I. HLEDÁNÍ PRIMITIVNÍ FUNKCE, ÚVOD

Vyjádřete primitivní funkce na maximálních intervalech existence

1. Příklady na integrování "přímo":
a) $\int x^9 + \frac{1}{x} - 5e^x + x^{-3} - \cos x \, dx$ b) $\int 2e^{3x} - \sqrt[5]{5-x} \, dx$ c) $\int \frac{x^2+3x+6}{x^4} \, dx$ d) $\int x(1-x)^{10} \, dx$

2. Příklady na integrování pomocí substituce:
a) $\int \operatorname{tg} x \, dx$ b) $\int \frac{x^2}{\cos^2 x^3} \, dx$ c) $\int \frac{x}{\sqrt{x^2+5}} \, dx$ d) $\int \frac{1}{x \log x \log(\log x)} \, dx$

3. Další příklady k procvičení:
a) $\int (2^x + 3^x)^2 \, dx$ b) $\int \frac{1}{\sqrt{2-5x}} \, dx$ c) $\int \frac{x^3}{x^8+1} \, dx$

4. Příklady na integrování "per partes":
a) $\int x^3 \sin x \, dx$ b) $\int e^x \cos x \, dx$ c) $\int \log x \, dx$

5. Příklady, kde se musí funkce "lepit":
a) $\int |x| \, dx$ b) $\int |\cos x| \, dx$ f) $\int \max\{x, x^2\} \, dx$

6. Další příklady k procvičení:
a) $\int \frac{2^{2x}}{9^x - 4^x} \, dx$ b) $\int \left(\frac{\log x}{x}\right)^2 \, dx$ c) $\int x \sin \sqrt{x} \, dx$

Další příklady k procvičení lze nalézt například v sekci III zde:
`http://www.karlin.mff.cuni.cz/~cuth/archiv/MFF/MA/ma2-2016-17.pdf`

II. HLEDÁNÍ PRIMITIVNÍ FUNKCE, ÚVOD - VÝSLEDKY

Výsledky jsou uvedeny vždy "až na konstantu", definičním oborem primitivní funkce jsou vždy maximální otevřené intervaly definičního oboru:

1. a) $\frac{x^{10}}{10} + \log|x| - 5e^x - \frac{1}{2x^2} - \sin x$ na $(-\infty, 0)$ a $(0, \infty)$ b) $\frac{2}{3}e^{3x} + \frac{5(5-x)^{\frac{6}{5}}}{6},\ x \in \mathbb{R}$
c) $-\frac{1}{x} - \frac{3}{2x^2} - \frac{2}{x^3}$ na $(-\infty, 0)$ a $(0, \infty)$ d) $-\frac{(1-x)^{11}}{11} + \frac{(1-x)^{12}}{12}$

2. a) $-\log|\cos x|$ na každém z intervalů $(-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi), k \in \mathbb{Z}$
b) $\frac{1}{3} \operatorname{tg} x^3$ na každém z intervalů $(\sqrt[3]{-\frac{\pi}{2} + k\pi}, \sqrt[3]{\frac{\pi}{2} + k\pi}), k \in \mathbb{Z}$ c) $\sqrt{x^2+5},\ x \in \mathbb{R}$ d) $\log|\log(\log x)|$ na $(1, e)$ a (e, ∞)

3. a) $\frac{4^x}{\log 4} + 2\frac{6^x}{\log 6} + \frac{9^x}{\log 9},\ D_f = \mathbb{R}$ b) $-\frac{2}{5}\sqrt{2-5x},\ D_f = (-\infty, \frac{2}{5})$ c) $\frac{1}{4} \operatorname{arctg}(x^4),\ D_f = \mathbb{R}$

4. a) $-x^3 \cos x + 3x^2 \sin x + 6x \cos x - 6 \sin x,\ x \in \mathbb{R}$ b) $\frac{1}{2}(e^x \sin x + e^x \cos x),\ x \in \mathbb{R}$ c) $x \log x - x,\ x \in (0, \infty)$

5. a) $\frac{1}{2}|x|x,\ x \in \mathbb{R}$

b) $F(x) = \begin{cases} \sin x + 4k & x \in [-\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{\pi}{2} + 2k\pi], k \in \mathbb{Z} \\ -\sin x + 4k + 2 & x \in (\frac{\pi}{2} + 2k\pi, 3\frac{\pi}{2} + 2k\pi), k \in \mathbb{Z} \end{cases}$ f) $F(x) = \begin{cases} \frac{x^3}{3} & x \in (-\infty, 0) \\ \frac{x^2}{2} & x \in [0, 1] \\ \frac{x^3}{3} + \frac{1}{6} & x \in (1, \infty) \end{cases}$

