1. Úvod

1.1. Výroková logika

Výrok je tvrzení, o kterém má smysl říci, že platí (je pravdivé) nebo že neplatí (je nepravdivé).

Definice. **Negací** $\neg A$ výroku A rozumíme výrok:

Není pravda, že platí A.

Konjukcí $A \& B$ (značíme též $A \wedge B$) výroků A a B rozumíme výrok:

Platí A i B.

Disjunkcí $A \vee B$ výroků A a B rozumíme výrok:

Platí A, nebo B.

Implikací $A \Rightarrow B$ nazýváme výrok:

Pokud platí A, pak platí B.

(A je **postačující podmínka** pro platnost B, B je **nutná podmínka** pro platnost A)

Ekvivalencí $A \Leftrightarrow B$ nazýváme výrok:

Výrok A platí právě tehdy, když platí výrok B.

A	B	$A \& B$	$A \vee B$	$A \Rightarrow B$	$A \Leftrightarrow B$
1	1	1	1	1	1
1	0	0	1	0	0
0	1	0	1	1	0
0	0	0	0	1	1

Výrokovou formou nazýváme výraz $A(x_1, \ldots, x_n)$, z něhož vznikne výrok dosazením prvků $x_1 \in M_1, x_2 \in M_2, \ldots, x_n \in M_n$ z daných množin $M_1, \ldots, M_n$.

Definice. Ať $A(x)$, $x \in M$ je výroková forma.

(i) Výrok „Pro každé $x \in M$ platí $A(x)$“ zapisujeme

$$\forall x \in M: \ A(x).$$

(ii) Výrok „Existuje $x \in M$ takové, že platí $A(x)$“ zapisujeme

$$\exists x \in M: \ A(x).$$

Poznámka. Negace výroků s kvantifikátory

$\neg(\forall x \in M: \ A(x))$ je ekvivalentní s $\exists x \in M: \ \neg A(x)$

$\neg(\exists x \in M: \ A(x))$ je ekvivalentní s $\forall x \in M: \ \neg A(x)$

1.2. Množiny a množinové operace

Množinou rozumíme každé shrnutí navzájem různých objektů (prvků) do jednoho celku

Definice. Ať A a B jsou množiny. Pak

- $A = B$ (A **rovná se** B), pokud A a B mají stejné prvky. V opačném případě píšeme $A \neq B$.
- $A \subset B$ (A **je podmnožinou** B), pokud každý prvek množiny A je také prvkem množiny B (značíme také $A \subseteq B$)
- $\emptyset$ (**prázdná množina**) je množina, která neobsahuje žádný prvek

Je–li $V(x),\ x \in M$ výroková forma a $A \subset M$, pak $B = \{x \in A;\ V(x)\}$ značí množinu prvků z A, které splňují $V(x)$.

Definice. Ať A a B jsou množiny. Pak

- $A \cup B$ (**sjednocení** A **a** B) je množina definovaná jako
$$A \cup B := \{x;\ x \in A\ \vee\ x \in B\}.$$
- $A \cap B$ (**průnik** A **a** B) je množina definovaná jako
$$A \cap B := \{x;\ x \in A\ \&\ x \in B\}.$$
Pokud $A \cap B = \emptyset$, řekneme že A a B jsou **disjunktní**.
- $A \setminus B$ (**rozdíl** A **a** B) je množina definovaná jako
$$A \setminus B := \{x;\ x \in A\ \&\ x \notin B\}.$$
- Je–li $I \neq \emptyset$ množina a $A_i,\ i \in I$ jsou množiny, pak
$$\bigcup_{i\in I} A_i := \{x;\ \exists i \in I:\ x \in A_i\} \qquad \text{a} \qquad \bigcap_{i\in I} A_i := \{x;\ \forall i \in I:\ x \in A_i\}.$$
- Jsou–li $A_1, \dots A_n$ množiny, pak **kartézský součin** $A_1, \dots A_n$ je množina uspořádaných n-tic
$$A_1 \times \ldots \times A_n := \{[a_1, \ldots, a_n];\ a_1 \in A_1, \ldots, a_n \in A_n\}.$$

Tvrzení 1.1 (de Morganova pravidla)**.** *Ať X a I jsou neprázdné množiny a nechť $A_i,\ i \in I$ jsou množiny. Pak*
$$X \setminus \bigcup_{i\in I} A_i = \bigcap_{i\in I}(X \setminus A_i) \qquad a \qquad X \setminus \bigcap_{i\in I} A_i = \bigcup_{i\in I}(X \setminus A_i).$$

Definice. Ať A je množina. Pak **potence** $\mathcal{P}(A)$ je definována jako
$$\mathcal{P}(A) := \{B;\ B \subset A\}.$$

1.3. Relace, zobrazení, funkce

Definice. Ať A a B jsou množiny. **Binární relací** mezi prvky množin A a B rozumíme libovolnou podmnožinu kartézského součinu $A \times B$. Ať $R \subset A \times B$ je binární relace. Místo zápisu $(a, b) \in R$ někdy píšeme aRb. Pokud $A = B$ říkáme, že R je **relace na** A.

Definice. Ať A a B jsou množiny a $R \subset A \times B$ je relace. Relaci $R^{-1} \subset B \times A$ definovanou předpisem
$$[x, y] \in R^{-1} \Leftrightarrow [y, x] \in R$$
nazýváme **inverzní relací** k relaci R.

Definice. Ať A a B jsou množiny. Binární relaci $f \subset A \times B$ nazýváme **zobrazením** (někdy též **funkcí**) z množiny A do množiny B, jestliže platí
$$\forall x \in A\ \forall y_1, y_2 \in B, \big(([x, y_1] \in f\ \&\ [x, y_2] \in f) \Rightarrow y_1 = y_2\big).$$

Definičním oborem zobrazení f nazýváme množinu
$$D(f) = \{x \in A;\ \exists y \in B, [x, y] \in f\}.$$

Oborem hodnot funkce f nazýváme množinu
$$H(f) = \{y \in B;\ \exists x \in A, [x, y] \in f\}.$$

Pro $x \in D(f)$ jediný prvek $y \in B$ pro který je $[x, y] \in f$ se značí $y = f(x)$. Množina $\{[x, f(x)]; x \in D(f)\}$ se nazývá **graf** zobrazení f. Symbol $f : A \to B$ značí zobrazení definované na A s hodnotami v B.

Definice. Nechť A a B jsou množiny a $f\colon A \to B$ je zobrazení.

- **Obraz množiny** $M \subset A$ při zobrazení f je

$$f(M) = \{y \in B;\ \exists x \in M, f(x) = y\}.$$

- **Vzorem** množiny P při zobrazení f je

$$f^{-1}(P) = \{x \in A;\ f(x) \in P\}.$$

Definice. Nechť A a B jsou množiny a $f\colon A \to B$ je zobrazení.

- Řekneme, že f je **prosté** (**injektivní**), jestliže

$$\forall x, y \in A (f(x) = f(y) \Rightarrow x = y).$$

- Řekneme, že f je **na** (**surjektivní**), jestliže

$$\forall y \in B\ \exists x \in A, f(x) = y.$$

- Řekneme, že f je **bijekce** (**vzájemně jednoznačné**), jestliže je zároveň prosté a na.

Definice. Nechť A a B jsou množiny, $f : A \to B$ zobrazení a $C \subset A$. Pak zobrazení $g : C \to B$ definované předpisem $g(x) = f(x)$ pro $x \in C$ nazýváme **zúžením** (**restrikcí**) zobrazení f na množinu C. Zobrazení g označujeme symbolem $f|_C$.

Definice. Nechť f a g jsou zobrazení. Pak zobrazení $g \circ f$ je definováno předpisem $(g \circ f)(x) = g(f(x))$ pro všechna $x \in D(f)$ taková, že $f(x) \in D(g)$. Zobrazení $g \circ f$ nazýváme **složeným zobrazením**, přičemž g nazýváme **vnějším** zobrazením a f nazýváme **vnitřním** zobrazením.

Definice. Nechť A a B jsou množiny a $f : A \to B$ je prosté zobrazení. Pak **inverzní zobrazení** k f je definováno jako inverzní relace k f. Inverzní zobrazení k f značíme f^{-1}.

1.4. Mohutnost množin

Definice.

- Říkáme, že množiny A, B mají **stejnou mohutnost**, jestliže existuje bijekce $f : A \to B$. Píšeme $|A| = |B|$.
- Říkáme, že množina A má **mohutnost menší nebo rovnou mohutnosti** množiny B, jestliže existuje prosté zobrazení $f : A \to B$. Píšeme $|A| \leq |B|$.

Věta 1.2 (Cantor, Schröder, Bernstein)**.** *Ať A a B jsou množiny splňující $|A| \leq |B|$ a zároveň $|B| \leq |A|$. Pak $|A| = |B|$.*

Definice. Říkáme, že množina A je **konečná**, pokud je buď prázdná, nebo existuje $n \in \mathbb{N}$ takové, že A má stejnou mohutnost jako množina $\{1, ..., n\}$. Říkáme, že množina A je **nekonečná**, pokud není konečná. Říkáme, že množina A je **spočetná**, jestliže je konečná nebo má stejnou mohutnost jako $\mathbb{N}$. Nekonečná množina, která není spočetná, se nazývá **nespočetná**.

Tvrzení 1.3 (Vlastnosti spočetných množin)**.**

- *Podmnožina spočetné množiny je spočetná.*
- *Nechť zobrazení $f\colon A \to \mathbb{N}$ je prosté. Potom je množina A spočetná.*
- *Sjednocení spočetně mnoha spočetných množin je spočetné.*
- *Obraz spočetné množiny je spočetná množina.*
- *Každá nekonečná množina obsahuje nekonečnou spočetnou podmnožinu.*

konec 1. přednášky (3.10.2017)

1.5. Zavedení reálných čísel

Množinu reálných čísel $\mathbb{R}$ lze popsat jako množinu, na níž jsou definovány operace sčítání a násobení, které budeme značit obvyklým způsobem, a relace uspořádání ($\leq$), přičemž jsou splněny následující tři skupiny vlastností:

I. Vlastnosti sčítání a násobení a jejich vzájemný vztah.

II. Vztah uspořádání a operací sčítání a násobení.

III. Axiom suprema.

I. Vlastnosti sčítání a násobení a jejich vzájemný vztah

- **Sčítání a násobení jsou asociativní**, tj.

$$\forall x, y, z \in \mathbb{R}: \ (x+y)+z = x+(y+z) \quad \& \quad x(yz) = (xy)z.$$

- **Sčítání a násobení jsou komutativní**, tj.

$$\forall x, y \in \mathbb{R}: \ x+y = y+x \quad \& \quad xy = yx.$$

- **Navzájem jsou obě operace distributivní**, tj.

$$\forall x, y, z \in \mathbb{R}: \ x(y+z) = xy + xz.$$

- **Existence neutrálního prvku vzhledem ke sčítání a k násobení**, tj.

$$\exists 0 \in \mathbb{R}\ \forall x \in \mathbb{R}: \ x+0 = x \quad \& \quad \exists 1 \in \mathbb{R}\ \forall x \in \mathbb{R}: \ x \cdot 1 = x \quad \& \quad 1 \neq 0.$$

- **Existence inverzního prvku vzhledem ke sčítání a vzhledem k násobení**, tj.

$$\forall x \in \mathbb{R}\ \exists z \in \mathbb{R}: \ x+z = 0 \quad \& \quad \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\ \exists z \in \mathbb{R}: \ xz = 1.$$

  Poznámka: inverzní prvek k $x \in \mathbb{R}$ vzhledem ke sčítání (resp. k násobení) je určen jednoznačně a značíme jej $-x$ (resp. x^{-1} nebo také $\frac{1}{x}$).

