1. Funkce více proměnných

1.1. Spojitost funkcí a parciálních derivací, věta o implicitní funkci

Definice. Nechť f je reálná funkce n proměnných, $a \in \mathbb{R}^n$ a $1 \leqslant i \leqslant n$. Pak *parciální derivaci funkce f v bodě a podle i-té proměnné* definujeme jako limitu

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) &= \lim_{t \to 0} \frac{f(a + te^i) - f(a)}{t} \\ &= \lim_{t \to 0} \frac{f(a_1, \ldots, a_{i-1}, a_i + t, a_{i+1}, \ldots, a_n) - f(a_1, \ldots, a_n)}{t},\end{aligned}$$

pokud tato limita existuje vlastní. Symbolem $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ označujeme **parciální derivaci funkce f podle i-té proměnné**, tj. funkci definovanou předpisem

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} \colon x \mapsto \frac{\partial f}{\partial x_i}(x).$$

Úmluva. V dalším textu bude výrok„parciální derivace existuje“ znamenat, že parciální derivace existuje *vlastní.*

Věta 1.1 (o nabývání mezihodnot)**.** *Nechť $I \subset \mathbb{R}^n$ je interval, $f : I \to \mathbb{R}$ spojitá funkce a ať jsou dány body $a, b \in I$ takové, že $f(a) < f(b)$. Pak pro libovolné $\zeta \in (f(a), f(b))$ existuje $c \in I$ takové, že $f(c) = \zeta$.*

Důkaz. Důkaz nebyl, nebude zkoušen. □

Věta 1.2 (vztah parciálních derivací a spojitosti)**.** *Nechť f je reálná funkce n proměnných, $a \in \mathbb{R}^n$ a $\frac{\partial f}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}$ jsou spojité funkce v bodě a. Pak f je spojitá v bodě a.*

Důkaz. Důkaz nebyl, nebude zkoušen. □

Definice. Nechť $G \subset \mathbb{R}^n$ je neprázdná otevřená množina, $i, j \in \{1, \ldots, n\}$, funkce $f : G \to \mathbb{R}$ má v každém bodě G vlastní i-tou parciální derivaci a $\mathbf{a} \in G$. Parciální derivaci funkce $\mathbf{x} \mapsto \frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{x})$ podle proměnné x_j v bodě $\mathbf{a}$ značíme

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\mathbf{a}) = \frac{\partial \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)}{\partial x_j}(\mathbf{a})$$

a nazýváme ji *parciální derivací druhého řádu* funkce f. Je-li $i = j$, pak používáme značení $\frac{\partial^2 f}{\partial^2 x_i}(\mathbf{a})$.

Analogicky se definují parciální derivace vyšších řádů.

Definice. Nechť $G \subset \mathbb{R}^n$ je otevřená množina a $k \in \mathbb{N}$. Nechť funkce $f : G \to \mathbb{R}$ má v každém bodě množiny G spojité všechny parciální derivace až do řádu k. Pak říkáme, že funkce f je třídy $\mathcal{C}^k$ na G. Množinu všech takových funkcí značíme $\mathcal{C}^k(G)$.

Věta 1.3 (o implicitní funkci)**.** *Nechť $k \in \mathbb{N}$, $G \subset \mathbb{R}^2$ je otevřená, $F : G \to \mathbb{R}$, $(x_0, y_0) \in G$ a nechť platí*

(i) $F \in \mathcal{C}^k(G)$,

(ii) $F(x_0, y_0) = 0$,

(iii) $\frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0$.

Pak existují $\varepsilon, \delta > 0$ taková, že pro každé $x \in (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$ existuje právě jedno $y \in (y_0 - \delta, y_0 + \delta)$ s vlastností $F(x, y) = 0$. Označíme-li toto y symbolem $\varphi(x)$, pak $\varphi \in \mathcal{C}^k((x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon))$ a

$$\varphi'(x) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}(x, \varphi(x))}{\frac{\partial F}{\partial y}(x, \varphi(x))}, \qquad x \in (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon).$$

Důkaz. Přednesená část důkazu bude zkoušena (existence ε a δ). □

Příklady.

1. Je dán vztah $x^2 + 2xy^2 + y^4 - y^5 = 0$ a bod $[0, 1]$. Dokažte, že:
   i) tímto vztahem je definována hladká funkce $y = f(x)$ v jistém okolí bodu 0, pro kterou platí $f(0) = 1$;
   ii) spočtěte $f'(0)$;
   iii) spočtěte $f''(0)$; **konec 1. přednášky (30. 9. 2024)**

   iv) zjistěte, zda je f na okolí bodu 0 konkávní/konvexní.
2. Ukažte, že daná rovnice určuje v jisté okolí bodu $M = [m_1, m_2]$ implicitně zadanou funkci $y = f(x)$. Spočtěte $f'(m_1)$ a $f''(m_1)$.

   a) $e^{xy^2-1} + \log \frac{x}{y} = 1$, $M = [1, 1]$ b) $\log(x + y^3) + \exp(x + 2y) = 1$, $M = [2, -1]$

konec 2. přednášky (1. 10. 2024)

1.2. Extrémy funkcí více proměnných

Definice. Nechť $M \subset \mathbb{R}^n$, $\mathbf{x} \in M$ a f je reálná funkce definovaná alespoň na M (tj. $M \subset D(f)$ a $H(f) \subset \mathbb{R}$). Řekneme, že f nabývá v bodě x

- *maxima* na M, jestliže platí $\forall \mathbf{y} \in M: \ f(\mathbf{y}) \leqslant f(\mathbf{x})$,
- *lokálního maxima vzhledem k M*, jestliže existuje $\delta > 0$ takové, že $\forall \mathbf{y} \in B(\mathbf{x}, \delta) \cap M: \ f(\mathbf{y}) \leqslant f(\mathbf{x})$,
- *ostrého maxima na M*, jestliže platí $\forall \mathbf{y} \in M \backslash \{\mathbf{x}\}: \ f(\mathbf{y}) < f(\mathbf{x})$,
- *ostrého lokálního maxima vzhledem k M*, jestliže existuje $\delta > 0$ takové, že $\forall \mathbf{y} \in (B(\mathbf{x}, \delta) \backslash \{\mathbf{x}\}) \cap M: \ f(\mathbf{y}) < f(\mathbf{x})$

Analogicky definujeme *minimum* a *ostré minimum na M*, *lokální minimum* a *ostré lokální minimum vzhledem k M*.

Extrémy na otevřené množině

Věta 1.4 (nutná podmínka lokálního extrému)**.** *Nechť $G \subset \mathbb{R}^n$ je otevřená množina, $\mathbf{a} \in G$ a funkce $f : G \to \mathbb{R}$ má v bodě $\mathbf{a}$ lokální extrém. Pak pro každé $j \in \{1, \ldots, n\}$ platí:*

$$\textit{Parciální derivace} \frac{\partial f}{\partial x_j}(\mathbf{a}) \textit{buď neexistuje, nebo je rovna nule.}$$

Důkaz. Důkaz byl, bude zkoušen. □

Definice. Nechť $G \subset \mathbb{R}^n$ je otevřená množina, $\mathbf{a} \in G$ a $f \in \mathcal{C}^1(G)$. *Gradientem funkce* f *v bodě* $\mathbf{a}$ rozumíme vektor

$$\nabla f(\mathbf{a}) := \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(\mathbf{a}), \frac{\partial f}{\partial x_2}(\mathbf{a}), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(\mathbf{a}) \right).$$

Pokud $\nabla f(\mathbf{a}) = \mathbf{o}$, pak bod $\mathbf{a}$ nazýváme *stacionárním bodem* funkce f.

Definice. Nechť $G \subset \mathbb{R}^2$ je neprázdná otevřená množina, $\mathbf{a} \in G$ a $f \in \mathcal{C}^2(G)$. Pak *Hessova matice* je matice

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial^2 x}(\mathbf{a}) & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(\mathbf{a}) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(\mathbf{a}) & \frac{\partial^2 f}{\partial^2 y}(\mathbf{a}) \end{pmatrix}$$

Značíme ji symbolem $\nabla^2 f(\mathbf{a})$.

Věta 1.5. *Nechť $G \subset \mathbb{R}^2$ je neprázdná otevřená množina, $f \in \mathcal{C}^2(G)$ a $\mathbf{a} \in G$ je stacionárním bodem funkce f. Potom platí:*

(a) Je–li matice $\nabla^2 f(\mathbf{a})$ negativně definitní, nabývá f v bodě $\mathbf{a}$ ostrého lokálního maxima.

(b) Je–li matice $\nabla^2 f(\mathbf{a})$ pozitivně definitní, nabývá f v bodě $\mathbf{a}$ ostrého lokálního minima.

(c) Je–li matice $\nabla^2 f(\mathbf{a})$ indefinitní, nenabývá f v bodě $\mathbf{a}$ ani lokálního minima, ani lokálního maxima, tj. $\mathbf{a}$ je sedlový bod funkce f.

Důkaz. Důkaz nebyl, nebude zkoušen. □

Poznámka. Pojem pozitivní/negativní definitnosti byl definován v předmětu Lineární algebra. Připomeňme, že symetrická matice $\begin{pmatrix} a & c \\ c & b \end{pmatrix}$ je

- pozitivně definitní, právě když $a > 0$ a $ab > c^2$,
- negativně definitní, právě když $a < 0$ a $ab > c^2$,
- indefinitní, právě když $ab < c^2$.

Věta 1.6 (záměnnost parciálních derivací)**.** *Nechť $G \subset \mathbb{R}^n$ je otevřená množina a $f \in \mathcal{C}^2(G)$. Pak pro každé $a \in G$ platí* $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\mathbf{a}) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(\mathbf{a})$

Důkaz. Důkaz nebyl, nebude zkoušen. □

Příklady. U následujících funkcí nalezněte lokální extrémy.
a) $f(x,y) = x^2 + (y-1)^2$ b) $f(x,y) = |x^2 + y^2 - 1|$ **konec 3. přednášky (7. 10. 2024)**

c) $f(x,y) = e^{x^2-y}(5 - 2x + y)$ d) $f(x,y) = xy\sqrt{1 - x^2 - y^2}$, $(x,y) \in \{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ x^2 + y^2 < 1\}$

Extrémy na uzavřené množině - Lagrangeova věta o multiplikátoru

Definice. Množina $A \subset \mathbb{R}^n$ je *omezená*, pokud je omezená množina $\{\rho(x,0);\ x \in A\}$.
Množina $A \subset \mathbb{R}^n$ je *kompaktní*, pokud je uzavřená a omezená.

