \quad (4.7)$$

**Poznámka.** Maximální řešení rovnice (4.7) jsou definována na celém  $\mathbb{R}$ .

**Definice.** *Charakteristickým polynomem* rovnice (4.7) rozumíme polynom

$$\chi(\lambda) := \lambda^2 + p\lambda + q.$$

**Věta 4.7** (tvar fundamentálního systému). *Nechť  $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$  jsou kořeny charakteristického polynomu rovnice (4.7).*

- *Pokud jsou  $\lambda_1, \lambda_2$  různé reálné kořeny, pak fundamentální systém řešení rovnice (4.7) tvoří funkce  $y_1(x) = e^{\lambda_1 x}$  a  $y_2(x) = e^{\lambda_2 x}$ .*
- *Pokud  $\lambda_1 = \lambda_2$ , pak fundamentální systém řešení rovnice (4.7) tvoří funkce  $y_1(x) = e^{\lambda_1 x}$  a  $y_2(x) = xe^{\lambda_1 x}$ .*
- *Pokud jsou  $\lambda_1 = \alpha + \beta i, \lambda_2 = \alpha - \beta i$  různé komplexní kořeny, pak fundamentální systém řešení rovnice (4.7) tvoří funkce  $y_1(x) = e^{\alpha x} \sin(\beta x)$  a  $y_2(x) = e^{\alpha x} \cos(\beta x)$ .*

Důkaz. Důkaz byl přednesen na přednášce a bude zkoušen.  $\square$

**Věta 4.8** (speciální pravá strana). *Nechť*

$$r(x) = e^{ax} \cdot (P(x) \cos bx + Q(x) \sin bx), \quad x \in \mathbb{R},$$

kde  $a, b \in \mathbb{R}$  a  $P, Q$  jsou polynomy. *Pak existuje řešení rovnice (4.6) ve tvaru*

$$y_p(x) = x^m e^{ax} (R(x) \sin bx + S(x) \cos bx), \quad x \in \mathbb{R},$$

kde  $R, S$  jsou polynomy stupně ne většího než  $\max\{\text{st } P, \text{st } Q\}$  a  $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$  udává, jakou násobnost má číslo  $a + bi$  jakožto kořen charakteristického polynomu příslušné homogenní rovnice.

Důkaz. Důkaz nebyl, nebude zkoušen.  $\square$

konec 22. přednášky (7.5.2024)

### 4.3. Aplikace diferenciálních rovnic prvního řádu

**Příklad** (Malthusův populační model). Mějme nějakou izolovanou populaci. Nechť  $p(t)$  je počet jedinců této populace v čase  $t$ . Slovem izolovaná míníme, že nedochází ke stěhování mezi naší populací a vnějším světem. Takovou populací mohou být například bakterie v Petriho misce. Předpokládejme, že přírůstek populace v krátkém čase je přímo úměrný velikosti populace (tj. počet bakterií, které se rozdělí, je přímo úměrný jejich celkovému počtu). To znamená, že existuje konstanta  $a > 0$  taková, že přírůstek za krátký časový úsek  $h$ , tj.  $p(t+h) - p(t)$ , je přibližně roven  $ap(t)h$ . Poněvadž  $p'(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{p(t+h) - p(t)}{h}$ , vede tato přibližná úvaha k diferenciální rovnici

$$p'(t) = a \cdot p(t).$$

Jedná se o homogenní lineární diferenciální rovnici, jejímž obecným řešením je  $p(t) = Ke^{at}$ ,  $t \in \mathbb{R}$  ( $K \in \mathbb{R}$ ). Dosazením  $t = 0$  vidíme, že  $K = p(0)$ , proto má obecné řešení tvar

$$p(t) = p(0)e^{at}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

**Příklad** (Radioaktivní rozpad). Mějme nějakou radioaktivní látku. Nechť  $M(t)$  je množství radioaktivní látky v čase  $t$ . Předpokládejme, že rychlost rozpadu libovolného radioaktivního prvku je přímo úměrná dosud nerozpadlému množství. To znamená, že existuje konstanta  $a > 0$  taková, že úbytek za krátký časový úsek  $h$ , tj.  $M(t+h) - M(t)$ , je přibližně roven  $-aM(t)h$ . Pak podobně jako výše odvodíme, že funkce  $t \mapsto M(t)$  by měla splňovat diferenciální rovnici

$$M'(t) = -aM(t),$$

jejíž obecné řešení má tvar

$$M(t) = M(0) \cdot e^{-at}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

K popisu radioaktivního štěpení se používá veličina poločas rozpadu  $T = \frac{\log 2}{a}$ , což je doba, za kterou se rozpadne polovina původního množství látky (tj.  $M(T) = \frac{M(0)}{2}$ ).