II. Vztah uspořádání a operací sčítání a násobení

- **“$\leq$” je lineární částečné uspořádání**, tj.

$$\begin{aligned} &\forall x, y, z \in \mathbb{R}: (x \leq y \ \& \ y \leq z) \Rightarrow x \leq z && \text{(tranzitivita)} \\ &\forall x, y \in \mathbb{R}: (x \leq y \ \& \ y \leq x) \Rightarrow x = y && \text{(slabá anitsymetrie)} \\ &\forall x, y \in \mathbb{R}: (x \leq y \ \vee \ y \leq x) && \text{(linearita)} \end{aligned}$$

- **Uspořádání se zachovává sčítáním**, tj.

$$\forall x, y, z \in \mathbb{R}: \ x \leq y \Rightarrow x+z \leq y+z.$$

- **Uspořádání se zachovává násobením kladnými čísly**, tj.

$$\forall x, y \in \mathbb{R}: \ (x \geq 0 \ \& \ y \geq 0) \Rightarrow 0 \leq x \cdot y.$$

III. Axiom suprema

Před formulací axiomu suprema nejprve definujme pomocné pojmy.

Definice. Řekneme, že množina $M \subset \mathbb{R}$ je **omezená shora**, pokud existuje $K \in \mathbb{R}$ takové, že pro každé $x \in M$ je $x \leq K$. Takové číslo K nazýváme **horní závorou** množiny M. Analogicky definujeme pojmy **množina omezená zdola** a **dolní závora**. Řekneme, že množina je **omezená**, pokud je omezená shora i zdola.

Definice. Ať $M \subset \mathbb{R}$. Číslo $S \in \mathbb{R}$ splňující

- S je horní závora množiny M,

- $\forall S' \in \mathbb{R},\ S' < S\ \exists x \in M:\ x > S'$,

nazýváme **supremum** množiny M. Má-li množina supremum, je toto určeno jednoznačně a značíme jej $\sup M$. Pokud je $\sup M \in M$, nazývá se **maximum** (největší prvek) množiny M a značíme jej $\max M$.

- **Axiom suprema**: Každá neprázdná shora omezená množina $\mathbb{R}$ má supremum.

Věta 1.4 (Existence a jednoznačnost množiny reálných čísel)**.** *Existuje čtveřice $(\mathbb{R}, +, \cdot, \leq)$ splňující podmínky I-III, přičemž je těmito podmínkami určena jednoznačně v následujícím smyslu. Pokud čtveřice $(*\mathbb{R}, +^*, \cdot^*, \leq^*)$ splňuje také podmínky I-III, pak existuje bijekce $\varphi : \mathbb{R} \to *\mathbb{R}$ taková, že pro $x, y \in \mathbb{R}$ platí $\varphi(x+y) = \varphi(x) +^* \varphi(y)$, $\varphi(xy) = \varphi(x) \cdot^* \varphi(y)$ a $x \leq y \Leftrightarrow \varphi(x) \leq^* \varphi(y)$.*

1.6. Základní vlastnosti reálných čísel

Definice. Ať $M \subset \mathbb{R}$. Číslo $i \in \mathbb{R}$ splňující

- i je dolní závora množiny M,
- $\forall i' \in \mathbb{R},\ i' > i\ \exists x \in M:\ x < i'$,

nazýváme **infimem** množiny M. Má-li množina M infimum, je toto určeno jednoznačně a značíme je $\inf M$. Pokud je $\inf M \in M$, nazývá se **minimum** (nejmenší prvek) množiny M a značíme jej $\min M$.

Věta 1.5 (existence infima)**.** *Ať $M \subset \mathbb{R}$ je neprázdná zdola omezená množina. Pak existuje infimum množiny M.*

konec 2. přednášky (5.10.2017)

Definice. Pro každé $x \in \mathbb{R}$ definujeme jeho **absolutní hodnotu** jako

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{pokud } x \geq 0, \\ -x, & \text{pokud } x < 0. \end{cases}$$

Věta 1.6 (trojúhelníková nerovnost)**.** *Ať $a, b \in \mathbb{R}$. Pak platí $|a+b| \leq |a| + |b|$, a také $||a| - |b|| \leq |a-b|$.*

Věta 1.7 (existence celé části reálného čísla)**.** *Pro každé $x \in \mathbb{R}$ existuje právě jedno číslo $k \in \mathbb{Z}$ takové, že $k \leq x < k+1$.*

Věta 1.8 (hustota racionálních čísel v $\mathbb{R}$)**.** *Ať $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Pak existuje $q \in \mathbb{Q}$ takové, že $a < q < b$.*

Racionální mocnina

Definice. Ať $x \in \mathbb{R}$.

- Pokud $n \in \mathbb{N}$, pak x^n je zkrácený zápis násobení n čísel rovných x. Dále pro $x \neq 0$ definujeme $x^{-n} = \frac{1}{x^n}$ a $x^0 = 1$.

Mocnina 0^0 není definována.

Věta 1.9 (existence n-té odmocniny)**.** *Pro každé $n \in \mathbb{N}$ a $x \in \mathbb{R}$, $x \geq 0$, existuje právě jedno $y \in \mathbb{R}$, $y \geq 0$, splňující $y^n = x$. Toto číslo se značí $\sqrt[n]{x}$ a čte se n-tá odmocnina čísla x.*

Pro n liché se definuje odmocnina i pro záporná čísla x rovností $\sqrt[n]{x} = -\sqrt[n]{|x|}$.

Definice. Ať $x \in \mathbb{R}$.

- Pokud $p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{N}$ jsou nesoudělná, pak $x^{p/q}$ se definuje jako $x^{p/q} = \sqrt[q]{x^p}$ kdykoliv má výraz vpravo smysl.

Poznámka. Pro $x > 0$ a $n \in \mathbb{N}$ je $\sqrt[q]{x^p} = \sqrt[nq]{x^{np}}$. (Pro $x > 0$ tedy v definici mocniny $x^{p/q}$ nemusejí být p, q nesoudělná.)

konec 3. přednášky (10.10.2017)

2. Limita posloupnosti

2.1. Úvod

Definice. Ať X je množina. **Posloupnost** v X (nebo posloupnost prvků množiny X) je funkce $f : \mathbb{N} \to X$. Značíme $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$. Číslo $f(n) = a_n$ nazveme **n-tým členem** této posloupnosti.

Úmluva. V tomto textu budeme **posloupností** rozumět posloupnost v $\mathbb{R}$.

Definice. Posloupnost $\{a_n\}$ se nazývá

- **rostoucí** (resp. **neklesající**), jestliže $a_n < a_{n+1}$ (resp. $a_n \leq a_{n+1}$) pro všechna $n \in \mathbb{N}$;
- **klesající** (resp. **nerostoucí**), jestliže $a_n > a_{n+1}$ (resp. $a_n \geq a_{n+1}$) pro všechna $n \in \mathbb{N}$;
- **ryze monotónní**, pokud je rostoucí nebo klesající;
- **monotónní** pokud je neklesající nebo nerostoucí;
- **shora omezená**, jestliže množina všech členů této posloupnosti je shora omezená;
- **zdola omezená**, jestliže množina všech členů této posloupnosti je zdola omezená;
- **omezená**, jestliže množina všech členů této posloupnosti je omezená.

Definice. Řekneme, že posloupnost $\{a_n\}$ má **limitu** rovnou reálnému číslu A, jestliže platí

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0 \ \exists n_0 \in \mathbb{N} \ \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 : \ |a_n - A| < \varepsilon.$$

Věta 2.1 (jednoznačnost limity)**.** *Každá posloupnost má nejvýše jednu limitu.*

2.2. Konvergence posloupnosti reálných čísel

Definice. Má-li posloupnost $\{a_n\}$ limitu rovnou číslu $A \in \mathbb{R}$, pak píšeme $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$ nebo jenom $\lim a_n = A$.

Řekneme, že posloupnost $\{a_n\}$ je **konvergentní**, pokud existuje $A \in \mathbb{R}$ takové, že $\lim a_n = A$.

Věta 2.2. *Každá konvergentní posloupnost je omezená.*

Definice. Nechť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je posloupnost. Jestliže $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$ je rostoucí posloupnost přirozených čísel, pak $\{a_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ se nazývá **podposloupností** $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$.

Věta 2.3 (limita podposloupnosti)**.** *Nechť $\{a_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ podposloupnost posloupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$. Jestliže platí $\lim_{n\to\infty} a_n = A \in \mathbb{R}$, pak také $\lim_{k\to\infty} a_{n_k} = A$.*

Věta 2.4 (aritmetika limit)**.** *Nechť $\lim a_n = A \in \mathbb{R}$ a $\lim b_n = B \in \mathbb{R}$. Potom platí:*

(a) $\lim (a_n + b_n) = A + B$,

(b) $\lim (a_n \cdot b_n) = A \cdot B$,

(c) *je-li $B \neq 0$ a $b_n \neq 0$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$, je $\lim(a_n/b_n) = A/B$.*

konec 4. přednášky (12.10.2017)

Věta 2.5 (limita „omezené krát nulové“ posloupnosti)**.** *Nechť $\lim a_n = 0$ a nechť posloupnost $\{b_n\}$ je omezená. Potom $\lim a_n b_n = 0$.*

Vlastnost „skoro“

Výrazem **pro skoro všechna** $n \in \mathbb{N}$ **platí ...** rozumíme „existuje n_0, že pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$ platí...“.

Věta 2.6 (limita a uspořádání)**.** *Nechť* $\lim a_n = A \in \mathbb{R}$ *a* $\lim b_n = B \in \mathbb{R}$.

(a) *Nechť pro skoro všechna* $n \in \mathbb{N}$ *platí* $a_n \geq b_n$. *Potom* $A \geq B$.

(b) *Nechť* $A < B$. *Potom pro skoro všechna* $n \in \mathbb{N}$ *platí* $a_n < b_n$.

Věta 2.7 (o dvou policajtech)**.** *Nechť* $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ *jsou dvě konvergentní posloupnosti a* $\{c_n\}$ *je posloupnost splňující:*

(a) *Pro skoro všechna* $n \in \mathbb{N}$ *platí:* $a_n \leq c_n \leq b_n$,

(b) $\lim a_n = \lim b_n$.

