Kalkulus 2, ZS 2024-2025
Zadání písemné části zkoušky - termín 8.1.

Příklad 1 (16 bodů)**.** Je dána funkce

$$f(x,y) := (x+2y)^2 + (x+y)^2$$

na množině $M = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon\ x^2 + y^2 = 1\}$. Vypočtěte globální extrémy f na M.
(*Při porovnávání kandidátů na extrém můžete použít, že*

$$f\left(a\sqrt{\frac{5-b\sqrt{5}}{10}}, c\sqrt{\frac{5+b\sqrt{5}}{10}}\right) = \frac{35+\sqrt{5}(3b+12ac)}{10}$$

kdykoliv $a, b, c \in \{\pm 1\}$.)

Příklad 2 (11 bodů)**.** Zjistěte, pro která $x \in \mathbb{R}$ konverguje mocninná řada

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n+3}}{2n}$$

a řadu sečtěte pro všechna x, pro která konverguje.

Příklad 3 (11 bodů)**.** Nechť je dána množina

$$M := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \colon x^2 + y^2 < 2x,\ x < z < 4,\ y > 0\}.$$

Spočtěte integrál $\int_M y \, \mathrm{d}\lambda^3$. (*Hint: použijte válcové souřadnice.*)

Příklad 4 (12 bodů)**.** Uvažujme funkci

$$F(a) := \int_0^1 \frac{\log(1+x)}{x^a} \, \mathrm{d}x, \qquad a < 2.$$

- Dokažte, že $F(a) \in \mathbb{R}$ pro $a < 2$.
- Dokažte, že funkce F je spojitá na $(-\infty, 2)$.
- Vyjádřete pro každé $a < 2$ funkci $\frac{\log(1+x)}{x^a}$ na intervalu $(0,1)$ jako součet nekonečné řady (můžete bez důkazu použít fakt dokázaný na přednášce, že $\log(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n$ pro $x \in (0,1)$).
- Ověřte možnost záměny řady a integrálu a vyjádřete pro každé $a < 2$ integrál $F(a)$ jako číselnou řadu.

Kalkulus 2, ZS 2024-2025
Zadání písemné části zkoušky - termín 20.1.

Příklad 5 (12 bodů). Ukažte, že rovnice

$$\frac{1}{\sin(x+y)} + \operatorname{arctg}(xy) = 1$$

určuje v jistém okolí bodu $[\frac{\pi}{2}, 0]$ implicitně zadanou funkci $y = f(x)$. Spočtěte $f'(\frac{\pi}{2})$ a $f''(\frac{\pi}{2})$. Nakonec určete, zda je funkce f na okolí bodu $\frac{\pi}{2}$ konkávní/konvexní.

Příklad 6 (11 bodů). Nechť je funkce f dána předpisem

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \Big(1 + \log(1 + \tfrac{x}{n}) - \tfrac{x}{n}\Big).$$

Dokažte, že takto definovaná funkce je spojitá v bodě 0. Dále dokažte, že funkce f má vlastní derivaci v bodě $\frac{1}{2}$ a vyjádřete $f'(\frac{1}{2})$ jako součet číselné řady.
(*Hint: použijte Větu o záměně sumy a derivace, spojitost v bodě* 0 *odvoďte z existence vlastní derivace.*)

Příklad 7 (15 bodů). Nechť je dána množina

$$M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \colon 2x^2 + y^2 + z^2 \le 25,\ z > 1,\ y < 0\}$$

Spočtěte míru množiny $\lambda^3(M)$.
(*Hint: použijte zobecněné sférické souřadnice tak, aby bylo* $2x^2 + y^2 + z^2 = r^2$*. Při přepočtu mezí se nezalekněte funkce* arcsin.)

Příklad 8 (12 bodů). Spočítejte následující Lebesgueův-Stieltjesův integrál ($[\cdot]$ značí celou část)

$$\int_{[3,5]} [2x] \, \mathrm{d}g(x), \qquad \text{kde } g(x) = \begin{cases} x^2 - 6, & x \in [3, 4) \\ 11, & x = 4 \\ 8 + x, & x \in (4, 5) \\ 15 & x = 5. \end{cases}$$

Kalkulus 2, ZS 2024-2025
Zadání písemné části zkoušky - termín 27.1.