*Úloha:* kolik procent původního množství radioaktivního uhlíku  $^{14}\text{C}$  zůstane po 200 letech v zkoumaném biologickém materiálu? Poločas rozpadu radioaktivního izotopu uhlíku  $^{14}\text{C}$  je 5730 let.

*Odpověď:* Po 200 letech zůstane

$$M(200) = M(0) \cdot \exp\left(-\frac{\log 2}{5730} \cdot 200\right) \approx M(0) \cdot 0.976,$$

tj. 97.6% materiálu.

**Příklad** (Lineární dietní model). Hmotnost člověka závisí na mnoha věcech, ale v prvním přiblížení je funkcí přísunu energie v potravinách a její „spotřeby“ (běh, učení atd.). Denní spotřeba energie je v průměru 35 kcal denně na každý kilogram váhy jedince. Předpokládejme tedy, že změna váhy  $w(t)$  je přímo úměrná nedostatku/přebytku energie, tj. existuje konstanta  $a > 0$ , že přírůstek/úbytek váhy za krátký časový úsek  $h$ , tj.  $w(t+h) - w(t)$ , je přibližně roven  $a \cdot (c - 35w(t)) \cdot h$ , kde  $c$  je množství kalorií, které přijmu za den. Předpokládejme, že každých 7000 kcal přebytku v celkovém přísunu energie vyvolá následné zvýšení váhy o 1 kg, tj.  $a = \frac{1}{7000}$ . Podobně jako výše odvodíme, že funkce  $t \mapsto w(t)$  by měla splňovat diferenciální rovnici

$$w'(t) = \frac{c - 35w(t)}{7000}.$$

*Řešení rovnice:* jedná se o lineární diferenciální rovnici. Její obecné řešení se dá popsat jako

$$w(t) = \frac{c}{35} + (w(0) - \frac{c}{35})e^{-0.005t}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

(bylo dokázáno na přednášce)

*Úloha:* Pan Tlustý váží 100 kg a chce omezit příjem kalorií na 2625 ( $= \frac{3500}{75}$ , tj. na 75%). Za jak dlouho dosáhne váhy 90 kg?

*Řešení úlohy:* Máme  $w(t) = 75 + (100 - 75)e^{-0.005t} = 75 + 25e^{-0.005t}$  (kde  $t$  jsou dny). Tedy pokud  $w(t) = 90$ , pak

$$\begin{aligned}90 &= 75 + 25e^{-0.005t} \\e^{0.005t} &= \frac{15}{25} \\0.005t &= \log \frac{3}{5} \\t &= 200 \log \frac{5}{3} \approx 102.\end{aligned}$$

Tedy podle našeho modelu pan Tlustý dosáhne váhy 90 kg za 102 dní.

## 5. Funkce více proměnných

**Definice.** Euklidovskou metrikou (vzdáleností) na  $\mathbb{R}^n$  rozumíme funkci  $\rho : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow [0, \infty)$  definovanou pro  $x, y \in \mathbb{R}^n$  předpisem

$$\rho(x, y) := \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2}.$$

Číslo  $\rho(x, y)$  nazýváme *vzdáleností bodu  $x$  od bodu  $y$* .

**Lemma 5.1.** Definujme funkci  $\rho_{\max} : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow [0, \infty)$  pro  $x, y \in \mathbb{R}^n$  předpisem  $\rho_{\max}(x, y) := \max\{|x_i - y_i|; i = 1, \dots, n\}$ . Pak pro  $x, y \in \mathbb{R}^n$  platí

$$\rho_{\max}(x, y) \leq \rho(x, y) \leq \sqrt{n} \cdot \rho_{\max}(x, y).$$

*Důkaz.* Důkaz byl přednesen na přednášce a bude zkoušen. □

**Lemma 5.2** (základní vlastnosti Euklidovské metriky). Necht  $x, y, z \in \mathbb{R}^n$  a  $\lambda \in \mathbb{R}$ . Pak platí:

- (a)  $\rho(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$ ;
- (b)  $\rho(\lambda x, \lambda y) = |\lambda| \rho(x, y)$ ;
- (c)  $\rho(x, y) \leq \rho(x, z) + \rho(z, y)$ ;
- (d)  $\rho(x + z, y + z) = \rho(x, y)$

*Důkaz.* Důkaz byl přednesen na přednášce a bude zkoušen. □

**Definice.** Necht  $x \in \mathbb{R}^n$  a  $R > 0$ . Pak množinu

$$B(x, R) := \{y \in \mathbb{R}^n; \rho(x, y) < R\}$$

nazýváme *otevřenou koulí o středu  $x$  a poloměru  $R$* .