Potom existuje $\lim c_n$ *a platí* $\lim c_n = \lim a_n$.

konec 5. přednášky (17.10.2017)

2.3. Nevlastní limita posloupnosti

Definice. Řekneme, že posloupnost $\{a_n\}$ **má limitu rovnou** ∞ (čteme plus nekonečno), jestliže

$$\forall K \in \mathbb{R}\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 \colon a_n \geq K.$$

Řekneme, že posloupnost $\{a_n\}$ **má limitu rovnou** $-\infty$ (čteme mínus nekonečno), jestliže

$$\forall K \in \mathbb{R}\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 \colon a_n \leq K.$$

Má-li posloupnost limitu rovnou ∞, říkáme, že **diverguje k** ∞. Má-li posloupnost limitu rovnou $-\infty$, říkáme, že **diverguje k** $-\infty$. Má-li posloupnost limitu rovnou plus nebo mínus nekonečnu, říkáme, že **má nevlastní limitu**.

Definice. Rozšířenou reálnou osou budeme nazývat množinu $\mathbb{R} \cup \{\infty, -\infty\}$ a budeme ji značit $\mathbb{R}^*$. Na množinu $\mathbb{R}^*$ rozšíříme aritmetické operace a relaci uspořádání definované na $\mathbb{R}$ následujícím způsobem.

Operace sčítání:

- $\forall a \in \{-\infty\} \cup \mathbb{R} \colon -\infty + a = a + (-\infty) = -\infty$,
- $\forall a \in \mathbb{R} \cup \{\infty\} \colon \infty + a = a + \infty = \infty$,
- $-(\infty) = -\infty, -(-\infty) = \infty$.

Operace násobení:

- $\forall a \in (0, \infty) \cup \{\infty\} \colon a \cdot \infty = \infty \cdot a = \infty$,
- $\forall a \in (0, \infty) \cup \{\infty\} \colon a \cdot (-\infty) = (-\infty) \cdot a = -\infty$,
- $\forall a \in \{-\infty\} \cup (-\infty, 0) \colon a \cdot \infty = \infty \cdot a = -\infty$,
- $\forall a \in \{-\infty\} \cup (-\infty, 0) \colon a \cdot (-\infty) = (-\infty) \cdot a = \infty$,
- $(\infty)^{-1} = 0, (-\infty)^{-1} = 0$.

Relace uspořádání:

- $\forall a \in \mathbb{R} \colon -\infty < a, a < \infty$,
- $-\infty < \infty$.

Absolutní hodnota je na množině $\mathbb{R}^*$ definována předpisem $|x| = \max\{x, -x\}$, a tedy $|\infty| = \infty$, $|-\infty| = \infty$.

Poznámka. Následující výrazy nejsou definovány:

$$\infty + (-\infty), \quad -\infty + \infty, \quad 0 \cdot \infty, \quad \infty \cdot 0, \quad 0 \cdot (-\infty), \quad (-\infty) \cdot 0, \quad \frac{\text{cokoli}}{0}.$$

Definice. Nechť $A \subset \mathbb{R}^*$ a $G \in \mathbb{R}^*$. Předpokládejme, že platí následující podmínky:

(a) $\forall a \in A \colon a \leq G$,

(b) $\forall G' \in \mathbb{R}^*, G' < G \ \exists a \in A \colon G' < a$.

Pak G nazýváme **supremem** množiny A. Podobně definujeme **infimum** množiny A.

Poznámka. Pro neprázdnou a shora omezenou podmnožinu reálných čísel se pojem suprema shoduje s pojmem zavedeným dříve. Supremum shora neomezené množiny je rovno ∞ a supremum prázdné množiny je rovno $-\infty$. Infimum zdola neomezené množiny je rovno $-\infty$ a infimum prázdné množiny je rovno ∞.

Věta 2.8 (jednoznačnost limity podruhé)**.** *Každá posloupnost má nejvýše jednu limitu v* $\mathbb{R}^*$.

Značení. Má-li posloupnost $\{a_n\}$ nevlastní limitu, označujeme hodnotu této limity opět symbolem $\lim a_n$. Píšeme tedy $\lim a_n = \infty$ nebo $\lim a_n = -\infty$.

Poznámka. Pro každou posloupnost reálných čísel $\{a_n\}$ nastává právě jedna z následujících možností:

$$\lim a_n \begin{cases} \text{existuje} \begin{cases} \text{vlastní, tj. je rovna reálnému číslu,} \\ \text{nevlastní, tj. je rovna } \infty \text{ nebo } -\infty, \end{cases} \\ \text{neexistuje.} \end{cases}$$

Definice. Nechť $a, b \in \mathbb{R}^*$, $a \leq b$. Definujeme množiny

$$\begin{aligned} (a,b) &= \{x \in \mathbb{R};\ a < x < b\}, \quad && a, b \in \mathbb{R}^*, \\ [a,b] &= \{x \in \mathbb{R};\ a \leq x \leq b\}, \quad && a, b \in \mathbb{R}, \\ (a,b] &= \{x \in \mathbb{R};\ a < x \leq b\}, \quad && a \in \mathbb{R}^*, b \in \mathbb{R}, \\ [a,b) &= \{x \in \mathbb{R};\ a \leq x < b\}, \quad && a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}^*. \end{aligned}$$

Pak množinu (a,b) nazýváme **otevřeným intervalem**, množinu $[a,b]$ nazýváme **uzavřeným intervalem** a množiny $[a,b)$ a $(a,b]$, nazýváme **polouzavřenými intervaly**.

Definice. Nechť $c \in \mathbb{R}$. Potom **okolím** bodu c rozumíme každou množinu tvaru $B(c, \varepsilon) = (c - \varepsilon, c + \varepsilon)$, kde $\varepsilon \in \mathbb{R},\ \varepsilon > 0$. **Okolím** bodu ∞ rozumíme každou množinu tvaru $B(\infty, \varepsilon) = (\frac{1}{\varepsilon}, \infty)$, kde $\varepsilon \in \mathbb{R},\ \varepsilon > 0$. **Okolím** bodu $-\infty$ rozumíme každou množinu tvaru $B(-\infty, \varepsilon) = (-\infty, -\frac{1}{\varepsilon})$, kde $\varepsilon \in \mathbb{R},\ \varepsilon > 0$.

Poznámka. Věty o limitě podposloupnosti, o limitě a uspořádání a o dvou policajtech platí v nezměněné podobě i tehdy, připustíme-li nevlastní limity.

Věta 2.9 (změna konečně mnoha členů posloupnosti)**.** *Nechť* $\{a_n\}$ *a* $\{b_n\}$ *jsou posloupnosti reálných čísel,* $A \in \mathbb{R}^*$ *a* $\lim a_n = A$. *Nechť pro skoro všechna* $n \in \mathbb{N}$ *platí* $a_n = b_n$. *Pak také* $\lim b_n = A$.

Věta 2.10 (aritmetika limit podruhé)**.** *Nechť* $\{a_n\}$ *a* $\{b_n\}$ *jsou posloupnosti reálných čísel,* $A, B \in \mathbb{R}^*$, $\lim a_n = A$ *a* $\lim b_n = B$. *Potom platí:*

(a) $\lim (a_n + b_n) = A + B$, *pokud je výraz na pravé straně definován,*

(b) $\lim (a_n \cdot b_n) = A \cdot B$, *pokud je výraz na pravé straně definován,*

(c) $\lim a_n / b_n = A/B$, *pokud je* $b_n \neq 0$ *pro každé* $n \in \mathbb{N}$ *a výraz na pravé straně definován.*

konec 6. přednášky (19.10.2017)

Věta 2.11 („$\frac{1}{0^+} = \infty$“)**.** *Nechť* $\{b_n\}$ *je posloupnost reálných čísel, přičemž pro každé* $n \in \mathbb{N}$ *platí* $b_n \neq 0$. *Nechť* $\lim b_n = 0$ *a pro skoro všechna* $n \in \mathbb{N}$ *platí* $b_n > 0$. *Potom* $\lim \frac{1}{b_n} = \infty$.

2.4. Hlubší věty o limitě posloupnosti

Věta 2.12 (limita monotónní posloupnosti)**.** *Každá monotónní posloupnost má limitu. Je-li* $\{a_n\}$ *neklesající, pak* $\lim a_n = \sup\{a_n;\ n \in \mathbb{N}\}$*. Je-li* $\{a_n\}$ *nerostoucí, pak* $\lim a_n = \inf\{a_n;\ n \in \mathbb{N}\}$*.*

Důsledek 2.13. *Každá neklesající a shora omezená (nerostoucí a zdola omezená) posloupnost je konvergentní.*

Definice. Nechť I je interval. Jeho **délkou** rozumíme ∞, je-li I neomezený, a číslo $b - a$, je-li I omezený s koncovými body $a, b \in \mathbb{R}$, $a \leq b$.

Věta 2.14 (Cantorův princip vložených intervalů)**.** *Nechť* $\{I_n\}_{n=1}^{\infty}$ *je posloupnost uzavřených intervalů splňující*

- *pro každé* $n \in \mathbb{N}$ *platí* $I_{n+1} \subset I_n$*,*
- *platí* $\lim \text{délka } I_n = 0$*.*

Potom je množina $\bigcap I_n$ *jednobodová.*

Věta 2.15 (Bolzanova-Weierstrassova věta)**.** *Z každé omezené posloupnosti lze vybrat konvergentní podposloupnost.*

konec 7. přednášky (24.10.2017)

Definice. Nechť $\{a_n\}$ je posloupnost reálných čísel. Pak definujeme

$$\limsup_{n\to\infty} a_n = \begin{cases} \lim\limits_{n\to\infty} \sup\{a_k; k \geq n\}, & \text{jestliže je } \{a_n\} \text{ shora omezená,} \\ \infty, & \text{jestliže je } \{a_n\} \text{ shora neomezená.} \end{cases}$$

Tuto hodnotu nazýváme **limes superior** posloupnosti $\{a_n\}$. Obdobně definujeme **limes inferior** posloupnosti $\{a_n\}$ předpisem

$$\liminf_{n\to\infty} a_n = \begin{cases} \lim\limits_{n\to\infty} \inf\{a_k; k \geq n\}, & \text{jestliže je } \{a_n\} \text{ zdola omezená,} \\ -\infty, & \text{jestliže je } \{a_n\} \text{ zdola neomezená.} \end{cases}$$

Pokud nemůže dojít k nedorozumění, budeme místo symbolů $\limsup_{n\to\infty} a_n$ a $\liminf_{n\to\infty} a_n$ psát pouze $\limsup a_n$ a $\liminf a_n$.

