

Kalkulus 1, ZS 2017-2018
Zadání písemné části zkoušky - Varianta A

Příklad 1. Spočtete

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n + \cos\left(\frac{1}{\sqrt[4]{n^5}}\right)}}{\sqrt[3]{n^3 + 3n} - \sqrt{n^2 + 2}}. \quad (10 \text{ bodů})$$

Příklad 2. Vyšetřete průběh funkce f zadané předpisem
(*Hint:* při vyšetřování definičního oboru využijte fakt že $4x^3 - 27x + 27 = (x+3)(2x-3)^2$ a $4x^3 - 27x - 27 = (x-3)(2x+3)^2$)

$$f(x) := \arcsin\left(x - \frac{4x^3}{27}\right). \quad (20 \text{ bodů})$$

V tomto příkladu můžete použít fakt, že pro $x \in D(f')$ je $f''(x) = \frac{-3x(4x^2-9)}{(9-x^2)\sqrt{(9-x^2)(9-4x^2)^2}}$ (nemusíte počítat druhou derivaci).

Příklad 3. Vyšetřete zda konverguje a zda absolutně konverguje číselná řada

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \sin\left(\frac{n+3}{n^2+2n}\right). \quad (10 \text{ bodů})$$

Příklad 4. Napište definici pojmu „supremum množiny A “, kde $A \subset \mathbb{R}$. (10 bodů)

Příklad 5. Dokažte následující tvrzení:

Nechť $a \in \mathbb{R}$ a funkce f a g mají v bodě a vlastní derivace. Potom platí

$$(fg)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a). \quad (10 \text{ bodů})$$

Kalkulus 1, ZS 2017-2018
Zadání písemné části zkoušky - Varianta B

Příklad 6. Spočtete

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{x} \log \left(\sqrt{4 + \frac{1}{x}} - 1 \right) \sqrt{\log(3^x + 4x^5)}. \quad (10 \text{ bodů})$$

Příklad 7. Vyšetřete průběh funkce $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ zadané předpisem (pozor: v předpisu funkce se vyskytuje jedna absolutní hodnota)

$$f(x) := |x - 3| + \operatorname{arctg}(5 - 10x). \quad (20 \text{ bodů})$$

Příklad 8. Vyšetřete zda konverguje a zda absolutně konverguje číselná řada

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sin \left(\frac{(n+3)!}{(n+2)^n} \right). \quad (10 \text{ bodů})$$

Příklad 9. Napište definici pojmu „posloupnost $\{a_n\}$ má limitu rovnou číslu A “, kde $A \in \mathbb{R}$. (10 bodů)

Příklad 10. Dokažte následující tvrzení:

Nechť $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, a f je spojitá funkce na intervalu $[a, b]$. Potom f nabývá na $[a, b]$ svého maxima i minima. (10 bodů)

Kalkulus 1, ZS 2017-2018
Zadání písemné části zkoušky - Varianta C

Příklad 11. Spočtete

$$\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{2x + \frac{1}{x}}{3} \right)^{\frac{1}{x-1}}. \quad (10 \text{ bodů})$$

Příklad 12. Vyšetřete průběh funkce $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ zadané předpisem (pozor: v předpisu funkce se vyskytuje jedna absolutní hodnota)

$$f(x) := \left| x - \frac{1}{\sqrt{2}} \right| \exp(x^2 + \sqrt{2}x). \quad (20 \text{ bodů})$$

Příklad 13. Vyšetřete zda konverguje a zda absolutně konverguje číselná řada

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n (\sqrt{n^2 + 3} - n) \log \left(1 - \frac{1}{n} \right). \quad (10 \text{ bodů})$$

Příklad 14. Napište definici pojmu „derivace funkce f v bodě a “, kde $a \in \mathbb{R}$. (10 bodů)

Příklad 15. Dokažte následující tvrzení:

Nechť $\lim a_n = 0$ a nechť posloupnost $\{b_n\}$ je omezená. Potom $\lim a_n b_n = 0$. (10 bodů)

Kalkulus 1, ZS 2017-2018
Zadání písemné části zkoušky - Varianta D

Příklad 16. Spočtete

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\sqrt{\sin(1 - \cos x)} + 1 \right)^{1/\sin x}. \quad (10 \text{ bodů})$$

Příklad 17. Vyšetřete průběh funkce $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ zadané předpisem

$$f(x) := \sqrt[3]{x^3 - x}. \quad (20 \text{ bodů})$$

Příklad 18. Vyšetřete zda konverguje a zda absolutně konverguje číselná řada

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sin \left(\frac{n+2}{n^2+4n} \right) (1 - \cos(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})). \quad (10 \text{ bodů})$$

Příklad 19. Napište definici pojmu „Taylorův polynom řádu n funkce f v bodě a “, kde $a \in \mathbb{R}$ a $n \in \mathbb{N}$. (10 bodů)

Příklad 20. Dokažte následující tvrzení:

Nechť $\{a_n\}$ a $\{b_n\}$ jsou posloupnosti reálných čísel, $\lim a_n = +\infty$ a $\lim b_n \in \mathbb{R}$.
Potom $\lim (a_n + b_n) = +\infty$. (10 bodů)

Kalkulus 1, ZS 2017-2018
Zadání písemné části zkoušky - Varianta E

Příklad 21. Spočtete

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\left(\sqrt{n^2 + 1} - \sqrt[3]{n^3 + 2}\right) \sqrt[4]{(n^2 + 4)^3 - (n^3 + 2)^2}}. \quad (10 \text{ bodů})$$

Příklad 22. Vyšetřete průběh funkce $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ zadané předpisem (pozor: v předpisu funkce se vyskytuje jedna absolutní hodnota)

$$f(x) := \log \left(\frac{(x-1)^2}{|x+3|} \right). \quad (20 \text{ bodů})$$

Příklad 23. Vyšetřete zda konverguje a zda absolutně konverguje číselná řada

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\cos \left(\frac{1}{n} \right) \right)^{n^2}. \quad (10 \text{ bodů})$$

Příklad 24. Napište definici pojmu „funkce f je konvexní na intervalu $[3, 4]$ “. (10 bodů)

Příklad 25. Dokažte následující tvrzení:

Nechť $\lim a_n = A \in \mathbb{R}$ a $\lim b_n = B \in \mathbb{R}$. Nechť $A < B$. Potom existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové že pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$ platí $a_n < b_n$. (10 bodů)