Věta 1.7 (o nabývání extrémů)**.** *Nechť $A \subset \mathbb{R}^n$ je neprázdná kompaktní množina, $f : A \to \mathbb{R}$ spojitá funkce. Pak existují body $c, d \in A$ takové, že*

$$f(c) = \inf\{f(x);\ x \in A\}, \qquad f(d) = \sup\{f(x);\ x \in A\}.$$

Důkaz. Důkaz nebyl, nebude zkoušen. □

Příklady. Zjistěte sup a inf funkce f na množině M a vyšetřete, zda těchto hodnot funce f na M nabývá (bez Lagrangeových multiplikátorů).

a) $f(x,y) = x - 2y - 3$; $M = \{[x,y]; 0 \leqslant x \leqslant 1, 0 \leqslant y \leqslant 1, x + y \leqslant 1\}$
b) $f(x,y,z) = (x+y)^2 + (x-y)^2 + z$; $M = \langle -1, 1\rangle \times \langle -1, 1\rangle \times \langle -1, 1\rangle$

konec 4. přednášky (8. 10. 2024)

Věta 1.8 (derivace složené funkce)**.** *Nechť $G \subset \mathbb{R}$, $H \subset \mathbb{R}^2$ jsou otevřené množiny, $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathcal{C}^1(G)$, $f \in \mathcal{C}^1(H)$ a pro každé $x \in G$ je $(\varphi_1(x), \varphi_2(x)) \in H$. Potom pro složenou funkci $F : G \to \mathbb{R}$ definovanou předpisem*

$$F(x) := f(\varphi_1(x), \varphi_2(x)), \quad x \in G$$

platí, že $F \in \mathcal{C}^1(G)$ a pro každé $a \in G$ platí

$$F'(a) = \frac{\partial f}{\partial x}(b) \cdot \varphi_1'(a) + \frac{\partial f}{\partial y}(b) \cdot \varphi_2'(a),$$

kde $b = (\varphi_1(a), \varphi_2(a))$.

Důkaz. Důkaz byl, bude zkoušen. □

Věta 1.9 (Lagrangeova věta o multiplikátoru)**.** *Nechť $G \subset \mathbb{R}^2$ je otevřená množina, $f, g \in \mathcal{C}^2(G)$, $M = \{(x, y) \in G;\ g(x, y) = 0\}$ a $(x_0, y_0) \in M$ je bodem lokálního extrému funkce f vzhledem k množině M. Potom je splněna alespoň jedna z následujících podmínek:*

(a) $\nabla g(x_0, y_0) = (0, 0)$,

(b) existuje číslo $\lambda \in \mathbb{R}$ splňující

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) + \lambda \frac{\partial g}{\partial x}(x_0, y_0) = 0,$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) + \lambda \frac{\partial g}{\partial y}(x_0, y_0) = 0.$$

Důkaz. Důkaz byl, bude zkoušen. □

konec 5. přednášky (14. 10. 2024)

Příklady.

1. Nalezněte maxima a minima funkce f na množině M (s Lagrangeovými multiplikátory).

   a) $f(x, y) = 5x - 3y$, $M = \{[x, y], x^2 + y^2 = 136\}$
   b) $f(x, y) = \operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} y$, $M = \{[x, y], x^2 + y^2 \leqslant 1, x \geqslant 0, y \geqslant 0\}$
   c) $f(x, y) = xy$, $M = \{[x, y], 3x^2 + y^2 = 6\}$

2. Při jakých rozměrech bude mít otevřená nádoba tvaru kvádru daného objemu V minimální povrch?

3. Dané kladné číslo a rozložte na součet dvou čísel x a y tak, že součet jejich druhých mocnin je minimální.

konec 6. přednášky (15. 10. 2024)

2. Posloupnosti a řady funkcí

2.1. Stejnoměrná konvergence posloupností a řad funkcí

Definice. Nechť E je množina, $f : E \to \mathbb{R}$ je funkce a pro $n \in \mathbb{N}$ je $f_n : E \to \mathbb{R}$ funkce. Řekneme, že posloupnost $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ *konverguje bodově na* E k funkci f, pokud pro každé $x \in E$ platí $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$. Značíme $f_n \to f$.

Řekneme, že posloupnost $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ *konverguje stejnoměrně na* E k funkci f, pokud

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists k \in \mathbb{N}\ \forall x \in E\ \forall n \geqslant k : \quad |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

Značíme $f_n \rightrightarrows f$.

Definice. Nechť E je množina, $f : E \to \mathbb{R}$ je funkce a pro $n \in \mathbb{N}$ je $f_n : E \to \mathbb{R}$ funkce. Řekneme, že $\sum_{j=1}^{\infty} f_j$ *konverguje bodově na* E k funkci f, pokud posloupnost částečných součtů $\{\sum_{j=1}^{N} f_j\}_{N=1}^{\infty}$ konverguje bodově na E k funkci f.

Řekneme, že *řada* $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ *konverguje stejnoměrně na* E k funkci f, pokud posloupnost částečných součtů $\{\sum_{n=1}^{N} f_n\}_{N=1}^{\infty}$ konverguje stejnoměrně k f. Značíme $\sum_{n=1}^{\infty} f_n \rightrightarrows f$.

Fakt 2.1. *Stejnoměrně konvergentní posloupnost (resp. řada) funkcí je bodově konvergentní.*

Důkaz. Důkaz byl, bude zkoušen. □

Tvrzení 2.2 (Kritérium stejnoměrné konvergence)**.** *Nechť E je množina, $f : E \to \mathbb{R}$ funkce a pro $n \in \mathbb{N}$ je $f_n : E \to \mathbb{R}$ funkce. Pro každé $x \in E$ označme $\sigma_n := \sup_{x\in E} |f_n(x) - f(x)|$. Pak $f_n \rightrightarrows f$ právě když $\lim_{n\to\infty} \sigma_n = 0$.*

Důkaz. Důkaz byl, bude zkoušen. □

Příklad. Pro $f_n(x) := x^n$, $x \in [0,1]$ a $f(x) = \begin{cases} 0 & x \in [0,1), \\ 1 & x = 1. \end{cases}$ platí, že $f_n \to f$, ale $f_n \not\rightrightarrows f$.

Tvrzení 2.3 (Weierstrassovo kritérium, M-test)**.** *Nechť $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ je řada reálných funkcí definovaných na neprázdné množině E. Označme $\sigma_n := \sup_{x\in E} |f_n(x)|$. Jestliže $\sum_{n=1}^{\infty} \sigma_n < \infty$, pak $\sum_{n=1}^{\infty} f_n \rightrightarrows$ na E.*

Důkaz. Důkaz byl, bude zkoušen. □

Tvrzení 2.4 (Zachování spojitosti)**.** *Nechť $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ je posloupnost reálných spojitých funkcí definovaných na neprázdné podmnožině $E \subset \mathbb{R}$ a $f : E \to \mathbb{R}$ je funkce.*

(i) Pokud $f_n \rightrightarrows f$ na E, pak f je spojitá.

(ii) Pokud $\sum_{n=1}^{\infty} f_n \rightrightarrows f$ na E, pak f je spojitá.

Důkaz. Důkaz byl, bude zkoušen. □

konec 7. přednášky (21. 10. 2024)

Tvrzení 2.5 (Prohození limit)**.** *Je–li $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ je řada spojitých reálných funkcí definovaných na omezeném intervalu $(a,b) \subset \mathbb{R}$, která stejnoměrně konverguje na (a,b) a pro každé $n \in \mathbb{N}$ existuje vlastní $\lim_{x\to a^+} f_n(x)$, pak*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \lim_{x\to a^+} f_n(x) = \lim_{x\to a^+} \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x).$$

Důkaz. Důkaz nebyl, nebude zkoušen. $\square$

Tvrzení 2.6 (Záměna sumy a derivace)**.** *Nechť $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ je posloupnost reálných spojitých funkcí definovaných na neprázdném omezeném intervalu $(a,b) \subset \mathbb{R}$ splňující*

(i) *f_n má vlastní derivaci na (a,b), $n \in \mathbb{N}$,*

(ii) *existuje $x_0 \in (a,b)$ takové, že číselná řada $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x_0)$ je konvergentní,*

(iii) *$\sum_{n=1}^{\infty} f_n' \rightrightarrows$ na (a,b).*

Pak $\sum_{n=1}^{\infty} f_n \rightrightarrows$ na (a,b) a pro každé $x \in (a,b)$ platí

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n\right)'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n'(x).$$

Důkaz. Důkaz nebyl, nebude zkoušen. $\square$

Tvrzení 2.7 (Záměna sumy a integrálu)**.** *Nechť $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ je posloupnost reálných spojitých funkcí definovaných na neprázdném omezeném intervalu $(a,b) \subset \mathbb{R}$ splňující*

(i) *f_n má na (a,b) konvergentní Newtonův integrál, $n \in \mathbb{N}$;*

(ii) *řada $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ konverguje stejnoměrně k funkci f na (a,b).*

Pak f má na (a,b) konvergentní Newtonův integrál a platí

$$\sum_{n=1}^{\infty} (N)\int_a^b f_n = (N)\int_a^b \sum_{n=1}^{\infty} f_n.$$

Důkaz. Důkaz nebyl, nebude zkoušen. $\square$

Příklady.

1. Vyšetřete bodovou a stejnoměrnou konvergenci následujících řady funkcí $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$, kde $f_n(x) = \frac{nx}{1+n^5x^2}$, $x \in \mathbb{R}$.
2. Dokažte, že funkce f daná předpisem
$$f(x) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, \quad x \in \mathbb{R}$$
je spojitá na svém definičním oboru a $f'(x) = f(x)$ pro $x \in \mathbb{R}$.
3. Dokažte, že funkce f daná předpisem
$$f(x) := \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\sin(1 + \frac{x}{n})}{\sqrt{n}}, \quad x \in \mathbb{R}$$
je spojitá na svém definičním oboru a spočtěte $f'(0)$.
4. Dokažte, že pro funkci $f(x) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x}$, $x \in (1,\infty)$ platí $f \in \mathcal{C}^1((1,\infty))$.

konec 8. přednášky (22. 10. 2024)

5. Nechť je funkce f dána předpisem
$$f(x) := \sum_{n=1}^{\infty} (-x^2 + 6x - 8)^n.$$
Nalezněte definiční obor funkce f (tj. určete pro která $x \in \mathbb{R}$ je $f(x) \in \mathbb{R}$). Dokažte, že funkce f je spojitá v bodě $7/2$. Dokažte, že funkce f má vlastní derivaci v bodě $7/2$ a vyjádřete $f'(7/2)$ jako součet číselné řady.