Věta 2.16 (o vztahu limity, limes superior a limes inferior)**.** *Nechť* $\{a_n\}$ *je posloupnost reálných čísel a* $A \in \mathbb{R}^*$*. Potom* $\lim a_n = A$ *právě tehdy, když* $\limsup a_n = \liminf a_n = A$*.*

Definice. Prvek $A \in \mathbb{R}^*$ se nazývá **hromadný bod** posloupnosti $\{a_n\}$, jestliže každé okolí bodu A obsahuje nekonečně mnoho prvků posloupnosti $\{a_n\}$.

Věta 2.17 (o hromadných bodech a podposloupnostech)**.** *Nechť* $\{a_n\}$ *je posloupnost reálných čísel.*

1. *Prvek* $A \in \mathbb{R}^*$ *je hromadným bodem posloupnosti* $\{a_n\}$*, právě když existuje její podposloupnost* $\{a_{k_n}\}$*, která konverguje k bodu* A*.*
2. *Hodnota* $\liminf a_n$ *je nejmenším hromadným bodem posloupnosti* $\{a_n\}$
3. *Hodnota* $\limsup a_n$ *je největším hromadným bodem posloupnosti* $\{a_n\}$

Definice. Nechť $\{a_n\}$ je posloupnost reálných čísel. Řekneme, že $\{a_n\}$ splňuje **Bolzanovu–Cauchyovu podmínku**, jestliže

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall m, n \in \mathbb{N}, n \geq n_0, m \geq n_0 \colon |a_n - a_m| < \varepsilon.$$

Věta 2.18 (Bolzanova–Cauchyova podmínka pro posloupnosti)**.** *Posloupnost* $\{a_n\}$ *má vlastní limitu právě tehdy, když splňuje Bolzanovu–Cauchyovu podmínku.*

konec 8. přednášky (26.10.2017)

Věta 2.19 (Borelova věta)**.** *Nechť* I *je uzavřený interval a* $\mathcal{S}$ *je množina otevřených intervalů taková, že* $I \subset \bigcup \mathcal{S}$*. Potom existuje konečná množina* $\mathcal{S}_0 \subset \mathcal{S}$ *taková, že* $I \subset \bigcup \mathcal{S}_0$*.*

3. Limita a spojitost funkce

3.1. Základní pojmy

Definice. **Funkce** f **jedné reálné proměnné** (dále jen **funkce**) je zobrazení $f : M \to \mathbb{R}$, kde $M \subset \mathbb{R}$.

Definice. Nechť $M \subset \mathbb{R}$. Funkce $f : M \to \mathbb{R}$ je **rostoucí** na M, jestliže pro každou dvojici $x, y \in M$, $x < y$, platí $f(x) < f(y)$. Obdobně definujeme funkci **klesající**, **nerostoucí** a **neklesající**. Řekneme, že funkce f je **monotónní** na M, jestliže je buď nerostoucí nebo neklesající na M. Řekneme, že funkce f je **ryze monotónní** na M, jestliže je buď rostoucí, nebo klesající na M.

Definice. Nechť f je funkce. Řekneme, že f je **lichá**, jestliže pro každé $x \in D(f)$ platí $-x \in D(f)$ a $f(-x) = -f(x)$. Nechť f je funkce. Řekneme, že f je **sudá**, jestliže pro každé $x \in D(f)$ platí $-x \in D(f)$ a $f(-x) = f(x)$. Řekneme, že f je **periodická** s periodou $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$, jestliže pro každé $x \in D(f)$ platí $x + a \in D(f)$, $x - a \in D(f)$ a $f(x + a) = f(x - a) = f(x)$.

Definice. Nechť f je funkce a $M \subset D(f)$. Řekneme, že f je **omezená** (resp. **shora omezená** nebo **zdola omezená**) na M, jestliže existuje $K \in \mathbb{R}$ takové, že pro každé $x \in M$ platí $|f(x)| \leq K$ (resp. $f(x) \leq K$ nebo $f(x) \geq K$).

Definice. Nechť $c \in \mathbb{R}^*$. **Prstencovým okolím bodu** c nazýváme libovolnou množinu tvaru

$$P(c, \varepsilon) = \begin{cases} B(c, \varepsilon) \setminus \{c\} & \text{pokud } c \in \mathbb{R}; \\ B(c, \varepsilon) & \text{pokud } c \in \{\infty, -\infty\}, \end{cases}$$

kde $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$.

Nechť $c \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$. **Pravým okolím bodu** c nazýváme libovolnou množinu tvaru

$$B_+(c, \varepsilon) = \begin{cases} [c, c + \varepsilon) & \text{pokud } c \in \mathbb{R}; \\ B(c, \varepsilon) & \text{pokud } c = -\infty, \end{cases}$$

a **pravým prstencovým okolím bodu** c nazýváme libovolnou množinu tvaru

$$P_+(c, \varepsilon) = \begin{cases} (c, c + \varepsilon) & \text{pokud } c \in \mathbb{R}; \\ B(c, \varepsilon) & \text{pokud } c = -\infty, \end{cases}$$

kde $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$.

Nechť $c \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$. **Levým okolím bodu** c nazýváme libovolnou množinu tvaru

$$B_-(c, \varepsilon) = \begin{cases} (c - \varepsilon, c] & \text{pokud } c \in \mathbb{R}; \\ B(c, \varepsilon) & \text{pokud } c = \infty, \end{cases}$$

a **levým prstencovým okolím bodu** c nazýváme libovolnou množinu tvaru

$$P_-(c, \varepsilon) = \begin{cases} (c - \varepsilon, c) & \text{pokud } c \in \mathbb{R}; \\ B(c, \varepsilon) & \text{pokud } c = \infty, \end{cases}$$

kde $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$.

3.2. Elementární funkce

Abychom mohli formálně zavést elementární funkce, budeme potřebovat pojem "limita funkce".

Definice. Řekneme, že prvek $A \in \mathbb{R}^*$ je **limitou funkce** f **v bodě** $c \in \mathbb{R}^*$, jestliže

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0 \ \exists \delta \in \mathbb{R}, \delta > 0 \ \forall x \in P(c, \delta) : \ f(x) \in B(A, \varepsilon).$$

Tento složitý pojem budem dále rozvíjet a poznávat později. Předtím ale zavedeme některé základní funkce, s kterými budeme dále pracovat při počítání příkladů.

Věta 3.1 (zavedení exponenciální funkce)**.** *Existuje právě jedna funkce **exponenciála** (budeme ji značit* exp*) splňující podmínky*

(E1) $D(\exp) = \mathbb{R}$

(E2) $\forall x, y \in \mathbb{R}\colon \ \exp(x+y) = \exp x \cdot \exp y,$

(E3) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\exp x - 1}{x} = 1.$

Věta 3.2 (vlastnosti exponenciální funkce)**.** *Následující vlastnosti exponenciální funkce je možné odvodit pouze z vlastností (E1) a (E2).*

- *Platí* $\exp(0) = 1.$
- *Pro každé* $x \in \mathbb{R}$ *platí* $\exp(-x) = \frac{1}{\exp x}.$
- *Pro každé* $x \in \mathbb{R}$ *platí* $\exp x > 0.$
- *Funkce* exp *je rostoucí na* $\mathbb{R}$.
- *Platí* $\lim\limits_{x\to\infty} \exp x = \infty$ *a* $\lim\limits_{x\to-\infty} \exp x = 0.$
- *Platí* $H(\exp) = (0, \infty).$

Definice.

(a) Funkce $\log\colon (0,\infty) \to \mathbb{R}$ je definována jako inverzní funkce k funkci exp. Nazývá se **přirozeným logaritmem**.

(b) Je-li $a \in (0,\infty) \setminus \{1\}$, pak definujeme

$$\log_a(x) = \frac{\log(x)}{\log(a)}, \quad x \in (0,\infty).$$

Funkci $\log_a$ nazýváme **logaritmem o základu** a.

(c) Nechť $a \in \mathbb{R}, a > 0$, a $b \in \mathbb{R}$. Potom definujeme reálné číslo a^b předpisem $a^b = \exp(b\log(a))$.

(d) Nechť $a > 0$. Potom funkci $x \mapsto a^x$, $x \in \mathbb{R}$, nazýváme **obecnou mocninou**.

(e) Číslo e definujeme jako $e = \exp(1)$, nazýváme jej **Eulerova konstanta**.

Poznámka. Pro každé $x, y \in \mathbb{R}$ platí

$$(\exp(y))^x = \exp(x\log(\exp(y)) = \exp(xy).$$

Speciálně (pro $y = 1$) dostáváme

$$e^x = (\exp(1))^x = \exp(x)$$

pro každé $x \in \mathbb{R}$. Místo $\exp x$ můžeme tedy psát e^x.

Věta 3.3 (vlastnosti logaritmu)**.** *Funkce* log *má následující vlastnosti.*

- *Platí* $D(\log) = (0,\infty).$
- *Platí* $H(\log) = \mathbb{R}.$
- *Funkce* log *je rostoucí na* $(0,\infty)$.
- *Pro každé* $x, y \in (0,\infty)$ *platí* $\log(xy) = \log(x) + \log(y).$
- *Pro každé* $a \in (0,\infty)$ *a* $b \in \mathbb{R}$ *platí* $\log a^b = b\log a.$
- *Platí* $\lim\limits_{x\to 0_+} \log x = -\infty$*,* $\lim_{x\to\infty} \log x = \infty$ *a* $\lim_{x\to 1} \frac{\log x}{x-1} = \lim_{x\to 0} \frac{\log(1+x)}{x} = 1.$

Věta 3.4 (zavedení sinu a čísla π)**.** *Existuje jediné kladné reálné číslo (budeme ho značit π) a jediná funkce* ***sinus*** *(budeme ji značit* $\sin$*), která má následující vlastnosti:*

(S1) $D(\sin) = \mathbb{R}$

(S2) $\sin$ *je rostoucí na* $[-\pi/2, \pi/2]$,

(S3) $\sin 0 = 0$,

(S4) $\forall x, y \in \mathbb{R}: \ \sin(x+y) = \sin x \sin(\frac{\pi}{2} - y) + \sin(\frac{\pi}{2} - x) \sin y$,

(S5) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$.