Příklad 9 (15 bodů)**.** Je dána funkce

$$f(x,y) := \log(1+x) + \log(2y)$$

na množině $M = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon\ x \geq 0, y \geq \frac{1}{3}, x^2 + 2y^2 = 1\}$. Vypočtěte globální extrémy f na M.
(*Při porovnávání kandidátů na extrém můžete použít následující přibližné hodnoty:*
$f(0, \frac{1}{\sqrt{2}}) \approx 0.3$, $f(\sqrt{\frac{7}{9}}, \frac{1}{3}) \approx 0.2$ *a* $f(\frac{1}{2}, \sqrt{\frac{3}{8}}) \approx 0.6$.)

Příklad 10 (10 bodů)**.** Nalezněte součet řady

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)^2}{3^n}.$$

(Pečlivě odůvodňujte jednotlivé kroky výpočtu. Součet řady $\sum_{n=1}^{\infty} nx^n$ z přednášky nelze použít jako "známý", budete–li něco takového potřebovat, dokažte/spočtěte to.)

Příklad 11 (11 bodů)**.** Nechť je dána množina

$$M := \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon \frac{x^2}{3} + (y-2)^2 \leq 9,\ \sqrt{3\left(\frac{x^2}{3} + (y-2)^2\right)} \cdot x \leq 9(y-2),\ x > 0,\ y > 2\right\}.$$

Spočtěte míru množiny $\lambda^2(M)$.
(*Hint: použijte posunuté zobecněné polární souřadnice tak, aby* $\frac{x^2}{3} + (y-2)^2 = r^2$.)

Příklad 12 (14 bodů)**.** Uvažujme funkci

$$F(a) := \int_0^\infty \frac{\log(ax)}{1+x^2}\,\mathrm{d}x, \qquad a > 0.$$

- S pomocí věty o integrálu závislém na parametru dokažte, že $F(a) \in \mathbb{R}$ pro $a > 0$ a vyjádřete $F'(a)$ pro $a > 0$ pomocí integrálu.
- Výpočtem ověřte, že $F(1) = 0$
  (*Hint: s pomocí substituce* $x = \frac{1}{t}$ *ukažte, že* $\int_0^1 \frac{\log x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = -\int_1^\infty \frac{\log x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$ *a z toho pak rovnost* $F(1) = 0$ *odvoďte.*)
- Spočtěte hodnotu integrálu $F'(a)$ pro $a > 0$ z prvního kroku. Dále nalezněte primitivní funkci k $F'(a)$ a určete hodnotu integrálu $F(a)$ pro $a > 0$.

Kalkulus 2, ZS 2024-2025
Zadání písemné části zkoušky - termín 3.2.

Příklad 13 (14 bodů)**.** Nalezněte lokální extrémy funkce
$$f(x,y) := \frac{1}{\sqrt{-x^4 - 2y^4 + 2xy^2}}.$$

Příklad 14 (14 bodů)**.** Nechť je funkce f dána předpisem
$$f(x) := \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2} + \cos x\right)^n.$$

- Zjistěte, pro která $x \in [0, 2\pi]$ je $f(x) \in \mathbb{R}$.
- Dokažte, že funkce f má vlastní derivaci v bodě $\frac{3}{2}\pi$ a vyjádřete $f'(\frac{3}{2}\pi)$ jako součet číselné řady.
- Dokažte, že funkce f má vlastní derivaci v v intervalu $(\frac{4}{3}\pi, \frac{3}{2}\pi)$ a rozhodněte, zda je funkce f na intervalu $(\frac{4}{3}\pi, \frac{3}{2}\pi)$ rostoucí, nebo klesající.