2.2. Mocninné řady

Definice. *Mocninnou řadou o středu* $a \in \mathbb{R}$ rozumíme řadu

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-a)^n,$$

kde $a_n \in \mathbb{R}$ pro každé $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ a $x \in \mathbb{R}$.

Věta 2.8 (o poloměru konvergence mocninné řady)**.** *Nechť* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n$ *je mocninná řada. Pak existuje právě jeden nezáporný prvek* $\varrho \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ *takový, že*

- *pro každé* $x \in \mathbb{R}$, $|x-a| < \varrho$, *je uvedená řada absolutně konvergentní,*
- *pro každé* $x \in \mathbb{R}$, $|x-a| > \varrho$, *je uvedená řada divergentní.*

Prvek ϱ *splňuje*

$$\varrho = \frac{1}{\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}},$$

kde výrazem $\frac{1}{0}$ *rozumíme* ∞ *a výrazem* $\frac{1}{\infty}$ *rozumíme* 0*. Prvek* ϱ *nazýváme* poloměrem konvergence *uvedené řady.*

Důkaz. Důkaz nebyl, nebude zkoušen. □

Příklady. Nalezněte poloměr konvergence následujících mocninných řad. Určete oblasti absolutní konvergence, neabsolutní konvergence a divergence.

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^7}{n+20} x^n$
2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} x^n$ $(p \in \mathbb{R})$00

Věta 2.9. *Nechť* $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ *je posloupnost nezáporných čísel a nechť existuje* $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$*. Potom existuje také* $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n}$ *a limity se rovnají.*

Důkaz. Důkaz nebyl, nebude zkoušen. □

Věta 2.10 (derivace a integrace mocninné řady)**.** *Nechť* ϱ *je poloměr konvergence mocninné řady* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n$*. Potom poloměr konvergence řad* $\sum_{n=1}^{\infty} n a_n (x-a)^{n-1}$ *a* $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1}(x-a)^{n+1}$ *je také roven* ϱ*. Pro* $x \in \mathbb{R}$ *splňující* $|x-a| < \varrho$ *označme* $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n$*. Potom*

(i) funkce f *má v každém takovém bodě vlastní derivaci a platí* $f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n (x-a)^{n-1}$*;*

(ii) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1}(x-a)^{n+1}$ *je primitivní funkce k* f *na* $(a-\varrho, a+\varrho)$*.*

Speciálně, dostáváme následující vzorec pro výpočet n-té derivace funkce f*:* $f^{(n)}(a) = n! a_n$, $n \geqslant 0$*.*

Důkaz. Důkaz poloměru konvergence řad $\sum_{n=1}^{\infty} n a_n (x-a)^{n-1}$ a $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1}(x-a)^{n+1}$ byl vynechán, zbytek byl na přednášce dokázán. Dokázaná část bude zkoušena. □

konec 9. přednášky (29. 10. 2024)

Příklady. Nalezněte poloměr konvergence následujících mocninných řad. Určete oblasti absolutní konvergence, neabsolutní konvergence a divergence.

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n + (-2)^n}{n} (x+1)^n$
2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3+(-1)^n)^n}{n} x^n$

Příklad. Nalezněte poloměr konvergence mocninné řady $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{n!} x^n$.

Příklady. Vyjádřete následující funkce jako mocninnou řadu o středu 0.

1. e^{-x^2}

2. $(1+x)\log(1+x)$

Věta 2.11 (Abelova)**.** *Nechť ϱ je poloměr konvergence mocninné řady $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n$ a $\varrho \in (0,\infty)$.*

(a) *Jestliže je řada $\sum_{n=0}^{\infty} a_n\varrho^n$ konvergentní, potom*

$$\lim_{x\to(a+\varrho)_-} \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n\varrho^n.$$

(b) *Jestliže je řada $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(-\varrho)^n$ konvergentní, potom*

$$\lim_{x\to(a-\varrho)_+} \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(-\varrho)^n.$$

Příklady. 1. Sečtěte řady všude na intervalu konvergence: a) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{4n+5}}{n!}$ b) $\sum_{n=1}^{\infty} nx^n$ c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n(n+1)}$

konec 10. přednášky (4. 11. 2024)

2. Sečtěte řady: a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n}$ c) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2n+3}{(n+1)2^n}$

3. Nalezněte max. řešení diferenciální rovnice $y'(x) = 3y(x/2)$ s počáteční podmínkou $y(0) = 1$.

3. Teorie míry a integrálu

3.1. Pojem míry, abstraktní Lebesgueův integrál

3.1.1 Základní pojmy

Definice. Nechť X je množina. Systém $\mathcal{A}$ podmnožin X se nazývá *algebra*, pokud

(i) $\varnothing \in \mathcal{A}$, $X \in \mathcal{A}$;

(ii) $E \in \mathcal{A} \implies X \backslash E \in \mathcal{A}$;

(iii) $E_1, E_2 \in \mathcal{A} \implies E_1 \cup E_2 \in \mathcal{A}$.

Pokud navíc $\mathcal{A}$ splňuje

(iv) $E_n \in A$, $n = 1, 2, \dots \implies \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \in \mathcal{A}$,

pak říkáme, že $\mathcal{A}$ je *σ-algebra*. Je–li $\mathcal{A}$ σ-algebra, dvojice $(X, \mathcal{A})$ se nazývá *měřitelný prostor* a prvky $\mathcal{A}$ se nazývají *měřitelné množiny*.

konec 11. přednášky (11. 11. 2024)

Fakt 3.1. *Každá algebra (resp. σ-algebra) je uzavřená i na konečné (resp. spočetné) průniky.*

Důkaz. Důkaz byl, bude zkoušen. $\square$

Definice. Nechť $(X, \mathcal{A})$ je měřitelný prostor. Funkce $\mu : \mathcal{A} \to [0, \infty]$ se nazývá *míra*, pokud splňuje

(i) $\mu(\varnothing) = 0$,

(ii) jestliže $E_n \in A$, $n = 1, 2, \dots$ jsou po dvou disjunktní, pak

$$\mu(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n).$$

Trojice $(X, \mathcal{A}, \mu)$ se nazývá *prostor s mírou.*

Poznámka. Příkladem míry je například tzv. *počítací míra*, která každé množině $A \subset X$ přiřadí počet jejích prvků.

Tvrzení 3.2 (Vlastnosti míry)**.** *Nechť $(X, \mathcal{A}, \mu)$ je prostor s mírou.*

(i) Je-li $A, B \in \mathcal{A}$ a $A \subset B$, je $\mu(A) \leqslant \mu(B)$. Navíc, pokud $\mu(B \backslash A) < \infty$, pak $\mu(A) = \mu(B) - \mu(B \backslash A)$.

(ii) Je-li $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ posloupnost z $\mathcal{A}$, je $\mu\big(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\big) \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$

(iii) Je-li $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ rostoucí posloupnost z $\mathcal{A}$, je $\mu\big(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\big) = \lim_n \mu(A_n)$.

(iv) Je-li $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ klesající posloupnost z $\mathcal{A}$ a $\mu(A_1) < \infty$, je $\mu\big(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\big) = \lim_n \mu(A_n)$.

Důkaz. Důkaz byl, bude zkoušen. $\square$

Definice. Nechť $(X, \mathcal{A}, \mu)$ je prostor s mírou. Řekneme, že míra μ je *úplná*, pokud každá podmnožina množiny míry nula je měřitelná.

3.1.2 Konstrukce úplných měr, Lebesgueova míra

Definice. Nechť $I \subset \mathbb{R}$ je interval s krajními body $a, b \in \mathbb{R}$. Pak *délkou* intervalu I rozumíme číslo $|b-a|$. Značíme $\ell(I) := |b-a|$. Dále definujeme $\ell(J) := \infty$, pokud J je neomezený interval.

Nechť $I_1, \dots, I_n \subset \mathbb{R}$ jsou intervaly a $Q = I_1 \times \dots \times I_n \subset \mathbb{R}^n$. Pak *objemem* n-rozměrného intervalu Q rozumíme číslo $\ell(I_1) \cdots \ell(I_n)$. Značíme $\ell^n(Q) := \ell(I_1) \cdots \ell(I_n)$.

Definice. *Vnější míra* na množině X je zobrazení $\nu : \mathcal{P}(X) \to [0, \infty]$ splňující

1. $\nu(\varnothing) = 0$;
2. $A \subset B \implies \nu(A) \leqslant \nu(B)$;
3. Je-li $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ posloupnost podmnožin X, pak $\nu\Big(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n\Big) \leqslant \sum\limits_{n=1}^{\infty} \nu(A_n)$.

Příklad. Definujme funkci $\lambda^* : \mathcal{P}(\mathbb{R}^n) \to [0, \infty]$ předpisem

$$\lambda^*(A) := \inf\{\sum_{j=1}^{\infty} \ell^n(Q_j);\ Q_j \text{ jsou } n\text{-rozměrné intervaly },\bigcup_{j=1}^{\infty} Q_j \supset A\}.$$

Pak λ^* je vnější míra na $\mathbb{R}^n$, které říkáme *Lebesgueova vnější míra na* $\mathbb{R}^n$.

Definice. Nechť ν je vnější míra na množině X. Množinu $M \subset X$ nazveme *ν-měřitelnou (podle Carathéodoryho)*, jestliže pro každou "testovací" množinu $T \subset X$ platí

$$\nu(T) = \nu(T \cap M) + \nu(T \setminus M).$$

Systém všech (carathéodoryovsky) měřitelných množin značíme $\mathfrak{M}(\nu)$.