Definice. Funkci **kosinus** značíme cos a definujeme předpisem

$$\cos x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Věta 3.5 (vlastnosti funkcí sin a cos)**.** *Funkce sinus a kosinus mají následující vlastnosti:*

- $\sin$ *je lichá funkce a* $\cos$ *je sudá funkce,*
- *Platí* $\sin x = 0$*, právě když* $x = k\pi$ *pro* $k \in \mathbb{Z}$ *a* $\cos x = 0$*, právě když* $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ *pro* $k \in \mathbb{Z}$*.*
- *Pro každé* $x \in \mathbb{R}$ *platí* $\sin(x + \frac{\pi}{2}) = \cos x$ *a* $\cos(x + \frac{\pi}{2}) = -\sin x$*. Funkce* $\sin$ *a* $\cos$ *jsou* π*-antiperiodické (tedy* $\sin(x+\pi) = -\sin x$ *a* $\cos(x+\pi) = -\cos x$ *pro každé* $x \in \mathbb{R}$*), a tedy* 2π*-periodické.*
- $\forall x, y \in \mathbb{R}: \ \sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y \quad \& \quad \cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$,
- $\forall x \in \mathbb{R}: \ \sin^2 x + \cos^2 x = 1 \quad \& \quad \sin(2x) = 2 \sin x \cos x \quad \& \quad \cos(2x) = \cos^2 x - \sin^2 x$,
- $\cos(0) = \sin(\pi/2) = 1$, $\cos(\pi/6) = \sin(\pi/3) = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\cos(\pi/4) = \sin(\pi/4) = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\cos(\pi/3) = \sin(\pi/6) = \frac{1}{2}$

Definice. Funkce **tangens** a **kotangens** značíme tg a cotg a definujeme předpisy

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} x &= \frac{\sin x}{\cos x}, & x &\in \mathbb{R} \setminus \left\{ \tfrac{\pi}{2} + k\pi;\ k \in \mathbb{Z} \right\}, \\ \operatorname{cotg} x &= \frac{\cos x}{\sin x}, & x &\in \mathbb{R} \setminus \{ k\pi;\ k \in \mathbb{Z} \}. \end{aligned}$$

Funkce sin, cos, tg a cotg nazýváme **goniometrickými funkcemi**.

Věta 3.6 (vlastnosti funkce tangens)**.** *Funkce* tg *je lichá,* π*-periodická a rostoucí na* $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$*. Platí* $\lim_{x\to \frac{\pi}{2}_-} \operatorname{tg} x = \infty$ *a* $\lim_{x\to -\frac{\pi}{2}_+} \operatorname{tg} x = -\infty$.

Věta 3.7 (vlastnosti funkce kotangens)**.** *Funkce* cotg *je lichá,* π*-periodická a klesající na* $(0, \pi)$*. Platí* $\lim_{x\to 0_+} \operatorname{cotg} x = \infty$ *a* $\lim_{x\to \pi_-} \operatorname{cotg} x = -\infty$.

Definice. Cyklometrické funkce arkussinus, **arkuskosinus**, **arkustangens** a **arkuskotangens** značíme arcsin, arccos, arctg a arccotg a definujeme předpisy

$$\begin{aligned} \arcsin &= \left(\sin|_{[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]}\right)^{-1}; \\ \arccos &= \left(\cos|_{[0,\pi]}\right)^{-1}; \\ \operatorname{arctg} &= \left(\operatorname{tg}|_{(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})}\right)^{-1}; \\ \operatorname{arccotg} &= \left(\operatorname{cotg}|_{(0,\pi)}\right)^{-1}. \end{aligned}$$

Věta 3.8 (vlastnosti cyklometrických funkcí)**.**

(a) *Funkce* $\arcsin$ *je lichá a rostoucí na* $[-1, 1]$*. Platí* $H(\arcsin) = [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.
(b) *Funkce* $\arccos$ *je klesající na* $[-1, 1]$*. Platí* $H(\arccos) = [0, \pi]$.
(c) *Funkce* arctg *je lichá a rostoucí na* $\mathbb{R}$*. Platí* $H(\operatorname{arctg}) = (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$.
(d) *Funkce* $\operatorname{arccotg}$ *je klesající na* $\mathbb{R}$*. Platí* $H(\operatorname{arccotg}) = (0, \pi)$.

konec 9. přednášky (2.11.2017)

3.3. Limita funkce

Definice. Řekneme, že prvek $A \in \mathbb{R}^*$ je **limitou funkce** f **v bodě** $c \in \mathbb{R}^*$, jestliže

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0 \ \exists \delta \in \mathbb{R}, \delta > 0 \ \forall x \in P(c, \delta): \ f(x) \in B(A, \varepsilon).$$

Věta 3.9 (jednoznačnost limity funkce)**.** *Nechť $c \in \mathbb{R}^*$ a nechť f je funkce. Potom f má v c nejvýše jednu limitu.*

Značení. Má-li funkce f v bodě $c \in \mathbb{R}^*$ limitu $A \in \mathbb{R}^*$, pak píšeme

$$\lim_{x \to c} f(x) = A.$$

Poznámka. Nechť $c \in \mathbb{R}^*$, $A \in \mathbb{R}^*$ a f je funkce. Mohou nastat tyto případy:

$$\lim_{x \to c} f(x) \begin{cases} \text{existuje vlastní} & \text{pokud } \lim_{x \to c} f(x) = A \in \mathbb{R}, \\ \text{existuje nevlastní} & \text{pokud } \lim_{x \to c} f(x) = A \in \{-\infty, \infty\}, \\ \text{neexistuje.} \end{cases}$$

Definice. (a) Nechť $A \in \mathbb{R}^*$, $c \in \{-\infty\} \cup \mathbb{R}$. Řekneme, že funkce f má v bodě c **limitu zprava** rovnou A, jestliže

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0 \, \exists \delta \in \mathbb{R}, \delta > 0 \, \forall x \in P_+(c, \delta) \colon f(x) \in B(A, \varepsilon).$$

(b) Nechť $A \in \mathbb{R}^*$, $c \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$. Řekneme, že funkce f má v bodě c **limitu zleva** rovnou A, jestliže

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0 \, \exists \delta \in \mathbb{R}, \delta > 0 \, \forall x \in P_-(c, \delta) \colon f(x) \in B(A, \varepsilon).$$

Poznámka. Je-li $c \in \mathbb{R}^*$ a f je funkce, potom f má v c nejvýše jednu limitu zprava a nejvýše jednu limitu zleva.

Značení. Má-li funkce f v bodě $c \in \mathbb{R}^*$ limitu zprava nebo zleva rovnou $A \in \mathbb{R}^*$, pak píšeme po řadě

$$\lim_{x \to c_+} f(x) = A \quad \text{nebo} \quad \lim_{x \to c_-} f(x) = A.$$

Věta 3.10 (vztah limity funkce a jednostranných limit)**.** *Funkce f má v bodě $c \in \mathbb{R}$ limitu $A \in \mathbb{R}^*$ právě tehdy, když má v bodě c limitu zprava i zleva a hodnoty těchto jednostranných limit se rovnají A.*

Definice. Nechť $c \in \mathbb{R}$. Řekneme, že funkce f je **spojitá** v bodě c, jestliže $\lim_{x \to c} f(x) = f(c)$. Řekneme, že funkce f je v bodě c **spojitá zprava** (**zleva**), jestliže $\lim_{x \to c_+} f(x) = f(c)$ ($\lim_{x \to c_-} f(x) = f(c)$).

Poznámka. Nechť $c \in \mathbb{R}$ a nechť f je funkce. Pak f je spojitá v bodě c právě tehdy, když

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0 \ \exists \delta \in \mathbb{R}, \delta > 0 \ \forall x \in \mathbb{R}: \ |x - c| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(c)| < \varepsilon.$$

Příklady. (a) Nechť $a \in \mathbb{R}$ a nechť pro každé $x \in \mathbb{R}$ platí $f(x) = a$. Funkci f nazýváme **konstantní** funkcí. Potom pro každé $c \in \mathbb{R}^*$ platí

$$\lim_{x \to c} f(x) = a.$$

(b) Definujme funkci

$$\operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} 1 & \text{pro } x > 0, \\ 0 & \text{pro } x = 0, \\ -1 & \text{pro } x < 0. \end{cases}$$

Potom

$$\lim_{x \to 0_+} \operatorname{sgn} x = 1 \quad \text{a} \quad \lim_{x \to 0_-} \operatorname{sgn} x = -1,$$

a tedy $\lim_{x \to 0} \operatorname{sgn} x$ neexistuje. Funkce sgn je spojitá v každém bodě $x \in \mathbb{R}$, $x \neq 0$, a v bodě 0 je nespojitá.

3.4. Věty o limitách

Věta 3.11 (Heineova věta)**.** *Nechť $c \in \mathbb{R}^*$, $A \in \mathbb{R}^*$ a funkce f je definována na nějakém prstencovém okolí bodu c. Pak jsou následující dva výroky ekvivalentní.*

(i) *Platí* $\lim_{x\to c} f(x) = A$.

(ii) *Pro každou posloupnost $\{x_n\}$ splňující $x_n \in D(f)$, $x_n \neq c$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$ a* $\lim_{n\to\infty} x_n = c$, *platí* $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = A$.

Věta 3.12 (Heineova věta pro spojitost)**.** *Nechť $c \in \mathbb{R}$ a funkce f je definována na nějakém okolí bodu c. Pak jsou následující dva výroky ekvivalentní.*

(i) *Funkce f je spojitá v bodě c.*

(ii) *Pro každou posloupnost $\{x_n\}$ splňující $x_n \in D(f)$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$ a* $\lim_{n\to\infty} x_n = c$, *platí* $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(c)$.

konec 10. přednášky (7.11.2017)

Poznámka. Věty 3.11 i 3.12 platí po odpovídající úpravě i pro jednostranné limity.

Věta 3.13 (aritmetika limit funkcí)**.** *Nechť $c \in \mathbb{R}^*$, $A \in \mathbb{R}^*$ a $B \in \mathbb{R}^*$. Nechť f a g jsou funkce a platí* $\lim_{x\to c} f(x) = A$ *a* $\lim_{x\to c} g(x) = B$. *Potom*

(a) $\lim_{x\to c}(f(x) + g(x)) = A + B$, *je-li výraz na pravé straně definován,*

(b) $\lim_{x\to c}(f(x)g(x)) = AB$, *je-li výraz na pravé straně definován,*

(c) $\lim_{x\to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{A}{B}$, *je-li výraz na pravé straně definován.*

Věta 3.14 (spojitost a aritmetické operace)**.** *Nechť $c \in \mathbb{R}$ a nechť jsou funkce f a g spojité v bodě c. Potom jsou funkce $f + g$ a fg spojité v bodě c. Je-li navíc $g(c) \neq 0$, pak také funkce $\frac{f}{g}$ je spojitá v bodě c.*

Definice. Nechť $J \subset \mathbb{R}$ je nedegenerovaný interval (neboli obsahuje nekonečně mnoho bodů). Řekneme, že funkce $f\colon J \to \mathbb{R}$ je **spojitá na intervalu** J, jestliže platí:

- f je spojitá v každém vnitřním bodě J,
- f je spojitá zprava v levém krajním bodě intervalu J, pokud tento bod patří do J,
- f je spojitá zleva v pravém krajním bodě intervalu J, pokud tento bod patří do J.