**konec 23. přednášky (15.5.2024)**

**Definice.** Necht  $A \subset \mathbb{R}^n$ . Řekneme, že  $x \in \mathbb{R}^n$  je *vnitřním bodem množiny  $A$* , jestliže existuje takové  $R > 0$ , že  $B(x, R) \subset A$ . Množina  $A \subset \mathbb{R}^n$  je *otevřená*, pokud každý bod  $x \in A$  je jejím vnitřním bodem. *Vnitřkem* množiny  $A$  rozumíme množinu všech vnitřních bodů množiny  $A$  a značíme jej  $\text{Int } A$ .

**Definice.** O množině  $I \subset \mathbb{R}^n$  řekneme, že to je (otevřený) *interval*, pokud existují (otevřené) intervaly  $I_1, \dots, I_n \subset \mathbb{R}$  takové, že  $I = I_1 \times I_2 \times \dots \times I_n$ .

**Poznámky.** (a) Z Lemmatu 5.1 plyne, že  $A \subset \mathbb{R}^n$  je otevřená právě tehdy, když pro každé  $x \in A$  existuje takový interval  $I$ , že  $x \in I$  a  $I \subset A$ .

*Důkaz.* Důkaz byl přednesen na přednášce a bude zkoušen. □

(b) Otevřená koule je otevřená množina, otevřený interval je otevřená množina.

*Důkaz.* Důkaz byl přednesen na přednášce a bude zkoušen. □

**Věta 5.3** (vlastnosti otevřených množin).



- (a) Prázdná množina a celý prostor  $\mathbb{R}^n$  jsou otevřené v  $\mathbb{R}^n$ .
- (b) Sjednocení libovolného systému otevřených množin je otevřená množina.
- (c) Průnik konečně mnoha otevřených množin je otevřená množina.

*Důkaz.* Důkaz byl přednesen na přednášce a bude zkoušen. □

**Definice.** Necht'  $\{x_k\}$  je posloupnost v  $\mathbb{R}^n$  a  $x \in \mathbb{R}^n$ . Řekneme, že  $\{x_k\}$  konverguje k  $x$ , jestliže  $\lim_{k \rightarrow \infty} \rho(x_k, x) = 0$ . Značíme  $x_k \rightarrow x$ , nebo také  $\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = x$ , případně  $\lim x_k = x$ . Prvek  $x$  nazýváme *limitou posloupnosti*  $\{x_k\}$  v  $\mathbb{R}^n$ . *Konvergentní posloupností* rozumíme posloupnost, která má limitu v  $\mathbb{R}^n$ .

**Lemma 5.4** (vlastnosti konvergence). *Necht'  $\{x_k\}$  je posloupnost prvků z  $\mathbb{R}^n$  a  $x \in \mathbb{R}^n$ . Pak platí:*

- (a)  $\{x_k\}$  má nejvýše jednu limitu;
- (b)  $\{x_k\}$  konverguje k  $x$  právě tehdy když konverguje po složkách, tj. pro každé  $i = 1, \dots, n$  platí  $x_k(i) \rightarrow x(i)$ .

*Důkaz.* Důkaz byl přednesen na přednášce a bude zkoušen. □

**Definice.** Množina  $A \subset \mathbb{R}^n$  je *uzavřená*, pokud platí následující implikace:

$$\{x_k\} \subset A, \quad x_k \rightarrow x, \quad x \in \mathbb{R}^n \quad \Rightarrow \quad x \in A.$$

**Věta 5.5** (vztah otevřených a uzavřených množin). *Necht'  $A \subset \mathbb{R}^n$ . Potom  $A$  je uzavřená právě tehdy, když  $\mathbb{R}^n \setminus A$  je otevřená.*

*Důkaz.* Důkaz byl přednesen na přednášce a bude zkoušen. □

**Věta 5.6** (vlastnosti uzavřených množin).

- (a) Prázdná množina a celý prostor  $\mathbb{R}^n$  jsou uzavřené v  $\mathbb{R}^n$ .
- (b) Sjednocení konečně mnoha uzavřených množin je uzavřená množina.
- (c) Průnik libovolného systému uzavřených množin je uzavřená množina.

*Důkaz.* Důkaz byl přednesen na přednášce a bude zkoušen. □

**Definice.** Necht'  $f$  je funkce  $n$  proměnných a  $x \in \mathbb{R}^n$ . Řekneme, že  $f$  je *spojitá v bodě*  $x$ , jestliže platí

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall y \in B(x, \delta): |f(y) - f(x)| < \varepsilon.$$

Necht'  $A \subset \mathbb{R}^n$  a  $x \in A$ . Řekneme, že  $f$  je *spojitá v bodě*  $x$  vzhledem k  $A$ , pokud platí

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall y \in B(x, \delta) \cap A: |f(y) - f(x)| < \varepsilon.$$

Řekneme, že  $f$  je *spojité na množině*  $A$ , jestliže je spojitý v každém bodě  $a \in A$  vzhledem k  $A$  a že  $f$  je *spojité*, jestliže je spojitý na  $\mathbb{R}^n$ .