Věta 3.3. *Nechť ν je vnější míra na množině X. Pak $\mathfrak{M}(\nu)$ je σ-algebra a funkce $\mathfrak{M}(\nu) \ni A \mapsto \nu(A)$ je úplná míra.*

Důkaz. Důkaz nebyl, nebude zkoušen. □

Definice. Nechť λ^* je Lebesgueova vnější míra na $\mathbb{R}^n$. Funkci $\mathfrak{M}(\lambda^*) \ni A \mapsto \lambda^*(A)$ říkáme *Lebesgueova míra na* $\mathbb{R}^n$ a značíme ji λ^n. Množiny z $\mathfrak{M}(\lambda^*)$ se nazývají *Lebesgueovsky měřitelné.*

Definice. Definujeme $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ jako nejmenší σ-algebru obsahující otevřené množiny v $\mathbb{R}^n$. $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ se nazývá *borelovská σ-albebra* a jejím prvkům se říká *borelovské množiny.*

Lemma 3.4. *Nechť $n, m \in \mathbb{N}$, $A \subset \mathbb{R}^n$ a $B \subset \mathbb{R}^m$ jsou borelovské množiny. Pak $A \times B \subset \mathbb{R}^{n+m}$ je borelovská množina.*

Důkaz. Důkaz nebyl, nebude zkoušen. □

Tvrzení 3.5. *Každá borelovská množina je Lebesgueovsky měřitelná, Lebesgueova míra je úplná a pro každý n-rozměrný interval $Q \subset \mathbb{R}^n$ platí $\ell^n(Q) = \lambda^n(Q)$. Navíc, Lebesgueova míra je translačně invariantní, tj. pro každou měřitelnou množinu A a každý vektor $c \in \mathbb{R}^n$ máme $\lambda^n(A + c) = \lambda^n(A)$, kde $A + c = \{a + c : a \in A\}$.*

Důkaz. Důkaz nebyl, nebude zkoušen. □

konec 12. přednášky (12. 11. 2024)

3.1.3 Měřitelná zobrazení

Značení. Je–li X množina a $A \subset X$, pak *charakteristická funkce množiny* A je funkce $\chi_A : X \to \mathbb{R}$ definovaná předpisem

$$\chi_A(x) := \begin{cases} 1, & x \in A \\ 0, & x \notin A \end{cases}$$

Je–li $f : D \to \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ funkce a $M \subset \mathbb{R}$, značíme

$$\{f \in M\} := \{x \in D;\ f(x) \in M\},$$

podobně zavádíme značení jako $\{f > a\}$, $\{f = a\}$.

V celé této subsekci je $(X, \mathcal{A})$ měřitelný prostor.

Definice. Nechť $(Y, \mathcal{A}_2)$ je měřitelný prostor. Zobrazení $f : X \to Y$ je $(\mathcal{A}, \mathcal{A}_2)$-*měřitelné*, pokud pro každou $E \in \mathcal{A}_2$ je $\{f \in E\} \in \mathcal{A}$.

Úmluva. Pokud je z kontextu jasné co je $\mathcal{A}$ a $\mathcal{A}_2$, pak říkáme, že funkce je "měřitelná" místo "$(\mathcal{A}, \mathcal{A}_2)$-měřitelná". Pokud není řečeno jinak, tak pro $X = \mathbb{R}^n$ uvažujeme $\mathcal{A} = \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$.

Tvrzení 3.6. *Nechť $f : X \to \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ je funkce splňující, že pro každý otevřený interval $I \subset \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ máme $f^{-1}(I) \in \mathcal{A}$. Pak f je měřitelná funkce.*

Důkaz. Důkaz pro $f : X \to \mathbb{R}$ byl předveden na přednášce a bude zkoušen. □

Tvrzení 3.7. *(i) Kdykoliv $G \subset \mathbb{R}^n$ a $f : G \to \mathbb{R}$ je spojitá funkce, pak f je měřitelná.*

(ii) Každá monotónní funkce $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je měřitelná.

(iii) Funkce $\chi_A : X \to \mathbb{R}$ je měřitelná pro každou $A \in \mathcal{A}$.

(iv) Složení měřitelných funkcí je měřitelná funkce.

(v) Součet, součin, podíl, maximum a minimum konečně mnoha reálných měřitelných funkcí jsou opět měřitelné funkce.

(vi) Je-li $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ posloupnost měřitelných funkcí, jsou i $\sup f_n, \inf f_n, \limsup f_n, \liminf f_n$ (a tedy i $\lim f_n$, existuje-li) měřitelné funkce.

Důkaz. Důkaz části (i) pro $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ byl předveden na přednášce a bude zkoušen, důkaz části (iii) byl předveden na přednášce a bude zkoušen. □

3.1.4 Lebesgueův integrál

V celé této subsekci je $(X, \mathcal{A}, \mu)$ prostor s mírou.

Značení. Je–li $f : E \to \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ funkce, definujeme $f^+ := \max\{f, 0\}$ a $f^- := \max\{-f, 0\}$. (Maximum/minimum funkcí definujeme bodově.) Tedy $f = f^+ - f^-$ a $|f| = f^+ + f^-$.

Definice. Konečný soubor množin $\{A_1, \ldots, A_m\} \subset \mathcal{A}$ nazveme *rozkladem* množiny $E \in \mathcal{A}$, jestliže množiny A_j jsou po dvou disjunktní a $\bigcup_{j=1}^m A_j = E$.

Fráze *skoro všude* nebo *μ-skoro všude* se používá ve spojení s vlastností bodů množiny X. Řekneme-li, že taková vlastnost platí skoro všude (nebo ve skoro všech bodech), znamená to, že je splněna až na množinu míry nula, neboli, že existuje množina $N \in \mathcal{A}$ míry nula tak, že vlastnost je splněna ve všech bodech množiny $X \backslash N$.

Definice. Nechť f je měřitelná funkce (s hodnotami v $\mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$).

1. Je–li $f \geqslant 0$, definujeme

$$\int_X f \, \mathrm{d}\mu := \sup \left\{ \sum_{j=1}^m a_j \mu(A_j);\ \{A_j\}_{j=1}^m \text{ je rozklad } X, 0 \leqslant a_j \leqslant f \text{ na } A_j,\ j = 1, \ldots, m \right\},$$

kde používáme konvenci že $0 \cdot \infty = 0$.

2. V obecném případě definujeme

$$\int_X f \, \mathrm{d}\mu := \int_X f^+ \, \mathrm{d}\mu - \int_X f^- \, \mathrm{d}\mu,$$

pokud má tento rozdíl smysl.

3. Je–li $E \subset X$, $E \in \mathcal{A}$ a funkce f je definovaná skoro všude na E, pak definujeme

$$\int_E f \, \mathrm{d}\mu := \int_X f \cdot \chi_{E \cap D(f)} \, \mathrm{d}\mu.$$

Je-li integrál $\int_E f \, \mathrm{d}\mu$ defiován, říkáme též, že *má smysl*, nebo že funkce f *má integrál.* Je-li navíc tento integrál konečné číslo, říkáme, že $\int_E f \, \mathrm{d}\mu$ *konverguje*, nebo že f je *integrovatelná* a tento fakt značíme symbolem $f \in L^1(E, \mathcal{A}, \mu)$, nebo zkráceně $f \in L^1(E)$.

konec 13. přednášky (18. 11. 2024)

Věta 3.8 (Základní vlastnosti Lebesgueova integrálu)**.** *Nechť f a g jsou měřitelné funkce, $\alpha \in \mathbb{R}$ a $E \in \mathcal{A}$. Pak*

(i) $\int_X \chi_E \, \mathrm{d}\mu = \mu(E)$;

(ii) *Je–li $\{D_1, D_2\} \subset \mathcal{A}$ rozklad množiny E, pak*

$$\int_E f \, \mathrm{d}\mu = \int_{D_1} f \, \mathrm{d}\mu + \int_{D_2} f \, \mathrm{d}\mu;$$

(iii)

$$\int_E \alpha f + g \, \mathrm{d}\mu = \alpha \int_E f \, \mathrm{d}\mu + \int_E g \, \mathrm{d}\mu,$$

má–li pravá strana smysl;

(iv) $\int_E f \, \mathrm{d}\mu = 0$, *pokud $\mu(E) = 0$ nebo pokud $f = 0$ skoro všude na E;*

(v) *Pokud $\int_E |f| \, \mathrm{d}\mu$ konverguje, pak $|f| < \infty$ skoro všude na E;*

(vi) *Pokud je $\mu(E) < \infty$ a f je omezená, pak $\int_E f \, \mathrm{d}\mu$ konverguje a $\int_E |f| \, \mathrm{d}\mu \leqslant \sup_{x \in E} |f(x)| \cdot \mu(E)$;*

(vii) *$\int_E f \, \mathrm{d}\mu$ konverguje právě tehdy, když $\int_E |f| \, \mathrm{d}\mu$ konverguje;*

(viii) *Jestliže f, g mají integrál a $f \leqslant g$ skoro všude na E, pak*

$$\int_E f \, \mathrm{d}\mu \leqslant \int_E g \, \mathrm{d}\mu;$$

(ix)

$$\left| \int_E f \, \mathrm{d}\mu \right| \leqslant \int_E |f| \, \mathrm{d}\mu.$$

Důkaz. Zkoušeny budou přednášeny pouze ty části, jejichž důkaz byl předveden na přednášce (tj. část (i) a (iv)). ☐

3.1.5 Vztah Lebesgueova integrálu k Newtonovu integrálu a Riemannovu integrálu

V moderní matematické literatuře se integrálem bez přívlastku rozumí vždy integrál Lebesgueův. Význam Newtonova a Riemannova integrálu zůstává ve sféře didaktiky.