Věta 3.15 (Spojitost elementárních funkcí)**.** *Funkce* $|\cdot|$, exp, log, sin, cos, tg, cotg, arcsin, arccos, arctg *a* arccotg *jsou spojité na svých definičních oborech.*

Věta 3.16 (limita složené funkce)**.** *Nechť $c, D, A \in \mathbb{R}^*$. Nechť funkce f a g splňují* $\lim_{x\to c} g(x) = D$ *a* $\lim_{y\to D} f(y) = A$. *Předpokládejme, že je splněna alespoň jedna z následujících dvou podmínek:*

(P) *existuje $\eta > 0$ takové, že pro každé $x \in P(c, \eta)$ platí $g(x) \neq D$,*

(S) *funkce f je spojitá v bodě D.*

Potom platí

$$\lim_{x\to c} (f \circ g)(x) = A.$$

Poznámky. (a) Je-li $D \in \{-\infty, \infty\}$, pak je podmínka (P) automaticky splněna. Naopak podmínka (S) nemůže být splněna.

(b) Funkce g, která je na nějakém prstencovém okolí bodu c ryze monotónní, splňuje podmínku (P).

konec 11. přednášky (9.11.2017)

Věta 3.17 (vlastní limita funkce a omezenost)**.** *Nechť funkce f má vlastní limitu v bodě $c \in \mathbb{R}^*$. Pak existuje $\delta > 0$, takové, že f je na $P(c, \delta)$ omezená.*

Věta 3.18 (limita funkce a uspořádání)**.** *Nechť $c \in \mathbb{R}^*$ a nechť f, g, h jsou funkce.*

(a) Nechť

$$\lim_{x \to c} f(x) > \lim_{x \to c} g(x).$$

Pak existuje $\delta > 0$ takové, že platí

$$\forall x \in P(c, \delta) \colon f(x) > g(x).$$

(b) Nechť existuje $\delta > 0$ takové, že platí

$$\forall x \in P(c, \delta) \colon f(x) \leq g(x).$$

Nechť existuje $\lim_{x \to c} f(x)$ a $\lim_{x \to c} g(x)$. Potom platí

$$\lim_{x \to c} f(x) \leq \lim_{x \to c} g(x).$$

(c) Nechť existuje $\delta > 0$ takové, že platí

$$\forall x \in P(c, \delta) \colon f(x) \leq h(x) \leq g(x).$$

Nechť $\lim_{x \to c} f(x) = \lim_{x \to c} g(x)$. Potom existuje rovněž $\lim_{x \to c} h(x)$ a všechny tři limity jsou si rovny.

Důsledek 3.19 (limita „omezené krát nulové“ funkce)**.** *Nechť $c \in \mathbb{R}^*$ a nechť f, g jsou funkce. Pokud $\lim_{x \to c} f(x) = 0$ a g je omezená v okolí bodu c, pak $\lim_{x \to c} f(x)g(x) = 0$.*

Poznámka. Uvedené věty platí po odpovídajících úpravách i pro jednostranné limity.

Věta 3.20 (limita monotónní funkce)**.** *Nechť $a, b \in \mathbb{R}^*$, $a < b$. Nechť funkce f je monotónní na intervalu (a, b). Potom existují $\lim_{x \to a_+} f(x)$ a $\lim_{x \to b_-} f(x)$, přičemž platí:*

- *Je-li f na (a, b) neklesající, pak*

$$\lim_{x \to a_+} f(x) = \inf f((a, b)) \quad a \quad \lim_{x \to b_-} f(x) = \sup f((a, b)).$$

- *Je-li f na (a, b) nerostoucí, pak*

$$\lim_{x \to a_+} f(x) = \sup f((a, b)) \quad a \quad \lim_{x \to b_-} f(x) = \inf f((a, b)).$$

3.5. Funkce spojité na intervalu

Věta 3.21 (Bolzanova věta o nabývání mezihodnot)**.** *Nechť funkce f je spojitá na intervalu $[a, b]$ a $f(a) < f(b)$. Pak pro každé $y \in (f(a), f(b))$ existuje $\xi \in (a, b)$ takové, že platí $f(\xi) = y$.*

Poznámka. Věta 3.21 platí obdobně v případě, kdy $f(a) > f(b)$.

Věta 3.22 (spojitý obraz intervalu)**.** *Nechť J je interval. Nechť funkce $f \colon J \to \mathbb{R}$ je spojitá na J. Potom je množina $f(J)$ interval.*

konec 12. přednášky (14.11.2017)

Definice. Nechť $M \subset \mathbb{R}$, $x \in M$ a funkce f je definována alespoň na M.

- Řekneme, že f nabývá v bodě x **maxima** (respektive **minima**) **na** M, jestliže platí

$$\forall y \in M \colon f(y) \leq f(x) \qquad (\text{respektive } \forall y \in M \colon f(y) \geq f(x)).$$

Bod x pak nazýváme **bodem maxima** (respektive **bodem minima**) funkce f na množině M.

- Řekneme, že f nabývá v bodě x **lokálního maxima** (respektive **lokálního minima**) **vzhledem k** M, jestliže existuje $\delta > 0$ takové, že

$$\forall y \in B(x,\delta) \cap M \colon f(y) \leq f(x) \qquad \text{(respektive } \forall y \in B(x,\delta) \cap M \colon f(y) \geq f(x)\text{)}.$$

Bod x pak nazýváme **bodem lokálního maxima** (respektive **bodem lokálního minima**) funkce f na množině M.

- Řekneme, že f nabývá v bodě x **ostrého lokálního maxima** (respektive **ostrého lokálního minima**) **vzhledem k** M, jestliže existuje $\delta > 0$ takové, že

$$\forall y \in P(x,\delta) \cap M \colon f(y) < f(x) \qquad \text{(respektive } \forall y \in P(x,\delta) \cap M \colon f(y) > f(x)\text{)}.$$

Bod x pak nazýváme **bodem ostrého lokálního maxima** (respektive **ostrého lokálního minima**) funkce f na množině M.

- Bodem **extrému** budeme rozumět bod maxima či minima. Bodem **lokálního extrému** budeme rozumět bod lokálního maxima či lokálního minima.

Věta 3.23 (existence extrémů)**.** *Nechť $a, b \in \mathbb{R}, a < b$, a f je spojitá funkce na intervalu $[a,b]$. Potom f nabývá na $[a,b]$ svého maxima i minima.*

Důsledek 3.24 (omezenost spojité funkce na uzavřeném intervalu)**.** *Nechť $a, b \in \mathbb{R}, a < b$, a f je spojitá funkce na intervalu $[a,b]$. Potom je f na $[a,b]$ omezená.*

Věta 3.25 (spojitost inverzní funkce)**.** *Nechť f je spojitá a rostoucí (klesající) funkce na intervalu J. Potom funkce f^{-1} je spojitá a rostoucí (klesající) na intervalu $f(J)$.*

4. Derivace

4.1. Základní vlastnosti derivace

Definice. Nechť $a \in \mathbb{R}$ a f je funkce. Jestliže existuje limita

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h},$$

pak tuto limitu nazýváme **derivací funkce f v bodě** a a značíme ji $f'(a)$. Obdobně definujeme **derivaci zprava** a **derivaci zleva funkce f v bodě** a předpisy

$$f'_+(a) = \lim_{h \to 0+} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \quad \text{a} \quad f'_-(a) = \lim_{h \to 0-} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}.$$

Poznámky. (a) Mohou nastat tyto případy:

$$\text{derivace funkce } f \text{ v bodě } a \begin{cases} \text{neexistuje,} \\ \text{existuje a je} \begin{cases} \textbf{vlastní}\text{, tj. je rovna reálnému číslu,} \\ \textbf{nevlastní}\text{, tj. je rovna } \infty \text{ nebo } -\infty. \end{cases} \end{cases}$$

(b) Platí

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a},$$

má-li alespoň jedna ze stran rovnosti smysl. Obdobné rovnosti platí pro jednostranné derivace. Tvrzení plyne z věty o limitě složené funkce.

(c) Derivace funkce f v bodě $a \in \mathbb{R}$ existuje právě tehdy, když v a existuje derivace zprava i zleva a rovnají se.

Poznámka. Má-li funkce $f\colon M \to \mathbb{R}$ na množině $M \subset \mathbb{R}$ vlastní derivaci v každém bodě $x \in M$, pak zobrazení $f'\colon M \to \mathbb{R}$, které přiřadí bodu $x \in M$ derivaci $f'(x)$, je reálnou funkcí na M.

Věta 4.1 (vztah derivace a spojitosti)**.** *Nechť funkce f má v bodě $a \in \mathbb{R}$ vlastní derivaci. Potom je f v bodě a spojitá.*

Poznámka. Tvrzení Věty 4.1 platí po odpovídající úpravě i pro jednostranné derivace, tedy má-li funkce f v bodě $a \in \mathbb{R}$ vlastní derivaci zprava (zleva), potom je f v bodě a zprava (zleva) spojitá.

Věta 4.2 (aritmetika derivací)**.** *Nechť $a \in \mathbb{R}$ a funkce f a g mají v bodě a vlastní derivace. Potom platí*

(i) $(f+g)'(a) = f'(a) + g'(a)$,

(ii) $(fg)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a)$,

(iii) je-li $g(a) \neq 0$, pak

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{f'(a)g(a) - f(a)g'(a)}{g(a)^2}.$$

konec 13. přednášky (16.11.2017)

Věta 4.3 (derivace složené funkce)**.** *Nechť funkce g má vlastní derivaci v bodě $a \in \mathbb{R}$, funkce f má vlastní derivaci v bodě $g(a)$. Pak*

$$(f \circ g)'(a) = f'(g(a)) \cdot g'(a).$$

Věta 4.4 (derivace inverzní funkce)**.** *Nechť f je na intervalu (a,b) spojitá a rostoucí (resp. klesající). Nechť funkce f má v bodě $x_0 \in (a,b)$ derivaci $f'(x_0)$ vlastní a různou od nuly. Pak má funkce f^{-1} derivaci v bodě $y_0 = f(x_0)$ a platí rovnost*

$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y_0))}.$$

Věta 4.5 (nutná podmínka existence extrému)**.** *Nechť f je funkce. Je-li a bodem lokálního extrému f, pak buď $f'(a)$ neexistuje nebo $f'(a) = 0$.*

Tvrzení 4.6 (Derivace elementárních funkcí)**.** *(a) Nechť $c \in \mathbb{R}$ a $f(x) = c$, $x \in \mathbb{R}$. Pak pro každé $a \in \mathbb{R}$ platí $f'(a) = 0$.*

(b) Nechť $n \in \mathbb{N}$ a $f(x) = x^n, x \in \mathbb{R}$. Pak pro každé $a \in \mathbb{R}$ platí $f'(a) = na^{n-1}$.

(c) Pro každé $x \in \mathbb{R}$ platí $\exp'(x) = \exp(x)$.

(d) Pro každé $x \in (0,\infty)$ platí $\log'(x) = \frac{1}{x}$.

(e) Pro každé $x \in \mathbb{R}$ platí $\sin'(x) = \cos(x)$ a $\cos'(x) = -\sin(x)$.

(f) Pro každé $x \in D(\operatorname{tg})$ platí $\operatorname{tg}'(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}$ a pro každé $x \in D(\operatorname{cotg})$ platí $\operatorname{cotg}'(x) = -\frac{1}{\sin^2(x)}$.