6. a) $-\frac{1}{2\log\frac{2}{3}} \log|1 - (\frac{2}{3})^{2x}|,\ D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ b) $-\frac{1}{x}(\log^2 x + 2\log x + 2),\ D_f = (0, \infty)$ c) $2(6-x)\sqrt{x} \cos\sqrt{x} - 6(2-x) \sin\sqrt{x},\ D_f = (0, \infty)$

II. HLEDÁNÍ PRIMITIVNÍ FUNKCE, POKRAČOVÁNÍ

Vyjádřete primitivní funkce na maximálních intervalech existence

1. a) $\int \frac{5x^3+3x^2-x-1}{x^2+2x+1}\,\mathrm{d}x$ b) $\int \frac{1}{(2x+3)(3x+2)(x+1)}\,\mathrm{d}x$ c) $\int \frac{x^2+3x-2}{(x-1)(x^2+x+1)^2}\,\mathrm{d}x$

2. a) $\int \frac{1}{e^{2x}+e^x-2}\,\mathrm{d}x$ b) $\int \frac{2\log^2(x)+3}{x\log^4(x)-x\log^2(x)-6x}\,\mathrm{d}x$

3. a) $\int \frac{1}{\sin x+\operatorname{tg} x}\,\mathrm{d}x$ b) $\int \frac{\operatorname{tg}^2 x+1}{\sin^2 x+\sin x\cos x}\,\mathrm{d}x$

4. a) $\int \frac{1}{1+\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$ b) $\int \frac{1}{1+\sqrt{x^2+2x+2}}\,\mathrm{d}x$ c) $\int \frac{1}{(x-1)\sqrt{x^2-3x+2}}\,\mathrm{d}x$

5. Převeďte "$\int \sqrt{x^2-3x+1}\,\mathrm{d}x$" na integrál z racionální funkce pomocí následujících substitucí: a) $t = \sqrt{x^2-3x+1}-x$ b) "$t=\sqrt{\frac{x-x_1}{x-x_2}}$"

6. Ukázkové příklady k prvnímu zápočtovému testu: a) $\int \frac{e^{5x}}{e^{2x}+1}\,\mathrm{d}x$ b) $\int(\cos x)(\log\sin x)\,\mathrm{d}x$ c) $\int \frac{1}{\cos x}\,\mathrm{d}x$ d) Převeďte "$\int \frac{1}{x}\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}\,\mathrm{d}x$" na integrál z racionální funkce e) Převeďte "$\int \frac{\sqrt{x^2+x+1}}{x^2}\,\mathrm{d}x$" na integrál z racionální funkce

Další příklady k procvičení lze nalézt například v sekci IV zde:
`http://www.karlin.mff.cuni.cz/~cuth/archiv/MFF/MA/ma2-2015-16.pdf`
a také v sekcích V, VI, VIII zde:
`http://www.karlin.mff.cuni.cz/~kalenda/data/ma215-cv.pdf`

II. HLEDÁNÍ PRIMITIVNÍ FUNKCE, POKRAČOVÁNÍ - VÝSLEDKY

Výsledky jsou uvedeny vždy "až na konstantu", definičním oborem primitivní funkce jsou vždy maximální otevřené intervaly definičního oboru:

1. a) $5\frac{x^2}{2}-7x+8\log|x+1|+2\frac{1}{x+1},\ D_f=\mathbb{R}\setminus\{-1\}$
b) $\frac{1}{6}\left(\frac{12}{5}\log|x+\frac{3}{2}|+\frac{18}{5}\log|x+\frac{2}{3}|-6\log|x+1|\right),\ D_f=\mathbb{R}\setminus\{-\frac{3}{2},-1,-\frac{2}{3}\}$
c) $\frac{5x+2}{3(x^2+x+1)}+\frac{2}{9}\log|x-1|-\frac{1}{9}\log(x^2+x+1)+\frac{8}{9\sqrt{3}}\operatorname{arctg}(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}),\ D_f=\mathbb{R}\setminus\{1\}$

2. a) $-\frac{x}{2}+\frac{1}{3}\log|e^x-1|+\frac{1}{6}\log(e^x+2),\ D_f=\mathbb{R}\setminus\{0\}$ b) $\frac{1}{5\sqrt{2}}\operatorname{arctg}(\log(x)/\sqrt{2})+\frac{9}{10\sqrt{3}}\log\left|\frac{\log(x)-\sqrt{3}}{\log(x)+\sqrt{3}}\right|,\ D_f=(0,\infty)\setminus\{e^{\sqrt{3}},e^{-\sqrt{3}}\}$