Věta 3.9 (Vztah mezi Newtonovým a Lebesgueovým integrálem)**.** *Nechť f je nezáporná spojitá funkce na intervalu (a, b). Potom $(N) - \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ konverguje, právě když konverguje Lebesgueův integrál funkce f. V tom případě mají oba integrály společnou hodnotu.*

Důkaz. Důkaz nebyl, nebude zkoušen. □

Věta 3.10 (Vztah mezi Riemannovým a Lebesgueovým integrálem)**.** *Nechť f je Riemannovsky integrovatelná funkce na $[a, b]$. Potom Lebesgueův integrál funkce f od a do b konverguje a je roven integrálu Riemannovu.*

Důkaz. Důkaz nebyl, nebude zkoušen. □

3.2. Fubiniova věta

Lemma 3.11. *Nechť $n, m \in \mathbb{N}$ a $E \subset \mathbb{R}^n$, $F \subset \mathbb{R}^m$ jsou Lebesgueovsky měřitelné množiny. Pak $E \times F$ je Lebesgueovsky měřitelná množina a $\lambda^{n+m}(E \times F) = \lambda^n(E) \cdot \lambda^m(F)$, kde definujeme $0 \cdot \infty = 0$.*

Důkaz. Důkaz nebyl, nebude zkoušen. □

Definice. Nechť $E \subset X \times Y$. Značíme

$$E^{x,*} := \{y \in Y;\ (x, y) \in E\}, \qquad x \in X,$$
$$E^{*,y} := \{x \in X;\ (x, y) \in E\}, \qquad y \in Y.$$

Tyto množiny se nazývají *řezy*.

Věta 3.12 (Fubiniova věta)**.** *Nechť $n, m \in \mathbb{N}$, $E \subset \mathbb{R}^{n+m}$ je Lebesgueovsky měřitelná množina a $f : E \to \mathbb{R}$ je Lebesgueovsky měřitelná funkce. Předpokládejme, že integrál*

$$\int_M f(x, y)\,\mathrm{d}\lambda^{n+m}$$

má smysl. Potom všechny integrály níže mají smysl a platí

$$\int_E f\,\mathrm{d}\lambda^{n+m} = \int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{E^{x,*}} f(x, y)\,\mathrm{d}\lambda^m(y) \right) \mathrm{d}\lambda^n(x) = \int_{\mathbb{R}^m} \left(\int_{E^{*,y}} f(x, y)\,\mathrm{d}\lambda^n(x) \right) \mathrm{d}\lambda^m(y). \tag{3.1}$$

Speciálně, je–li $f \geqslant 0$ nebo je jeden z integrálů

$$\int_E |f|\,\mathrm{d}\lambda^{n+m}, \quad \int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{E^{x,*}} |f(x, y)|\,\mathrm{d}\lambda^m(y) \right) \mathrm{d}\lambda^n(x), \quad \int_{\mathbb{R}^m} \left(\int_{E^{*,y}} |f(x, y)|\,\mathrm{d}\lambda^n(x) \right) \mathrm{d}\lambda^m(y)$$

konečný, pak platí (3.1)*.*

Důkaz. Důkaz nebyl, nebude zkoušen. □

Příklady.

1. Ukažte, že následující množiny $M \subset \mathbb{R}^2$ jsou měřitelné a spočtěte jejich Lebesguevu míru $\lambda^2(M)$.

   a)
   $$M = \{(x, y) \in \mathbb{R} \colon x \in [1, 2],\ \tfrac{1}{x} \leqslant y \leqslant x\},$$

   b)
   $$M = \{(x, y) \in \mathbb{R} \colon x > 2,\ 0 < y < \tfrac{1}{x}\}.$$

2. Spočtěte integrál
   $$\int_{[3,4]\times[1,2]} \frac{1}{(x + y)^2} d\lambda^2(x, y)$$

konec 14. přednášky (19. 11. 2024)

3.3. Věta o substituci

Definice. Nechť $G \subset \mathbb{R}^n$ je otevřená množina a $\varphi_i \in \mathcal{C}^1(G)$, $i = 1, \dots, n$. Uvažujme funkci $\varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_n) : G \to \mathbb{R}^n$. Pak *Jacobiho matice zobrazení φ v bodě t* je matice

$$\left(\frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j}(t) \right)_{i,j=1}^n .$$

Pokud má Jacobiho matice zobrazení φ v každém bodě $t \in G$ hodnost n, pak řekneme, že φ je *regulární* a determinant Jacobiho matice nazýváme *jakobiánem* zobrazení φ v bodě t a značíme jej $J_\varphi(t)$.

Věta 3.13 (O substituci). *Nechť $G \subset \mathbb{R}^n$ je otevřená množina a $\varphi : G \to \mathbb{R}^n$ je prosté regulární zobrazení. Nechť f je funkce na $E \subset \varphi(G)$. Potom*

$$\int_E f(x) \, \mathrm{d}\lambda^n(x) = \int_{\varphi^{-1}(E)} f(\varphi(t)) |J_\varphi(t)| \, \mathrm{d}\lambda^n(t),$$

pokud alespoň jedna strana má smysl.

Důkaz. Důkaz nebyl, nebude zkoušen. □

Věta 3.14 (o zobecněných polárních souřadnicích). *Nechť $a, b > 0$, $G = \{(r, \alpha) \in \mathbb{R}^2;\ r > 0, \alpha \in (-\pi, \pi)\}$ a zobrazení $\varphi : G \to \mathbb{R}^2$ je dáno předpisem $\varphi(r, \alpha) := (ar \cos \alpha, br \sin \alpha)$, $(r, \alpha) \in G$. Pak φ je prosté regulární zobrazení a $|J_\varphi(r, \alpha)| = abr$ pro $(r, \alpha) \in G$. Je–li $E \subset \mathbb{R}^2$ a f funkce na E, pak*

$$\int_E f(x, y) \, \mathrm{d}\lambda^2(x, y) = \int_{G \cap \varphi^{-1}(E)} abr \cdot f(ar \cos \alpha, br \sin \alpha) \, \mathrm{d}\lambda^2(r, \alpha),$$

má–li alespoň jedna strana rovnosti smysl.

Důkaz. Důkaz byl, bude zkoušen. □

Poznámka. Někdy je vhodné zobecněné polární souřadnice zřejmým způsobem posunout, tj. pro $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ uvažovat transformaci $\varphi : G \to \mathbb{R}^2$ danou předpisem $\varphi(r, \alpha) := (ar \cos \alpha + x_0, br \sin \alpha + y_0)$.

Příklady. 1. Spočtěte $\int_M f(x, y) \, \mathrm{d}\lambda^2$:

a) $M = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2;\ x^2 + y^2 \leqslant 1\}$; $\quad f(x, y) = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}}$

b) $M = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2;\ \frac{x}{\sqrt{3}} \leqslant y \leqslant 2x, x \leqslant x^2 + y^2 \leqslant 3x\}$; $\quad f(x, y) = \frac{1}{(x^2 + y^2)^2}$

c) $M = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2;\ \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} \leqslant 1\}$; $\quad f(x, y) = x^2 + y^2$

2. Spočtěte míru $\lambda^2(M)$ množiny M:

a) $M = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2;\ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leqslant 1\}$ $\quad$ ($a, b > 0$, jedná se o obsah elipsy)

b) $M = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2;\ (x^2 + y^2)^2 \leqslant 2a^2(x^2 - y^2)\}$ $\quad$ ($a > 0$, jedná se o obsah plochy ohraničené lemniskátou)

konec 15. přednášky (25. 11. 2024)

Věta 3.15 (o zobecněných válcových souřadnicích). *Nechť $a, b > 0$, $G = \{(r, \alpha, z) \in \mathbb{R}^3;\ r > 0, \alpha \in (-\pi, \pi)\}$ a zobrazení $\varphi : G \to \mathbb{R}^3$ je dáno předpisem $\varphi(r, \alpha, z) := (ar \cos \alpha, br \sin \alpha, z)$, $(r, \alpha, z) \in G$. Pak φ je prosté regulární zobrazení a $|J_\varphi(r, \alpha)| = abr$ pro $(r, \alpha, z) \in G$. Je–li $E \subset \mathbb{R}^3$ a f funkce na E, pak*

$$\int_E f(x, y, z) \, \mathrm{d}\lambda^3(x, y, z) = \int_{G \cap \varphi^{-1}(E)} abr \cdot f(ar \cos \alpha, br \sin \alpha, z) \, \mathrm{d}\lambda^3(r, \alpha, z),$$

má–li alespoň jedna strana rovnosti smysl.

Důkaz. Důkaz nebyl, nebude zkoušen. □

Věta 3.16 (o zobecněných sférických souřadnicích)**.** *Nechť $a, b, c > 0$, $G = \{(r, \alpha, \beta) \in \mathbb{R}^3;\ r > 0, \alpha \in (-\pi, \pi), \beta \in (-\pi/2, \pi/2)\}$ a zobrazení $\varphi : G \to \mathbb{R}^3$ je dáno předpisem*

$$\varphi(r, \alpha, \beta) := (ar \cos\alpha \cos\beta, br \sin\alpha \cos\beta, cr \sin\beta), \quad (r, \alpha, \beta) \in G.$$

Pak φ je prosté regulární zobrazení a $|J_\varphi(r, \alpha, \beta)| = abcr^2 \cos\beta$ pro $(r, \alpha, \beta) \in G$. Je–li $E \subset \mathbb{R}^3$ a f funkce na E, pak

$$\int_E f(x, y, z)\, \mathrm{d}\lambda^3(x, y, z) = \int_{G \cap \varphi^{-1}(E)} abcr^2 \cos\beta \cdot f(ar \cos\alpha \cos\beta, br \sin\alpha \cos\beta, cr \sin\beta)\, \mathrm{d}\lambda^3(r, \alpha, \beta),$$

má–li alespoň jedna strana rovnosti smysl.

Důkaz. Důkaz nebyl, nebude zkoušen. □

Poznámka. Podobně jako v případě zobecněných polárních souřadnic, i zobecněné válcové/sférické souřadnice je někdy vhodné zřejmým způsobem posunout.