(g) Pro každé $x \in (-1,1)$ platí $\arcsin'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ a $\arccos'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$. Dále platí $\arcsin'_+(-1) = \arcsin'_-(1) = \infty$ a $\arccos'_+(-1) = \arccos'_-(1) = -\infty$

(h) Pro každé $x \in \mathbb{R}$ platí $\operatorname{arctg}'(x) = \frac{1}{1+x^2}$ a $\operatorname{arccotg}'(x) = -\frac{1}{1+x^2}$.

konec 14. přednášky (21.11.2017)

4.2. Věty o střední hodnotě

Věta 4.7 (Rolleova věta)**.** *Nechť $a,b \in \mathbb{R}$, $a < b$, a $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ je spojitá funkce. Je-li $f(a) = f(b)$ a f má derivaci v každém bodě intervalu (a,b), pak existuje $\xi \in (a,b)$ takové, že $f'(\xi) = 0$.*

Věta 4.8 (Lagrangeova věta)**.** *Nechť $a,b \in \mathbb{R}$, $a < b$, a $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ je spojitá funkce, která má v každém bodě intervalu (a,b) derivaci. Pak existuje $\xi \in (a,b)$ takové, že*

$$f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b-a}.$$

Věta 4.9 (vztah derivace a monotonie)**.** *Nechť I je interval a f je spojitá funkce na I. Nechť $\operatorname{Int} I$ označuje množinu všech vnitřních bodů intervalu I. Nechť existuje $f'(x)$ pro každé $x \in \operatorname{Int} I$. Potom*

(a) *je-li $f'(x) > 0$ pro každé $x \in \operatorname{Int} I$, pak je f rostoucí na I;*

(b) *je-li $f'(x) \geq 0$ pro každé $x \in \operatorname{Int} I$, pak je f neklesající na I;*

(c) *je-li $f'(x) < 0$ pro každé $x \in \operatorname{Int} I$, pak je f klesající na I;*

(d) *je-li $f'(x) \leq 0$ pro každé $x \in \operatorname{Int} I$, pak je f nerostoucí na I.*

Věta 4.10 (o limitě derivací)**.** *Nechť reálná funkce f je spojitá zprava v bodě $a \in \mathbb{R}$ a existuje $\lim_{x\to a_+} f'(x)$. Pak existuje $f'_+(a)$ a platí*

$$f'_+(a) = \lim_{x\to a_+} f'(x).$$

Poznámka. Tvrzení Věty 4.10 platí i pro derivaci zleva (a tedy i pro oboustrannou derivaci).

Věta 4.11 (Cauchyova věta)**.** *Nechť f a g jsou funkce spojité na intervalu $[a,b] \subset \mathbb{R}$, nechť f má v každém bodě $x \in (a,b)$ derivaci a nechť g má v každém bodě $x \in (a,b)$ vlastní nenulovou derivaci. Potom $g(a) \neq g(b)$ a existuje $\xi \in (a,b)$ takové, že*

$$\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}.$$

konec 15. přednášky (23.11.2017) **konec 16. přednášky (28.11.2017)**

Věta 4.12 (l'Hospitalova pravidla)**.** *Nechť* $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$, f, g *jsou reálné funkce a existuje* $\lim_{x \to a+} \frac{f'(x)}{g'(x)}$. *Jestliže navíc platí*

(a) $\lim_{x \to a+} f(x) = \lim_{x \to a+} g(x) = 0$, *nebo*

(b) $\lim_{x \to a+} |g(x)| = \infty$,

potom

$$\lim_{x \to a+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a+} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Poznámka. Tvrzení Věty 4.12 platí i pro limitu zleva i pro oboustranné limity.

4.3. Konvexní a konkávní funkce, inflexní body

Definice. Nechť I je interval a nechť f je reálná funkce definovaná alespoň na I. Řekneme, že f je

- **konvexní** na I, jestliže
$$\forall x, y \in I\ \forall \lambda \in [0,1]:\ f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y),$$
- **konkávní** na I, jestliže
$$\forall x, y \in I\ \forall \lambda \in [0,1]:\ f(\lambda x + (1-\lambda)y) \geq \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y),$$
- **ryze konvexní** na I, jestliže
$$\forall x, y \in I, x \neq y\ \forall \lambda \in (0,1):\ f(\lambda x + (1-\lambda)y) < \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y),$$
- **ryze konkávní** na I, jestliže
$$\forall x, y \in I, x \neq y\ \forall \lambda \in (0,1):\ f(\lambda x + (1-\lambda)y) > \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y).$$

Lemma 4.13 (ekvivalentní podmínka pro konvexitu)**.** *Nechť* I *je interval a nechť* $f\colon I \to \mathbb{R}$. *Pak funkce* f *je konvexní, právě když*

$$\forall x_1, x_2, x_3 \in I,\ x_1 < x_2 < x_3:\ \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \leq \frac{f(x_3) - f(x_2)}{x_3 - x_2}.$$

Analogická charakterizace platí pro konkávní, ryze konvexní a ryze konkávní funkce.

Definice. Nechť $n \in \mathbb{N}$ a $a \in \mathbb{R}$ a nechť funkce f má vlastní n-tou derivaci na okolí bodu a. Pak $(n+1)$**-ní derivací** funkce f v bodě a budeme rozumět

$$f^{(n+1)}(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f^{(n)}(a+h) - f^{(n)}(a)}{h}.$$

Druhou derivaci funkce f značíme symbolem f''.

Věta 4.14 (vztah druhé derivace a konvexity)**.** *Nechť* $a, b \in \mathbb{R}^*$, $a < b$, *a* $f\colon (a,b) \to \mathbb{R}$. *Nechť* f *má vlastní druhou derivaci v každém bodě* $x \in (a,b)$.

(a) *Je-li* $f''(x) > 0$ *pro každé* $x \in (a,b)$, *pak je* f *ryze konvexní na* (a,b);

(b) *je-li* $f''(x) \geq 0$ *pro každé* $x \in (a,b)$, *pak je* f *konvexní na* (a,b);

(c) *je-li* $f''(x) < 0$ *pro každé* $x \in (a,b)$, *pak je* f *ryze konkávní na* (a,b);

(d) *je-li* $f''(x) \leq 0$ *pro každé* $x \in (a,b)$, *pak je* f *konkávní na* (a,b).

Definice. Nechť f je reálná funkce a $a \in \mathbb{R}$. Jestliže existuje vlastní $f'(a)$, pak **tečnou ke grafu funkce f v bodě a** nazýváme afinní funkci

$$x \mapsto f(a) + f'(a)(x-a), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Definice. Nechť f je reálná funkce a $a \in \mathbb{R}$. Řekneme, že f má v bodě a **inflexi** (neboli že a je **inflexním bodem** funkce f), jestliže existuje vlastní $f'(a)$ a existuje $\delta \in \mathbb{R}, \delta > 0$, takové, že buď

$$\begin{aligned} &\forall x \in P_-(a,\delta): \ f(x) > f(a) + f'(a)(x-a) \qquad \text{a} \\ &\forall x \in P_+(a,\delta): \ f(x) < f(a) + f'(a)(x-a), \end{aligned}$$

nebo

$$\begin{aligned} &\forall x \in P_-(a,\delta): \ f(x) < f(a) + f'(a)(x-a) \qquad \text{a} \\ &\forall x \in P_+(a,\delta): \ f(x) > f(a) + f'(a)(x-a). \end{aligned}$$

Věta 4.15 (nutná podmínka pro inflexi)**.** *Nechť a je inflexním bodem funkce f. Potom $f''(a)$ neexistuje, nebo $f''(a) = 0$.*

Věta 4.16 (postačující podmínka pro inflexi)**.** *Nechť $a, b \in \mathbb{R}^*$, $a < b$, $f: (a,b) \to \mathbb{R}$, f má spojitou první derivaci na (a,b) a $z \in (a,b)$. Nechť platí*

$$\forall x \in (a,z): \ f''(x) > 0 \quad \text{a} \quad \forall x \in (z,b): \ f''(x) < 0.$$

Pak f má inflexi v bodě z.

Poznámka. Obdobné tvrzení jako ve Větě 4.16 platí i v případě, kdy platí

$$\forall x \in (a,z): \ f''(x) < 0, \quad \text{a} \quad \forall x \in (z,b): \ f''(x) > 0.$$

Definice. Nechť f je reálná funkce definovaná na nějakém okolí bodu ∞. Nechť $a, b \in \mathbb{R}$. Řekneme, že f má v bodě ∞ **asymptotu** $ax + b$, jestliže

$$\lim_{x \to \infty} \bigl(f(x) - ax - b\bigr) = 0.$$

Obdobně definujeme asymptotu v bodě $-\infty$.

Věta 4.17 (tvar asymptoty)**.** *Nechť $a, b \in \mathbb{R}$. Pak má funkce f v bodě ∞ asymptotu $ax + b$ právě tehdy, když*

$$\lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x} = a \quad a \quad \lim_{x \to \infty} (f(x) - ax) = b.$$

Obdobné tvrzení platí pro asymptotu v bodě $-\infty$.

konec 17. přednášky (1.12.2017)

Poznámka. Při *vyšetřování průběhu funkce* získáváme zejména následující informace:

- definiční obor, spojitost, limity v krajních bodech a limity v bodech nespojitosti,
- eventuální speciální vlastnosti, např. sudost, lichost nebo periodicita,
- definiční obor derivace, derivace a eventuální jednostranné derivace,
- intervaly monotonie a extrémy (lokální i globální),
- obor hodnot,
- definiční obor druhé derivace, druhá derivace, konvexita a konkávnost, inflexní body,
- asymptoty,
- náčrt grafu funkce.

konec 18. přednášky (5.12.2017) **konec 19. přednášky (7.12.2017)**

5. Číselné řady

5.1. Základní pojmy

Definice. Nechť $\{a_n\}$ je posloupnost reálných čísel. Pro $m \in \mathbb{N}$ položme

$$s_m = a_1 + a_2 + \cdots + a_m.$$

Číslo s_m nazýváme **m-tým částečným součtem** řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, přičemž číslo a_n je **n-tým členem** řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. **Součet** nekonečné řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je limita posloupnosti $\{s_m\}$, pokud tato limita existuje. Součet řady budeme značit symbolem $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Řekneme, že řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je **konvergentní**, je-li jejím součtem reálné číslo. Řekneme, že řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je **divergentní**, jestliže $\lim_{m\to\infty} s_m$ neexistuje nebo je nevlastní. Pro jemnější rozlišení mezi dvěma různými typy divergentních řad budeme někdy říkat, že řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ **diverguje k** ∞, respektive **diverguje k** $-\infty$, jestliže $\lim_{m\to\infty} s_m = \infty$, respektive $\lim_{m\to\infty} s_m = -\infty$, a že že řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ **diverguje (osciluje)**, jestliže $\lim_{m\to\infty} s_m$ neexistuje.