Příklad 15 (10 bodů)**.** Nechť je dána množina
$$M := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \tfrac{x^2}{4} + (y-1)^2 \leq 1,\ 0 \leq z < 1 - \tfrac{x^2}{4} - (y-1)^2,\ x > 0,\ y < 1\}.$$
Spočtěte integrál
$$\int_M \exp\Big(-(\tfrac{x^2}{4} + (y-1)^2) - z\Big)\, d\lambda^3.$$
(*Hint: použijte zobecněné válcové souřadnice tak, aby bylo* $\frac{x^2}{4} + (y-1)^2 = r^2$.)

Příklad 16 (12 bodů)**.** Uvažujme funkci
$$F(a) := \int_0^{\infty} \frac{\exp(-\frac{x^2}{a})}{(x+1)^4}\, dx, \qquad a > 0.$$

- Dokažte, že $F(a) \in \mathbb{R}$ pro $a > 0$.
- Dokažte, že funkce F je spojitá na $(0, \infty)$.
- Vyjádřete $F'(a)$ pro $a > 0$ a určete, zda je funkce rostoucí/klesající na $(0, \infty)$.

Kalkulus 2, ZS 2024-2025
Zadání písemné části zkoušky - termín 10.2.

Příklad 17 (13 bodů)**.** Je dána funkce

$$f(x,y) := \exp\Big(xy + x^2 - 2y + 3\Big)$$

na množině $M = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon\ x \in [0,4],\ y \in [-5,0],\ y \leq -\frac{5}{4}x\}$.
Vypočtěte globální extrémy f na M.

(*Při porovnávání kandidátů na extrém můžete použít následující hodnoty:*
$f(2,-4) = \exp(7),\ f(4,-5) = \exp(9),\ f(\frac{5}{2},-5) = \exp(\frac{27}{4})$.)

Příklad 18 (12 bodů)**.** Nechť jsou funkce $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$ definované předpisem

$$f_n(x) = \frac{(nx+2)^2}{n^2x^2+4} - 1, \quad x \in \mathbb{R}.$$

- Je pravda, že $f_n \rightrightarrows 0$ na intervalu $[0,1]$?
- Dokažte, že funkce $f(x) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f_n(x)}{n}$ je spojitá v bodě 5.

Příklad 19 (13 bodů)**.** Nechť je dána množina

$$M := \Big\{(x,y) \colon y > 0,\ (x^2+y^2)^2 \leq 2xy < \frac{x^2+y^2}{\sqrt{2}}\Big\}.$$

Spočtěte integrál $\int_M (x^2 - y^2)\, \mathrm{d}\lambda^2(x,y)$.
(*Hint: použijte polární souřadnice. Při přepočtu mezí nezapomeňte, že podmínka* $r^4 \leq 2r^2 \sin\alpha\cos\alpha$ *implikuje, že* $\sin\alpha\cos\alpha \geq 0$. *Příklad je jednodušší spočítat, pokud budete integrovat* $\int\int \ldots dr\, d\alpha$ *a ne* $\int\int \ldots d\alpha\, dr$, *tj. pro přepočet mezí je vhodné nejprve určit jaké jsou přípustné hodnoty* α *a pak až určit interval (závislý na hodnotě* α*) odkud je* r.)

Příklad 20 (12 bodů)**.** Spočítejte následující Lebesgueův-Stieltjesův integrál ($[\cdot]$ značí celou část)

$$\int_{[2\pi,3\pi]} f(x)\, \mathrm{d}([2\sin x]x), \qquad \text{kde } f(x) = \begin{cases} 0, & x = 2\pi \\ 2, & x \in (2\pi, 3\pi) \\ 100, & x = 3\pi. \end{cases}$$

(*Hint: nejprve je potřeba zjistit, pro která* $x \in [2\pi, 3\pi]$ *je* $2\sin x$ *celé číslo a následně v těchto bodech integrál roztrhnout. Můžete bez důkazu použít fakt, že* $[2\sin x]x$ *je rozdílem omezených neklesajících funkcí a tedy lze použít vzorce z Věty "Pravidla pro počítání LS integrálu" z přednášky.*)