Příklady. 1. Spočtěte míru $\lambda^3(M)$ množiny M: (v úlohách uvažujte všechny parametry kladné)

a) $M = \{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3;\ \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \leqslant R\}$ ($R > 0$, objem koule)
b) $M = \{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3;\ x^2 + y^2 + z^2 \leqslant 2az, x^2 + y^2 \leqslant z^2\}$
c) $M = \{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3;\ x^2 + y^2 + z^2 \leqslant R^2,\ x^2 + y^2 \leqslant Rx\}$ (objem Vivianiho okénka)
d) $M = \{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3;\ (R - \sqrt{x^2 + y^2})^2 + z^2 \leqslant a^2\}$, $R > a$ (objem anuloidu)
e) $M = \{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3;\ \frac{y^2}{2} + \frac{z^2}{3} \leqslant \frac{1}{x^2+2x+3}\}$

konec 16. přednášky (26. 11. 2024)

2. Spočtěte $\int_M z^2\, \mathrm{d}\lambda^3$, kde $M = \{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3;\ x^2 + y^2 + z^2 \leqslant R^2,\ x^2 + y^2 + z^2 \leqslant 2Rz\}$ ($R > 0$)

Věta 3.17.

$$\int_0^\infty e^{-x^2}\, \mathrm{d}x = \sqrt{\pi}/2.$$

Důkaz. Důkaz byl, bude zkoušen. □

3.4. Lebesgueův-Stieltjesův integrál

Definice. Symbolem $\mathcal{I}$ budeme značit systém všech zprava polouzavřených omezených intervalů v $\mathbb{R}$, tedy intervalů tvaru $(a, b]$, $-\infty < a \leqslant b < +\infty$. Interval $(a, a]$ je samozřejmě prázdná množina. Řekneme, že $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$\mathfrak{m} : \mathcal{I} \to [0, \infty)$ je Lebsgueova-Stieltjesova funkce intervalu (zkratka LSFI), jestliže

- pro každou uspořádanou trojici reálných čísel (a, b, c) platí

$$a \leqslant b \leqslant c \implies \mathfrak{m}(a, c]) = \mathfrak{m}((a, b]) + \mathfrak{m}((b, c]).$$

- funkce $b \mapsto \mathfrak{m}((a, b])$ je zprava spojitá na $[a, \infty)$.

Tvrzení 3.18. $\mathfrak{m} : \mathcal{I} \to [0, \infty)$ *je Lebsgueova-Stieltjesova funkce intervalu právě tehdy, když existuje zprava spojitá neklesající funkce $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ splňující*

$$\mathfrak{m}((a, b]) = \varphi(b) - \varphi(a), \quad (a, b] \in \mathcal{I}.$$

Důkaz. Důkaz byl, bude zkoušen. □

Definice. Nechť $\mathfrak{m}$ je LSFI. Pro $A \subset \mathbb{R}$ položme

$$\mathfrak{m}^*(A) := \inf\{\sum_{j=1}^{\infty} \mathfrak{m}(I_j);\ I_j \in \mathcal{I}, \bigcup_{j=1}^{\infty} I_j \supset A\}.$$

O funkci $\mathfrak{m}^* : \mathcal{P}(\mathbb{R}) \to [0, \infty]$ říkáme, že to je *Lebesgueova-Stieltjesova vnější míra generovaná* $\mathfrak{m}$.

Lemma 3.19. *Nechť $\mathfrak{m}$ je LSFI a $\mathfrak{m}^*$ je Lebesgueova-Stieltjesova vnější míra generovaná $\mathfrak{m}$. Pak $\mathfrak{m}^*$ je vnější míra.*

Důkaz. Důkaz nebyl, nebude zkoušen. □

Definice. Nechť $\mathfrak{m}$ je LSFI a $\mathfrak{m}^*$ je Lebesgueova-Stieltjesova vnější míra generovaná $\mathfrak{m}$. Funkci $\mathfrak{M}(\mathfrak{m}^*) \ni A \mapsto \mathfrak{m}^*(A)$ říkáme *Lebesgueova-Stieltjesova míra na* $\mathbb{R}$ (generovaná $\mathfrak{m}$).

Věta 3.20. *Nechť $\mathfrak{m}$ je LSFI a μ je Lebesgueova-Stieltjesova míra na $\mathbb{R}$. Pak μ je úplná míra, každá borelovská množina je μ-měřitelná a pro každé $A \in \mathcal{I}$ máme $\mathfrak{m}(A) = \mu(A)$.*

Důkaz. Důkaz nebyl, nebude zkoušen. □

konec 17. přednášky (2. 12. 2024)

Definice. Je–li $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zprava spojitá neklesající funkce a $\mathfrak{m}$ je LSFI definovaná předpisem $(a, b] \mapsto \varphi(b) - \varphi(b)$, pak Lebesgueovu-Stieltjesovu míru na $\mathbb{R}$ generovanou $\mathfrak{m}$ značíme jako μ_φ a říkáme, že μ_φ je *Lebesgueova-Stieltjesova míra na $\mathbb{R}$ generovaná φ.*

Poznámka. Je–li φ identita (tj. $\varphi(x) = x$) pak μ_φ je Lebesgueova míra na $\mathbb{R}$.

Definice (Lebesgueův-Stieltjesův integrál)**.** Nechť $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zprava spojitá neklesající funkce a f je μ_φ-měřitelná funkce na μ_φ-měřitelné množině $E \subset \mathbb{R}$. Integrál

$$\int_E f \, \mathrm{d}\mu_\varphi$$

se nazývá Lebesgue-Stieltjesův integrál funkce f podle μ_φ. Je–li $E = (a, b]$, používá se též označení

$$(LS) \int_a^b f \, \mathrm{d}g(x) = \int_{(a,b]} f \, \mathrm{d}\mu_{\varphi(x)}.$$

Je–li $a, b \in \mathbb{R}$ a $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ neklesající, zprava spojitá funkce, pak používáme značení

$$(LS) \int_a^b f \, \mathrm{d}g(x) = \int_{(a,b]} f \, \mathrm{d}\mu_{\widetilde{g}(x)},$$

kde $\widetilde{g} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je definována předpisem

$$\widetilde{g}(x) := \begin{cases} g(a) & x < a, \\ g(x) & x \in [a, b], \\ g(b) & x > b. \end{cases}$$

Nemůže-li dojít ke zmatení, píšeme $\int_a^b f \, \mathrm{d}g(x)$ místo $(LS) \int_a^b f(x) \, \mathrm{d}g(x)$.

Věta 3.21 (Vztah Lebesgueova-Stieltjesova a Riemannova-Stieltjesova integrálu)**.** *Nechť $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ je zprava spojitá a neklesající funkce. Má–li funkce $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ Riemannův-Stieltjesův integrál od a do b vzhledem k funkci g, pak má také Lebesgueův-Stieltjesův integrál podle μ_g přes množinu $(a, b]$ a hodnoty těchto integrálů se rovnají.*

Důkaz. Důkaz nebyl, nebude zkoušen. □

Značení. Pro reálnou funkci f definovanou na pravém (resp. levém) okolí bodu x označujeme symbolem $f(x+)$ (resp. $f(x-)$) limitu $\lim_{y\to x^+} f(y)$ (resp. $\lim_{y\to x^-} f(y)$).

Věta 3.22 (per partes pro LS integrál)**.** *Nechť $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ jsou zprava spojité a neklesající funkce. Pak*

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}g(x) = [f(x)g(x)]_a^b - \int_a^b g(x-)\,\mathrm{d}f(x),$$

kde $[f(x)g(x)]_a^b = f(b)g(b) - f(a)g(a)$.
(Součástí tvrzení je i existence integrálů)

Důkaz. Důkaz nebyl, nebude zkoušen. □

3.4.1 LS integrál pro obecnější funkce a jeho výpočet

Definice. Pokud je $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ neklesající funkce, uvažujme zprava spojitou neklesající funkci $\widetilde{\varphi} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ danou předpisem $\widetilde{\varphi}(x) = \varphi(x+)$. Míru $\mu_{\widetilde{\varphi}}$ pak označujeme jako μ_φ a říkáme, že μ_φ je *Lebesgueova-Stieltjesova míra na $\mathbb{R}$ generovaná φ.* Analogicky jako výše pak píšeme $(LS)\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}\varphi(x)$ (nebo dokonce jen $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}\varphi(x)$, nemůže-li dojít ke zmatení) místo $\int_{(a,b]} f(x)\,\mathrm{d}\mu_\varphi(x)$.

Fakt 3.23. *Nechť $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je neklesající funkce, a $-\infty < a < b < \infty$. Pak*

1. $\mu_\varphi((a, b]) = \varphi(b+) - \varphi(a+)$
2. $\mu_\varphi(\{b\}) = \varphi(b+) - \varphi(b-)$
3. $\mu_\varphi([a, b]) = \varphi(b+) - \varphi(a-)$
4. $\mu_\varphi([a, b)) = \varphi(b-) - \varphi(a-)$
5. $\mu_\varphi((a, b)) = \varphi(b-) - \varphi(a+)$

Důkaz. Důkaz byl, bude zkoušen. □

Poznámka. Ne každá funkce, která má Lebesgueův-Stieltjesův integrál má také Riemannův-Stieltjesův integrál. Například pro funkci $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ definovanou předpisem

$$f(x) = \begin{cases} 1 & x = 1, \\ 0 & x \in [0, 1), \end{cases}$$

máme $(LS)\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}f(x) = 1$, ale $(RS)\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}f(x)$ neexistuje.

Definice. Nechť $\varphi, f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jsou měřitelné funkce a nechť $\varphi = \varphi_1 - \varphi_2$, kde $\varphi_1, \varphi_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jsou omezené neklesající funkce. Pak pro měřitelnou $E \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ definujeme

$$(LS)\int_E f(x)\,\mathrm{d}\varphi(x) := \int_E f(x)\,\mathrm{d}\varphi_1(x) - \int_E f(x)\,\mathrm{d}\varphi_2(x),$$

má–li pravá strana rovnosti smysl (tj. není–li na pravé straně výraz typu $\infty - \infty$). Nemůže-li dojít ke zmatení, píšeme $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}\varphi(x)$ místo $(LS)\int_{(a,b]} f(x)\,\mathrm{d}\varphi(x)$ (kde $-\infty < a \leqslant b < \infty$).

Podobně jako výše také definujeme $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}\varphi(x)$ pro $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ měřitelnou a $\varphi = \varphi_1 - \varphi_2$, kde $\varphi_1, \varphi_2 : [a, b] \to \mathbb{R}$ jsou omezené neklesající funkce.