Poznámka. Změna konečně mnoha členů nekonečné řady nemá vliv na její konvergenci či divergenci.

Věta 5.1 (nutná podmínka konvergence řady)**.** *Nechť řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje. Potom $\lim a_n = 0$.*

Věta 5.2 (Bolzanova–Cauchyova podmínka konvergence řady)**.** *Nechť $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je řada. Pak je řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergentní právě tehdy, když platí výrok*

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall m, n \in \mathbb{N}, m > n \geq n_0\colon \left| \sum_{k=n+1}^{m} a_k \right| < \varepsilon.$$

Věta 5.3 (řady a aritmetické operace)**.** *Nechť $\{a_n\}$ a $\{b_n\}$ jsou posloupnosti reálných čísel a $\alpha \in \mathbb{R}$. Potom následující rovnosti platí, pokud mají smysl pravé strany:*

$$\sum_{n=1}^{\infty}(\alpha a_n) = \alpha \sum_{n=1}^{\infty} a_n, \quad \sum_{n=1}^{\infty}(a_n + b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n.$$

5.2. Řady s nezápornými členy

Poznámka. Nechť $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je řada s nezápornými členy. Potom je buď $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergentní nebo diverguje k ∞. Jinými slovy, řada s nezápornými členy má vždy součet, který může být konečný nebo nekonečný. To plyne z věty o limitě monotónní posloupnosti a pozorování, že posloupnost částečných součtů řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je neklesající.

konec 20. přednášky (12.12.2017)

Věta 5.4 (srovnávací kritérium)**.** *Nechť $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ a $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ jsou řady s nezápornými členy a nechť pro skoro všechna $n \in \mathbb{N}$ platí $a_n \leq b_n$.*

(a) Jestliže řada $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konverguje, pak konverguje i řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

(b) Jestliže řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverguje, pak diverguje i řada $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$.

Věta 5.5 (limitní srovnávací kritérium)**.** *Nechť $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ a $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ jsou řady s nezápornými členy a nechť existuje $\lim \frac{a_n}{b_n}$. Označme $A = \lim \frac{a_n}{b_n}$.*

(a) Jestliže je $A \in (0, \infty)$, pak řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje právě tehdy, když konverguje řada $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$.

(b) Jestliže je $A = 0$ a řada $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konverguje, pak řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje.

(c) Jestliže je $A = \infty$ a řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje, pak řada $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konverguje.

Věta 5.6 (Cauchyovo odmocninové kritérium)**.** *Nechť $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je řada s nezápornými členy.*

(a) Jestliže $\lim \sqrt[n]{a_n} < 1$, pak řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje.

(b) Jestliže $\lim \sqrt[n]{a_n} > 1$, pak řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverguje.

Věta 5.7 (d'Alembertovo podílové kritérium)**.** *Nechť $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je řada s kladnými členy.*

(a) Jestliže $\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$, pak řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje.

(b) Jestliže $\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$, pak řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverguje.

Věta 5.8 (kondenzační kritérium)**.** *Nechť $\{a_n\}$ je nerostoucí posloupnost nezáporných reálných čísel. Pak řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje právě tehdy, když konverguje řada $\sum_{n=0}^{\infty} 2^n a_{2^n}$.*

Věta 5.9 (o konvergenci řady $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$)**.** *Řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$, kde $\alpha \in \mathbb{R}$, konverguje právě tehdy, když $\alpha > 1$.*

konec 21. přednášky (14.12.2017)

5.3. Řady s obecnými členy

Věta 5.10 (Leibniz)**.** *Nechť $\{b_n\}$ je monotónní posloupnost reálných čísel splňující $\lim b_n = 0$. Pak řada $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n b_n$ konverguje.*

konec 22. přednášky (19.12.2017)

Lemma 5.11 (Abelova parciální sumace)**.** *Nechť $m \in \mathbb{N}$ a $a_1, \ldots, a_m$, $b_1, \ldots, b_m$ jsou reálná čísla.*

(a) Nechť $n \in \mathbb{N}$, $n \leq m$, a $\sigma_k = \sum_{j=n}^{k} a_j$, $k = n, \ldots, m$. Pak platí

$$\sum_{j=n}^{m} a_j b_j = \sum_{j=n}^{m-1} \sigma_j (b_j - b_{j+1}) + \sigma_m b_m. \tag{5.1}$$

(b) Označme $s_k = \sum_{j=1}^{k} a_j$, $k = 0, \ldots, m$. Pak pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \leq m$, platí

$$\sum_{j=n}^{m} a_j b_j = -s_{n-1} b_n + \sum_{j=n}^{m-1} s_j (b_j - b_{j+1}) + s_m b_m. \tag{5.2}$$

Věta 5.12 (Abelovo-Dirichletovo kritérium)**.** *Nechť $\{a_n\}$ a $\{b_n\}$ jsou posloupnosti reálných čísel, přičemž $\{b_n\}$ je monotónní. Nechť je navíc splněna alespoň jedna z následujících dvou podmínek:*

(A) posloupnost $\{b_n\}$ je omezená a řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje,

(D) $\lim b_n = 0$ a posloupnost částečných součtů řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je omezená.

Pak řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ konverguje.

5.4. Absolutní konvergence řad

Definice. Řekneme, že řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je **absolutně konvergentní**, jestliže je řada $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ konvergentní. Je-li řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergentní, ale není absolutně konvergentní, říkáme, že je **neabsolutně konvergentní**.

Věta 5.13 (vztah absolutní konvergence řady a konvergence řady)**.** *Je-li řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ absolutně konvergentní, pak je i konvergentní.*

Poznámka. Rozdíl mezi absolutní a neabsolutní konvergencí ilustrují následující dva fakty:

- Pokud je $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ absolutně konvergentní a $\pi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ je libovolná bijekce, pak $\sum_{n=1}^{\infty} a_{\pi(n)} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$.
(Tj. nezávisí na tom, v jakém pořadí jednotlivé členy sčítáme.)
- Pokud $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ není absolutně konvergentní, pak pro každé $r \in \mathbb{R}^*$ najdeme bijekci $\pi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ takovou, že $\sum_{n=1}^{\infty} a_{\pi(n)} = r$.
(Tj. velmi silně závisí na tom, v jakém pořadí jednotlivé členy sčítáme.)

konec 23. přednášky (21.12.2017)

6. Taylorův polynom

Definice. Nechť f je funkce, $n \in \mathbb{N}$, $a \in \mathbb{R}$ a existuje vlastní $f^{(n)}(a)$. Pak polynom

$$T_n^{f,a}(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \cdots + \frac{1}{n!} f^{(n)}(a)(x-a)^n$$

nazýváme **Taylorovým polynomem řádu** n **funkce** f **v bodě** a.

Úmluva. V dalším textu budeme symbol tvaru $(x-a)^0$ chápat jako 1, a to i tehdy, jestliže $x = a$. Symbolem $f^{(0)}$ (tedy „nultou derivací“ funkce f) budeme rozumět samotnou funkci f.

Věta 6.1 (Charakterizace Taylorova polynomu)**.** *Nechť $n \in \mathbb{N}$, $a \in \mathbb{R}$ a nechť má funkce f v bodě a vlastní n-tou derivaci. Potom*

(a) Polynom $T_n^{f,a}(x)$ je jediný polynom stupně nejvýše n splňující

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - T_n^{f,a}(x)}{(x-a)^n} = 0.$$

(b) Polynom $P(x) = T_n^{f,a}(x)$ je jediný polynom stupně nejvýše n takový, že pro každé $i \in \{0 \dots n\}$ platí $f^{(i)}(a) = P^{(i)}(a)$.

Důsledek 6.2. *Nechť $n \in \mathbb{N}$, $a \in \mathbb{R}$ a nechť má funkce f v bodě a vlastní n-tou derivaci. Potom*

$$f(x) = T_n^{f,a}(x) + \omega(x)(x-a)^n,$$

kde $\lim_{x \to a} \omega(x) = 0$.

Věta 6.3 (Lagrangeův tvar zbytku)**.** *Nechť $n \in \mathbb{N}$ a nechť $a, x \in \mathbb{R}$, $a < x$. Předpokládejme, že funkce f má v každém bodě intervalu $[a, x]$ vlastní derivaci řádu $(n+1)$. Pak existuje $\xi \in (a, x)$ takové, že*

$$f(x) - T_n^{f,a}(x) = \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi)(x-a)^{n+1}.$$

Poznámka. Věta 6.3 platí i v případě $x < a$.

Důsledek 6.4. *Nechť $n \in \mathbb{N}$, $a \in \mathbb{R}$, $r > 0$ a nechť má funkce f v každém bodě intervalu $(a-r, a+r)$ vlastní derivaci řádu $(n+1)$. Pak*

$$\forall x \in (a-r, a+r)\colon \quad |f(x) - T_n^{f,a}(x)| \leq \frac{r^{n+1}}{(n+1)!} \sup_{|y-a|<r} |f^{(n+1)}(y)|.$$

Důsledek 6.5. *Nechť $a \in \mathbb{R}$, $r > 0$ a nechť má funkce f v každém bodě intervalu $(a-r, a+r)$ vlastní derivaci řádu n pro každé $n \in \mathbb{N}$. Ať existuje konstanta $K > 0$ taková, že $\sup_{|y-a|<r} |f^{(n+1)}(y)| \leq K^{n+1}$ pro $n \in \mathbb{N}$. Pak platí:*

(a) Pro každé $\varepsilon > 0$ existuje n_0 tak, že pro každé přirozené číslo $n \geq n_0$ platí

$$\forall x \in (a-r, a+r)\colon \quad |f(x) - T_n^{f,a}(x)| \leq \varepsilon.$$

(b)

$$\forall x \in (a-r, a+r)\colon \quad f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n.$$

Definice. Nechť f je funkce, $a \in \mathbb{R}$ a $f^{(n)}(a) \in \mathbb{R}$ pro každé $n \in \mathbb{N}$. Potom řadu

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

nazýváme **Taylorovou řadou funkce** f **o středu** a. Ve speciálním případě $a = 0$ mluvíme o **Maclaurinově řadě**.

Věta 6.6 (Taylorovy řady elementárních funkcí)**.** *Platí (například) následující vztahy mezi elementárními funkcemi a jejich Taylorovými řadami (středem Taylorovy řady je ve všech případech bod* $a = 0$*):*

$$\begin{aligned}
&(a)\forall x \in \mathbb{R}: \quad \exp x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, \\
&(b)\forall x \in \mathbb{R}: \quad \sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1}, \\
&(c)\forall x \in \mathbb{R}: \quad \cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n}, \\
&(d)\forall x \in (-1,1]: \quad \log(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n,
\end{aligned}$$

konec 24. přednášky (4.1.2018) (na poslednich dvou prednaskach budeme pocitat priklady, nova latka se probirat jiz nebude)