

Kalkulus 1, LS 2023-2024
Zadání písemné části zkoušky - termín 28.5.

Příklad 1 (12 bodů). Spočtete

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{1 + \sin(6x)} - \exp(-x) \log(1 + 2x) - 1}{x(1 - \cos x)}$$

Příklad 2 (13 bodů). Vyjádřete primitivní funkci k

$$f(x) = \frac{1}{6 \sin x + \cos x + 11}$$

na maximálních intervalech existence.

Příklad 3 (12 bodů). Vyšetřete konvergenci následujícího integrálu

$$\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x - \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}(x - \frac{\pi}{6})}{(x - \frac{\pi}{6})^3} \arctan(1 + x^2) dx$$

(Můžete bez důkazu použít, že pro $x \in (\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2})$ je $\sin x - \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}(x - \frac{\pi}{6}) \neq 0$)

Příklad 4 (13 bodů). Nalezněte maximální řešení rovnice

$$y'' - 4y' + 4y = e^{2x} + 25 \sin x, \quad y(0) = 1, y'(0) = 0.$$

Kalkulus 1, LS 2023-2024
Zadání písemné části zkoušky - termín 4.6.

Příklad 5 (13 bodů). Spočtete integrál

$$\int_0^{\frac{7}{2}\pi} \frac{7 - \cos^2 x}{(2 + \sin^2 x)(1 + \sin^2 x)} dx.$$

Příklad 6 (12 bodů). Vyšetřete konvergenci následujícího integrálu

$$\int_3^\infty \frac{\sqrt{|\sin(x-3)|}}{x-3} \cdot \frac{x^2 + 5x + 2}{4^x} dx.$$

Příklad 7 (12 bodů). Nalezněte na intervalu $(-2, \infty)$ obecné řešení rovnice

$$y' \cdot (x+3) + \frac{1}{\log(x+3)} y = x(x+3)$$

a nalezněte řešení na intervalu $(-2, \infty)$ splňující počáteční podmínku $y(0) = \frac{9}{2}$.

Příklad 8 (13 bodů). Určete a nakreslete definiční obor funkce

$$f(x, y) = \sqrt{\frac{|x| - \sqrt[3]{y}}{2 + \sqrt[3]{y}}}$$

a vyšetřete její parciální derivace podle proměnné x .

Kalkulus 1, LS 2023-2024
Zadání písemné části zkoušky - termín 18.6.

Příklad 9 (11 bodů). Spočtete

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+3x)^x + \left(\frac{2}{3} - x\right) \cos(3x) - \frac{5}{3} + x}{x^3 \log(1+x)}$$

Příklad 10 (13 bodů). Vyjádřete primitivní funkci k

$$f(x) = \frac{1}{(\sqrt{4x^2 + 4x + 7} + 2x + 2)\sqrt{4x^2 + 4x + 7}}$$

na maximálních intervalech existence.

Příklad 11 (13 bodů). Vyšetřete konvergenci následujícího integrálu

$$\int_{\log 4}^{\infty} \frac{\sqrt{x - \log 4}}{e^x - 4} \sin x \, dx.$$

Příklad 12 (13 bodů). Nalezněte maximální řešení rovnice

$$y'' + \frac{1}{x(1 - \log x)} y' - \frac{1}{x^2(1 - \log x)} y = 1 - \log x, \quad y(1) = 2, \quad y'(1) = \frac{3}{2}$$

(Hint: nejprve dokažte, že $\{x, \log x\}$ tvoří fundamentální systém řešení homogenní rovnice.)

Kalkulus 1, LS 2023-2024
Zadání písemné části zkoušky - termín 25.6.

Příklad 13 (13 bodů). Vyjádřete primitivní funkci k

$$f(x) := \begin{cases} (x^2 + 1) \cos x & \text{pro } x \leq 0, \\ \frac{3e^{2x} - 22e^x + 39}{e^{2x} + 6e^x + 13} & \text{pro } x \geq 0. \end{cases}$$

na maximálních intervalech existence.

Příklad 14 (13 bodů). Vyšetřete konvergenci následujícího integrálu

$$\int_5^{\infty} \frac{1 - e^{5-x}}{\sqrt{(x-5)^3}} \log(x^2 + 3x + 1) dx.$$

Příklad 15 (12 bodů). Nalezněte maximální řešení rovnice

$$y'' - 7y' + 12y = \frac{e^{4x}}{e^x + 1}, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0.$$

Příklad 16 (12 bodů). Uvažujme funkci

$$f(x, y) = y^{|y - \sqrt{x^2 + 1}|}.$$

Vyšetřete její parciální derivace podle proměnné x .

Kalkulus 1, LS 2023-2024
Zadání písemné části zkoušky - termín 3.9.

Příklad 17 (13 bodů). Spočtěte

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\exp(1 - \cos 2x) - 1 + 6x - 2x^3 - x(6 - x^2) \cdot \sqrt[4]{1 + \frac{4}{3}x}}{x^4}$$

Příklad 18 (12 bodů). Spočtěte integrál

$$\int_2^{\infty} \frac{\sqrt[3]{\frac{x+1}{x-2}}}{(x-2)(x+1) \left(\sqrt[3]{\frac{x+1}{x-2}} + 1\right) \left(\sqrt[3]{\frac{x+1}{x-2}} + 2\right)} dx.$$

Příklad 19 (12 bodů). Vyšetřete konvergenci následujícího integrálu

$$\int_1^{\infty} \left(e^{1/x} - 1 - \frac{1}{x}\right) \cos\left(\frac{x^2 - 2x + 1}{x - 1}\right) dx.$$

Příklad 20 (13 bodů). Nalezněte maximální řešení rovnice

$$y' = \frac{\sqrt{y^2 - 4}}{y} \cdot \frac{1}{x^2 + 3}, \quad y(\sqrt{3}) = \sqrt{4 + \left(\frac{\pi}{2\sqrt{3}}\right)^2}.$$