**konec 24. přednášky (21.5.2024)**

**Lemma 5.7.** *Pro každé  $i = 1, \dots, n$  je funkce  $(x_1, \dots, x_n) \mapsto x_i$  spojitá.*

*Důkaz.* Důkaz byl přednesen na přednášce a bude zkoušen. □

**Věta 5.8** (zachování spojitosti při aritmetických operacích). *Necht'  $A \subset \mathbb{R}^n$ ,  $x \in A$ ,  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $g : A \rightarrow \mathbb{R}$  a  $\alpha \in \mathbb{R}$ . Jestliže  $f$  a  $g$  jsou spojitý v bodě  $x$  vzhledem k  $A$ , potom také funkce  $\alpha f$ ,  $f + g$  a  $f g$  jsou spojitý vzhledem k  $A$ . Pokud navíc funkce  $g$  je nenulová v bodě  $x$ , pak je spojitá i funkce  $f/g$  v bodě  $x$  vzhledem k  $A$ .*

*Důkaz.* Důkaz nebyl, nebude zkoušen. □

**Věta 5.9** (složení spojitých funkcí je spojitá funkce). *Nechť  $r, s \in \mathbb{N}$ ,  $A \subset \mathbb{R}^s$ ,  $B \subset \mathbb{R}^r$  a  $y \in A$ . Necht'  $\varphi_1, \dots, \varphi_r$  jsou funkce definované na  $A$ , spojitě v bodě  $y$  vzhledem k  $A$  a  $(\varphi_1(x), \dots, \varphi_r(x)) \in B$  pro každé  $x \in A$ . Necht'  $f : B \rightarrow \mathbb{R}$  je spojitá v bodě  $(\varphi_1(y), \dots, \varphi_r(y))$  vzhledem k  $B$ . Potom složená funkce  $F : A \rightarrow \mathbb{R}$  daná předpisem*

$$F(x) := f((\varphi_1(x), \dots, \varphi_r(x))), \quad x \in A$$

*je spojitá v  $y$  vzhledem k  $A$ .*

*Důkaz.* Důkaz nebyl, nebude zkoušen. □

**Věta 5.10.** *Nechť  $f$  je spojitá funkce na  $\mathbb{R}^n$  a  $c \in \mathbb{R}$ . Potom platí:*

(a) *Množina  $\{x \in \mathbb{R}^n; f(x) > c\}$  je otevřená v  $\mathbb{R}^n$ .*

(b) *Množina  $\{x \in \mathbb{R}^n; f(x) < c\}$  je otevřená v  $\mathbb{R}^n$ .*

(c) *Množina  $\{x \in \mathbb{R}^n; f(x) \leq c\}$  je uzavřená v  $\mathbb{R}^n$ .*

(d) *Množina  $\{x \in \mathbb{R}^n; f(x) \geq c\}$  je uzavřená v  $\mathbb{R}^n$ .*

(e) *Množina  $\{x \in \mathbb{R}^n; f(x) = c\}$  je uzavřená v  $\mathbb{R}^n$ .*

*Důkaz.* Důkaz byl přednesen na přednášce a bude zkoušen. □

**Definice.** Řekneme, že funkce  $f$  o  $n$  proměnných má v bodě  $a \in \mathbb{R}^n$  limitu rovnou  $A \in \mathbb{R}^*$ , jestliže platí

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in B(a, \delta) \setminus \{a\}: f(x) \in B(A, \varepsilon).$$

**Poznámky.** (a) Každá funkce má v daném bodě nejvýše jednu limitu, píšeme  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$ .

(b)  $f$  je spojitá v  $a$ , právě když  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$ .

(c) Pro limity funkcí více proměnných platí obdobné věty jako pro limity funkcí jedné proměnné (aritmetika, policajti, ...).

**Definice.** Necht'  $f$  je reálná funkce  $n$  proměnných,  $a \in \mathbb{R}^n$  a  $1 \leq i \leq n$ . Pak *parciální derivaci funkce  $f$  v bodě  $a$  podle  $i$ -té proměnné* definujeme jako limitu

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(a + te^i) - f(a)}{t} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(a_1, \dots, a_{i-1}, a_i + t, a_{i+1}, \dots, a_n) - f(a_1, \dots, a_n)}{t}, \end{aligned}$$

pokud tato limita existuje vlastní. Symbolem  $\frac{\partial f}{\partial x_i}$  označujeme **parciální derivaci funkce  $f$  podle  $i$ -té proměnné**, tj. funkci definovanou předpisem

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}: x \mapsto \frac{\partial f}{\partial x_i}(x).$$

**konec 25. přednášky (22.5.2024)**