Poznámka. Platí, že hodnota integrálu $\int_E f(x)\,\mathrm{d}\varphi(x)$ nezávisí na volbě funkcí φ_1, φ_2 a definice tak dává dobrý smysl. Funkce, které lze zapsat jako rozdíl dvou neklesajících funkcí se nazývají funkce s *omezenou variací.*

Věta 3.24 (Pravidla pro počítání LS integrálu)**.** *Nechť $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je rozdílem omezených neklesajících funkcí a nechť $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je omezená měřitelná funkce. Pak*

1. *Pokud interval I je disjunktním sjednocením intervalů $(I_j)_{j=1}^n$, pak*

$$\int_I f(x)\,\mathrm{d}\varphi(x) = \sum_{j=1}^n \int_{I_j} f(x)\,\mathrm{d}\varphi(x).$$

2. *Pokud $\varphi = \sum_{j=1}^{n} c_j g_j$, kde $c_j \in \mathbb{R}$ a $g_j : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jsou rozdílem omezených neklesajících funkcí pro každé $j = 1, \ldots, n$, pak*

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}\varphi(x) = \sum_{j=1}^{n} c_j \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}g_j(x).$$

3. *Pokud φ je spojitá v bodě $c \in \mathbb{R}$, pak pro $-\infty \leqslant a < c < b \leqslant \infty$ platí*

$$\int_a^c f(x)\,\mathrm{d}\varphi(x) = \int_{(a,c)} f(x)\,\mathrm{d}\varphi(x), \quad a \quad \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}\varphi(x) = \int_{[c,b]} f(x)\,\mathrm{d}\varphi(x).$$

4. *Pokud je φ konstantní na otevřeném intervalu I, pak*

$$\int_I f(x)\,\mathrm{d}\varphi(x) = 0.$$

5. *Pro každé $c \in \mathbb{R}$ máme*

$$\int_{[c,c]} f(x)\,\mathrm{d}\varphi(x) = f(c)\big(\varphi(c+) - \varphi(c-)\big).$$

6. *Pokud $I \subset \mathbb{R}$ je otevřený interval, $f \in \mathcal{C}(I)$ a $\varphi \in \mathcal{C}^1(I)$, pak platí*

$$\int_I f(x)\,\mathrm{d}\varphi(x) = \int_I f(x)\varphi'(x)\,\mathrm{d}x.$$

Důkaz. Důkaz nebyl, nebude zkoušen. □

Příklady. Spočítejte hodnotu Lebesgueova-Stieltjesova integrálu $\int_M f(x)\,\mathrm{d}g(x)$ pro zadané funkce $f, g : M \to \mathbb{R}$ a množiny M:
a) $M = [2,3]$, $f(x) = x^2, g(x) = \chi_{[2,\infty)}(x)$ b) $M = [0,\infty)$, $f(x) = e^x$, $g(x) = (3 - e^{-2x})\chi_{[0,\infty)}(x)$
c) $M = [1,3]$, $f(x) = \begin{cases} x & x \neq 2 \\ 1 & x = 2 \end{cases}$, $g(x) = \begin{cases} x & x < 0 \\ x+1 & x \geqslant 0 \end{cases}$
d) $M = [-1,1]$, $f(x) = \begin{cases} x & x \neq 0 \\ 1 & x = 0 \end{cases}$, $g(x) = \begin{cases} x & x < 0 \\ x+1 & x \geqslant 0 \end{cases}$

konec 18. přednášky (3. 12. 2024)

e) $M = [0,3)$, $f(x) = x^2$, $g(x) = \begin{cases} 0 & x < 1 \\ x^2 - 2x + 2 & x \in [1,2) \\ 3 & x = 2 \\ x + 2 & x > 2 \end{cases}$
f) $M = [0,5]$, $f(x) = x^2 + 1$, $g(x) = [x]$ (celá část) g) $M = [\frac{1}{4}, \frac{5}{4}]$, $f(x) = [x]$, $g(x) = [2x]$

3.5. Prohození integrálu a limity, integrálu a řady

Příklady. Určete, zda Lebesgueovy integrály existují a zda jsou konvergentní (s parametry $p, q, s \in \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$):
a) $\int_0^\infty \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$ b) $\int_0^\infty e^{-x^2}\,\mathrm{d}x$ c) $\int_0^1 \frac{1}{\sin x}\,\mathrm{d}x$ d) $\int_{1/2}^1 \sqrt{\frac{1}{|\log x|}}\,\mathrm{d}x$
Výsledky následujících příkladů budeme dála považovat za „známé integrály":
e) $\int_2^\infty \frac{1}{x^p (\log x)^q}\,\mathrm{d}x$ (důkaz byl předveden na přednášce a může být zkoušen)
f) $\int_0^{1/2} \frac{1}{x^p |\log x|^q}\,\mathrm{d}x$ (důkaz na přednášce jen naznačen, může být použit jako příklad navíc)
g) $\int_0^\infty e^{-x} x^{s-1} (\log x)^k\,\mathrm{d}x$ (důkaz byl předveden na přednášce a může být zkoušen)

V celé této sekci je $(X, \mathcal{A}, \mu)$ prostor s mírou.

Definice. Nechť E je množina a pro $j \in \mathbb{N}$ je $f_j : E \to \mathbb{R}$ funkce. Řekneme, že posloupnost $\{f_j\}_{j=1}^{\infty}$ *konverguje skoro všude na* E k funkci $f : E \to \mathbb{R}$, pokud $E \in \mathcal{A}$ a existuje $F \subset E$ taková, že $f_j|_F \to f|_F$ a $\lambda^n(E \setminus F) = 0$.

Řekneme, že $\sum_{j=1}^{\infty} f_j$ *konverguje skoro všude na* E, pokud posloupnost částečných součtů $\{\sum_{j=1}^{N} f_j\}_{N=1}^{\infty}$ konverguje skoro všude na E.

Tvrzení 3.25. *Nechť $E \in \mathcal{A}$ a pro $j \in \mathbb{N}$ je $f_j : E \to \mathbb{R}$ měřitelná funkce. Nechť $f_j \rightrightarrows f$ na E, $\mu(E) < \infty$ a $\int_E f \, \mathrm{d}\mu$ existuje. Pak*

$$\lim_{j\to\infty} \int_E f_j \, \mathrm{d}\mu = \int_E f \, \mathrm{d}\mu.$$

Důkaz. Důkaz byl, bude zkoušen. □

Věta 3.26 (Leviho věta)**.** *Nechť $E \in \mathcal{A}$ a pro $j \in \mathbb{N}$ je $f_j : E \to \mathbb{R}$ měřitelná funkce. Nechť posloupnost funkcí $\{f_j\}_{j=1}^{\infty}$ bodově konverguje na E a splňuje $\int_E f_1 \, \mathrm{d}\mu > -\infty$ a $f_1 \leqslant f_2 \leqslant \ldots$. Pak*

$$\int_E \lim_{j\to\infty} f_j \, \mathrm{d}\mu = \lim_{j\to\infty} \int_E f_j \, \mathrm{d}\mu.$$

Důkaz. Důkaz nebyl, nebude zkoušen. □

Věta 3.27 (Lebesgueova věta)**.** *Nechť $E \in \mathcal{A}$ a pro $j \in \mathbb{N}$ je $f_j : E \to \mathbb{R}$ měřitelná funkce. Nechť posloupnost funkcí $\{f_j\}_{j=1}^{\infty}$ konverguje bodově skoro všude na E. Nechť existuje integrovatelná funkce $g : E \to \mathbb{R}$ (takzvaná* majoranta*) taková, že*

$$|f_j(x)| \leqslant g(x), \quad j \in \mathbb{N},\ x \in E.$$

Pak

$$\int_E \lim_{j\to\infty} f_j \, \mathrm{d}\mu = \lim_{j\to\infty} \int_E f_j \, \mathrm{d}\mu.$$

Důkaz. Důkaz nebyl, nebude zkoušen. □

Příklady. Spočtěte následující limity: a) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \int_0^1 \frac{x^n}{n} \, \mathrm{d}x$ b) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \int_0^{\infty} e^{-nx^2} \, \mathrm{d}x$

Důsledek 3.28 (Lebesgueova věta pro řady)**.** *Nechť $E \in \mathcal{A}$ a pro $j \in \mathbb{N}$ je $f_j : E \to \mathbb{R}$ měřitelná funkce. Nechť $\sum_{j=1}^{\infty} f_j$ konverguje skoro všude na E. Nechť existuje integrovatelná funkce $g : E \to \mathbb{R}$ (takzvaná* majoranta*) taková, že*

$$\left| \sum_{j=1}^{N} f_j(x) \right| \leqslant g(x), \quad N \in \mathbb{N},\ x \in E.$$

Pak

$$\int_E \sum_{j=1}^{\infty} f_j \, \mathrm{d}\mu = \sum_{j=1}^{\infty} \int_E f_j \, \mathrm{d}\mu.$$

Důkaz. Důkaz nebyl, nebude zkoušen. □

Důsledek 3.29. *Nechť $E \in \mathcal{A}$ a pro $j \in \mathbb{N}$ je $f_j : E \to \mathbb{R}$ měřitelná funkce. Nechť je splněna jedna z následujících podmínek*

(i) $f_j = aq^j$*, kde a, q jsou měřitelné funkce, $|q| < 1$ a $\int_E \frac{a}{1-q} \, \mathrm{d}\mu$ konverguje*

(ii) $\sum_j \int_E |f_j| \, \mathrm{d}\mu < \infty$ *nebo* $\int_E \sum_j |f_j| \, \mathrm{d}\mu < \infty$*,*

(iii) $f_j = (-1)^j h_j$, $h_j \to 0$, $h_1 \geqslant h_2 \geqslant h_3 \geqslant \ldots \geqslant 0$ *a* $\int_E h_1 \,\mathrm{d}\mu < \infty$

Pak řada $\sum_{j=1}^{\infty} f_j$ *konverguje skoro všude a platí*

$$\int_E \sum_{j=1}^{\infty} f_j \,\mathrm{d}\mu = \sum_{j=1}^{\infty} \int_E f_j \,\mathrm{d}\mu.$$

Důkaz. Důkaz byl, bude zkoušen. □

Příklady. V následujících příkladech rozviňte integrovanou funkci v řadu, ověřte možnost záměny řady a integrálu a vyjádřete integrál jako číselnou řadu.
a) $\int_0^1 \frac{\log(1-x)}{x} \,\mathrm{d}x$ b) $\int_0^{\infty} \frac{x}{e^x - 1} \,\mathrm{d}x$

konec 20. přednášky (10. 12. 2024)

3.6. Integrály závislé na parametru

V celé této sekci je $(X, \mathcal{A}, \mu)$ prostor s mírou.