3. a) $\frac{1}{4}\log\left|\frac{1-\cos x}{1+\cos x}\right|-\frac{1}{2(\cos x+1)},\ D_f=\mathbb{R}\setminus\bigcup_{k\in\mathbb{Z}}\{k\pi,\frac{\pi}{2}+k\pi\}$ [dá se řešit substitucí $t=\cos x$]
b) $\operatorname{tg} x+\log\left|\frac{\operatorname{tg} x}{(\operatorname{tg} x+1)^2}\right|,\ D_f=\mathbb{R}\setminus\bigcup_{k\in\mathbb{Z}}\{k\pi,\frac{\pi}{2}+k\pi,3\frac{\pi}{4}+k\pi\}$ [dá se řešit substitucí $t=\operatorname{tg} x$]

4. a) $2\sqrt{x}-2\log(1+\sqrt{x}),\ D_f=(0,\infty)$ b) $\frac{2}{x-\sqrt{x^2+2x+2}}-\log(\sqrt{x^2+2x+2}-x-1),\ D_f=\mathbb{R}$
c) $2\operatorname{sgn}(x-1)\sqrt{\frac{x-2}{x+1}},\ D_f=(-\infty,1)\cup(2,\infty)$

5. a) $\frac{-2(t^2+3t+1)^2}{(2t+3)^3}$ b) $x_1=\frac{3+\sqrt{5}}{2},\ x_2=\frac{3-\sqrt{5}}{2}$. Pak na intervalu $(-\infty,x_2)$ vede na integrál z $\frac{2t^2(x_1-x_2)^2}{(t^2-1)^3}$; na intervalu (x_1,∞) vede na integrál z $-\frac{2t^2(x_1-x_2)^2}{(t^2-1)^3}$.

6. a) $\frac{1}{3}e^{3x}-e^x+\operatorname{arctg} e^x$ na $\mathbb{R}$ b) $\sin x(\log(\sin x)-1)$ na každém z intervalů $(0,\pi)+2k\pi$ c) $\frac{1}{2}\log\left|\frac{1+\sin x}{1-\sin x}\right|$ na každém z intervalů $(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})+k\pi$ d) například po substituci "$t=\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}$" vede na intervalech $(0,1)$ a $(1,\infty)$ na integrál z $\frac{-4t^2}{(1+t^2)(t^2-1)}$ e) například po substituci "$t=\sqrt{x^2+x+1}-x$" vede na intervalech $(\frac{1}{2},1)$ a $(1,\infty)$ na integrál z $\frac{-2(t^2-t+1)^2}{(2t-1)(1-t^2)^2}$

III. HLEDÁNÍ PRIMITIVNÍ FUNKCE, SLOŽITĚJŠÍ PŘÍKLADY

Vyjádřete primitivní funkce na maximálních intervalech existence

1. a) $\int \frac{1}{1+\sin^2 x}\,\mathrm{d}x$ na intervalu $(0,\pi)$ b) $\int \frac{1}{\sin^2 x+\sin x\cos x+\cos^2 x}\,\mathrm{d}x$ c) $\int x\sqrt[3]{2x+3}\,\mathrm{d}x$

III. HLEDÁNÍ PRIMITIVNÍ FUNKCE, SLOŽITĚJŠÍ PŘÍKLADY - VÝSLEDKY

Výsledky jsou uvedeny vždy "až na konstantu", definičním oborem primitivní funkce jsou vždy maximální otevřené intervaly definičního oboru:

1. a) $F(x) = \begin{cases} \frac{\operatorname{arctg}(\sqrt{2}\operatorname{tg} x)}{\sqrt{2}}, & x \in (0, \frac{\pi}{2}), \\ \frac{\operatorname{arctg}(\sqrt{2}\operatorname{tg} x)}{\sqrt{2}} + 2\frac{\pi}{2\sqrt{2}}, & x \in (\frac{\pi}{2}, \pi). \end{cases}$

b) $F(x) = \begin{cases} \frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2\operatorname{tg} x+1}{\sqrt{3}} + \frac{2k\pi}{\sqrt{3}}, & x \in (-\frac{\pi}{2}+k\pi, \frac{\pi}{2}+k\pi), k \in \mathbb{Z}, \\ \frac{(2k+1)\pi}{\sqrt{3}}, & , x = \frac{\pi}{2}+k\pi, k \in \mathbb{Z}. \end{cases}$