Věta 3.30 (Spojitost integrálu závislého na parametru)**.** *Nechť* $E \in \mathcal{A}$, $a \in \mathbb{R}^n$ *a nechť* U *je otevřená množina obsahující bod* a. *Nechť funkce* $f : U \times E \to \mathbb{R}$ *má následující vlastnosti:*

(i) Pro skoro všechna $x \in E$ *je funkce* $U \ni t \mapsto f(t, x)$ *spojitá v* a,

(ii) pro všechna $t \in U$ *je funkce* $E \ni x \mapsto f(t, x)$ *měřitelná,*

(iii) existuje integrovatelná funkce g *na* E *tak, že pro všechna* $t \in U$ *a* $x \in E$ *je* $|f(t, x)| \leqslant g(x)$.

Potom pro všechna $t \in U$ *je* $E \ni x \mapsto f(t, x)$ *integrovatelná a funkce*

$$F(t) := \int_E f(t, x) \,\mathrm{d}\mu(x), \quad t \in U$$

je spojitá v bodě a.

Důkaz. Důkaz byl, bude zkoušen. □

Věta 3.31 (Derivace integrálu závislého na parametru)**.** *Nechť* $E \in \mathcal{A}$ *a* $I \subset \mathbb{R}$ *je otevřený omezený interval. Nechť funkce* $f : I \times E \to \mathbb{R}$ *má následující vlastnosti:*

(i) Pro skoro všechna $x \in E$ *má funkce* $I \ni t \mapsto f(t, x)$ *vlastní derivaci na celém intervalu* I,

(ii) pro všechna $t \in I$ *je funkce* $E \ni x \mapsto f(t, x)$ *měřitelná,*

(iii) existuje integrovatelná funkce g *na* E *tak, že pro všechna* $t \in I$ *a* $x \in E$ *je* $\left|\frac{\partial f}{\partial t}(t, x)\right| \leqslant g(x)$,

(iv) existuje $t_0 \in I$ *tak, že funkce* $E \ni x \mapsto f(t_0, x)$ *je integrovatelná.*

Pak pro všechna $t \in I$ *je funkce* $E \ni x \mapsto f(t, x)$ *integrovatelná, funkce*

$$F(t) := \int_E f(t, x) \,\mathrm{d}\mu(x), \quad t \in I$$

má vlastní derivaci na celém intervalu I *a platí*

$$F'(t) = \int_E \frac{\partial f}{\partial t}(t, x) \,\mathrm{d}\mu(x), \quad t \in I.$$

Důkaz. Důkaz byl, bude zkoušen. □

Definice. Funkci *Gamma* definujeme na intervalu $(0, \infty)$ předpisem

$$\Gamma(s) := \int_0^\infty e^{-x} x^{s-1} \,\mathrm{d}x, \quad s \in (0, \infty).$$

Tvrzení 3.32 (Vlastnosti funkce Gamma). *(i)* $\Gamma(s) \in (0, \infty)$, $s \in (0, \infty)$;

(ii) $\Gamma(1) = 1$ *a pro každé* $s \in (0, \infty)$ *platí* $\Gamma(s+1) = s\Gamma(s)$. *Speciálně,* $\Gamma(n+1) = n!$ *pro každé* $n \in \mathbb{N}$;

(iii) $\Gamma \in \mathcal{C}^k(0, \infty)$, $k \in \mathbb{N}$;

(iv) Γ *je ryze konvexní na* $(0, \infty)$;

konec 21. přednášky (16. 12. 2024)

(v) $\lim_{s\to 0^+} \Gamma(s) = \lim_{s\to\infty} \Gamma(s) = +\infty$;

(vi) $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$.

Důkaz. Důkaz byl, bude zkoušen. □

Příklady. 1. Nalezněte definiční obor následujících funkcí (tj. ta $a \in \mathbb{R}$ že $F(a) \in \mathbb{R}$) a dokažte, že funkce jsou spojité na svých definičních oborech:
a)

$$F(a) := \int_0^\infty \frac{e^{-ax}}{1+x^2} \,\mathrm{d}x;$$

b)

$$F(a) := \int_0^1 \log(x^2 + a^2) \,\mathrm{d}x$$

2. Načrtněte graf funkce $F(a) = \int_0^\infty \frac{e^{-ax^2}}{1+x^2}$ (tj. spočtěte první a druhou derivaci, určete monotonii a konvexitu-konkávitu + limity v krajních bodech definičního oboru).

konec 22. přednášky (17. 12. 2024)

3. Rozhodněte, pro které hodnoty parametrů konverguje Lebesgueův integrál $\displaystyle\int_0^\infty \frac{1 - e^{-ax}}{xe^x} \,\mathrm{d}x$ a spočtěte jeho hodnotu pomocí věty o derivování integrálů závislých na parametru.

Definice. Funkci *Beta* definujeme na $(0, \infty) \times (0, \infty)$ předpisem

$$B(p, q) := \int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1} \,\mathrm{d}x, \quad (p, q) \in (0, \infty).$$

Tvrzení 3.33 (Vlastnosti funkce Beta). *(i) Pro každé* $p, q \in (0, \infty)$ *máme* $B(p, q) \in (0, \infty)$;

(ii) pro každé $p, q \in (0, \infty)$ *máme* $pB(p, q+1) = qB(p+1, q)$;

(iii) pro každé $p, q \in (0, \infty)$ *máme*

$$B(p, q) = \int_0^\infty \frac{t^{p-1}}{(1+t)^{p+q}} \,\mathrm{d}t = 2\int_0^{\pi/2} (\cos\alpha)^{2p-1} \cdot (\sin\alpha)^{2q-1} \,\mathrm{d}\alpha;$$

(iv) pro každé $p, q \in (0, \infty)$ *máme* $B(p, q) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}$ *(speciálně* $B(p, q) = B(q, p)$*)*;

(v) $B \in \mathcal{C}^k((0, \infty) \times (0, \infty))$, $k \in \mathbb{N}$;

(vi) pro $s \in (0,1)$ platí

$$\Gamma(s)\Gamma(1-s) = B(1-s,s) = \int_0^\infty \frac{t^{-s}}{1+t}\,\mathrm{d}t = \int_0^\infty \frac{t^{s-1}}{1+t}\,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{\sin \pi s}.$$

Důkaz. Důkaz byl na přednášce až na část, kde se dokazuje že $\int_0^\infty \frac{t^{s-1}}{1+t}\,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{\sin \pi s}$. Dokázaná část bude zkoušena. ☐

Příklady. Určete hodnoty následujících integrálů: a) $\int_0^\infty x^4 e^{-x^2}\,\mathrm{d}x$ b) $\int_0^{\pi/2} \sin^4 x \cos^6 x\,\mathrm{d}x$ c) $\int_0^\infty \frac{x^{p-1}}{1+x^n}\,\mathrm{d}x$ $(0 < p < n,\ n \in \mathbb{N})$

konec 23. přednášky (6.1.2025)

d) $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^4}}\,\mathrm{d}x$

Tvrzení 3.34 (objem n-rozmerne koule)**.** *Nechť je dána n-rozměrná koule $B(0,R) \subset \mathbb{R}^n$. Pak $\lambda^n(B(0,R)) = \frac{\pi^{n/2}}{\Gamma(1+n/2)} R^n$.*

Důkaz. Důkaz byl, bude zkoušen. ☐

Tvrzení 3.35 (Stirlingův vzorec)**.**

$$\lim_{s\to\infty} \frac{1}{\sqrt{s}} \left(\frac{e}{s}\right)^s \Gamma(s+1) = \sqrt{2\pi}.$$

Důkaz. Důkaz nebyl, nebude zkoušen. ☐

Příklady. Spočtěte následující limity a) $\lim_{n\to\infty} \lambda^n(B(0,1))$ b) $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{(2n)!}{(n!)^2}}$

3.7. Radon-Nikodýmova věta

V celé této sekci je $(X, \mathcal{A}, \mu)$ prostor s mírou.

Definice. Řekneme, že míra μ je *σ-konečná*, pokud existují měřitelné množiny A_n, $n \in \mathbb{N}$ takové, že $\mu(A_n) < \infty$ pro každé $n \in \mathbb{N}$ a $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n = X$.

Definice. Nechť μ, ν jsou míry na $(X, \mathcal{A})$. Řekneme, že ν *je absolutně spojitá vzhledem k* μ (značíme $\nu << \mu$), jestliže pro každou $E \in \mathcal{A}$ platí

$$\mu(E) = 0 \Rightarrow \nu(E) = 0.$$

Definice. Nechť f je nezáporná μ-měřitelná funkce. Pak míra $\nu : \mathcal{A} \to [0,\infty]$ definovaná předpisem

$$\nu(E) := \int_E f\,d\mu$$

se nazývá *míra s hustotou f (vzhledem k μ)*. Naopak f se v této situaci nazývá *hustota* nebo *Radon-Nikodýmova derivace* míry ν (vzhledem k μ) a značí $\frac{d\nu}{d\mu}$.

Věta 3.36 (Radon-Nikodýmova věta)**.** *Nechť μ je σ-konečná a nechť ν je σ-konečná míra na $(X, \mathcal{A})$ splňující $\nu \ll \mu$. Pak existuje právě jedna (až na modifikace na množinách μ-míry nula) μ-měřitelná funkce f taková, že $f = \frac{d\nu}{d\mu}$, tj.*

$$\nu(E) = \int_E f\,\mathrm{d}\mu, \qquad E \in \mathcal{A}.$$

Navíc, pokud je ν konečná, pak f je μ-integrovatelná.

Důkaz. Důkaz nebyl, nebude zkoušen. ☐

Tvrzení 3.37 (O integraci vzhledem k hustotě)**.** *Nechť μ je σ-konečná a nechť ν je konečná míra na $(X, \mathcal{A})$ splňující $\nu \ll \mu$ a nechť $f = \frac{d\nu}{d\mu}$. Pak pro každou $E \in \mathcal{A}$ a každou $\mathcal{A}$-měřitelnou funkci $g : E \to \mathbb{R}$ platí*

$$\int_E g(x)\, d\nu = \int_E gf\, d\mu,$$

má-li alespoň jedna strana rovnosti smysl.

Důkaz. Důkaz nebyl, nebude zkoušen. $\square$

konec 24. přednášky (7.1.2025)