c) $\frac{3}{28}(2x+3)^{7/3} - \frac{9}{16}(2x+3)^{4/3}, x \in \mathbb{R}$

IV. NEWTONŮV INTEGRÁL

Vypočtěte následující integrály

1. a) $\int_0^2 |1-x|\,\mathrm{d}x$ b) $\int_0^\infty \frac{1}{x^2+3x+2}\,\mathrm{d}x$ c) $\int_0^{100\pi} \sqrt{1-\cos 2x}\,\mathrm{d}x$ d) $\int_0^{\log 2} xe^{-x}\,\mathrm{d}x$ e) $\int_{-1}^\infty \frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{(x+1)^3}}$

f) $\int_0^{5\pi} \frac{1}{\sin^2 x+2\cos^2 x}\,\mathrm{d}x$ g) $\int_0^{6\pi} x\frac{\sin(x^2)}{2+\sin(x^2)}\,\mathrm{d}x$

Další příklady k procvičení lze nalézt například v sekci V zde:
`http://www.karlin.mff.cuni.cz/~cuth/archiv/MFF/MA/ma2-2016-17.pdf`
a také v sekcích VII, IX zde:
`http://www.karlin.mff.cuni.cz/~kalenda/data/ma215-cv.pdf`

IV. NEWTONŮV INTEGRÁL - VÝSLEDKY

1. a) 1 b) $\log 2$ c) $200\sqrt{2}$ d) $\frac{1-\log 2}{2}$ e) π f) $5\frac{\sqrt{2}}{2}\pi$

g) $57\pi(1-2\frac{\sqrt{3}}{3}) + \frac{\sqrt{3}\pi}{9} + \operatorname{arctg}(\operatorname{tg}(18\pi^2)) - \frac{2\sqrt{3}}{3}\operatorname{arctg}\left(\frac{2\operatorname{tg}(18\pi^2)+1}{\sqrt{3}}\right)$

V. KONVERGENCE NEWTONOVA INTEGRÁLU

1. Vyšetřete konvergenci následujících integrálů
a) $\int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt[3]{(1-x^2)^5}}\,\mathrm{d}x$ b) $\int_0^1 \frac{\sqrt{x}}{e^{\sin x}-1}\,\mathrm{d}x$ c) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\log\sin x}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$ d) $\int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{x}\log(1+e^x)}\,\mathrm{d}x$

2. Vyšetřete konvergenci (absolutní i neabsolutní) následujících integrálů v závislosti na parametru $\alpha \in \mathbb{R}$ (dále lze výsledky tohoto cvičení považovat za "známé fakty"):
a) $\int_1^\infty \frac{\sin x}{x^\alpha}\,\mathrm{d}x$ b) $\int_1^\infty \frac{\cos x}{x^\alpha}\,\mathrm{d}x$

3. Vyšetřete konvergenci (absolutní i neabsolutní) následujících integrálů:
a) $\int_0^\infty 2x\cos\left(x^4\right)\,\mathrm{d}x$ b) $\int_1^\infty \frac{\sqrt[4]{e^{1/x^2}-e^{-1/x^2}}}{x+1}\log(x+1)\,\mathrm{d}x$

4. Ukažte, že integrál $\int_\pi^\infty \frac{\sin x}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$ je konvergentní, ale integrál $\int_\pi^\infty \frac{\sin x}{\sqrt{x}+\sin x}\,\mathrm{d}x$ je divergentní.

5. Ukázkové příklady k druhému zápočtovému testu: a) $\int_0^\infty \frac{e^{\sin x}-1}{x^2}\,\mathrm{d}x$ b) $\int_1^{10} \frac{1-\cos(10-x)}{\sqrt{(10-x)^5}\sqrt{x-1}}\,\mathrm{d}x$
c) $\int_0^5 \frac{\sin x\log x}{x^{3/2}}\,\mathrm{d}x$ d) $\int_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{\sin(\operatorname{tg} x)}{(\cos^2 x)\operatorname{tg} x}\,\mathrm{d}x$ e) $\int_1^\infty \frac{\log(1+\frac{1}{x})}{e^x}$

Další příklady k procvičení lze nalézt například v sekci VII zde:
`http://www.karlin.mff.cuni.cz/~cuth/archiv/MFF/MA/ma2-2016-17.pdf`
a také v sekci X zde:
`http://www.karlin.mff.cuni.cz/~kalenda/data/ma215-cv.pdf`

V. KONVERGENCE NEWTONOVA INTEGRÁLU - VÝSLEDKY

1. a) diverguje b) konverguje c) konverguje d) konverguje
2. a) absolutně konverguje $\Leftrightarrow \alpha > 1$, konverguje $\Leftrightarrow \alpha > 0$ b) absolutně konverguje $\Leftrightarrow \alpha > 1$, konverguje $\Leftrightarrow \alpha > 0$
3. a) konverguje (neabsolutně) b) absolutně konverguje
5. a) diverguje b) konverguje c) konverguje d) konverguje (neabsolutně) e) konverguje

VI. OBYČEJNÉ DIFERENCIÁLNÍ ROVNICE PRVNÍHO ŘÁDU

Najděte všechna maximální řešení následujících diferenciálních rovnic

1. a) $y' = \frac{1}{x}\sqrt{1-y^2}$ b) $y' = |y|$ c) $y' = -\frac{(1+y^2)x}{1+x^2}$ d) $xy' = y - x$ e) $y' = e^{\frac{y}{x}} + \frac{y}{x}$

2. a) $y' = \frac{2y}{x}$ b) $y' - \frac{2y}{x} = 2x^3$ c) $x^3y' - xy = 1$, s počáteční podmnínkou $y(1) = e$

Další příklady k procvičení lze nalézt například zde:
`http://www.karlin.mff.cuni.cz/~barta/pcODR/` a také v sekcích II, III, V zde:
`http://www.karlin.mff.cuni.cz/~kalenda/archiv/s21314l.pdf`

VI. OBYČEJNÉ DIFERENCIÁLNÍ ROVNICE PRVNÍHO ŘÁDU - VÝSLEDKY

1. a) Stacionární řešení jsou $y_{s_1}(x) = 1$, $x \in (-\infty, 0)$; $y_{s_2}(x) = -1$, $x \in (-\infty, 0)$; $y_{s_3}(x) = 1$, $x \in (0, \infty)$; $y_{s_4}(x) = -1$, $x \in (0, \infty)$. Pro každé $c \in \mathbb{R}$ jsou maximálními řešeními funkce

$$y_c^1(x) = \begin{cases} -1 & x \in (0, e^{-\pi/2-c}] \\ \sin(\log x + c) & x \in (e^{-\pi/2-c}, e^{\pi/2-c}) \\ 1 & x \geq e^{\pi/2-c}. \end{cases} \qquad y_c^2(x) = \begin{cases} -1 & x \in [-e^{-\pi/2-c}, 0) \\ \sin(\log x + c) & x \in (-e^{\pi/2-c}, -e^{-\pi/2-c}) \\ 1 & x \leq -e^{\pi/2-c}. \end{cases}$$

b) Pro každé $K \in \mathbb{R}$ je $y_K(x) = K \exp(\operatorname{sgn}(K)x)$, $x \in \mathbb{R}$ maximální řešení. c) Pro každé $c \geq \pi/2$ jsou maximálním řešením funkce $y_c^1(x) = \operatorname{tg}(c - 1/2\log(1+x^2))$, $x \in (\sqrt{\exp(2c-\pi)-1}, \sqrt{\exp(2c+\pi)-1})$ a $y_c^2(x) = \operatorname{tg}(c-1/2\log(1+x^2))$, $x \in (-\sqrt{\exp(2c+\pi)-1}, -\sqrt{\exp(2c-\pi)-1})$. Pro $c \in (-\pi/2, \pi/2)$ je maximálním řešením funkce $y_c(x) = \operatorname{tg}(c - 1/2\log(1+x^2))$, $x \in (-\sqrt{\exp(2c+\pi)-1}, \sqrt{\exp(2c+\pi)-1})$. d) Pro každé $c \in \mathbb{R}$ jsou maximálním řešení funkce $y_c^1(x) = -x\log|x| + cx$, $x \in (-\infty, 0)$ a $y_c^2(x) = -x\log|x| + cx$, $x \in (0, \infty)$ e) $y(x) = -x\log(-\log|x| + c)$, $x \in (-e^c, 0)$ nebo $x \in (0, e^c)$ pro $c \in \mathbb{R}$

2. a) $y(x) = Kx^2$, $x \in (-\infty, 0)$ nebo $x \in (0, \infty)$ $(K \in \mathbb{R})$ b) $y(x) = x^4 + Kx^2$, $x \in (-\infty, 0)$ nebo $x \in (0, \infty)$ $(K \in \mathbb{R})$ c) $y(x) = 1 - \frac{1}{x} + e^2\exp(-\frac{1}{x})$, $x \in (0, \infty)$

VI. OBYČEJNÉ DIFERENCIÁLNÍ ROVNICE DRUHÉHO ŘÁDU

1. Vyšetřete lineární (ne)závislost funkcí a) e^{-x} a e^{-2x} b) $\sin x$ a $\cos x$

2. Ověřte, že funkce x a x^2 tvoří fundamentální systém řešení rovnice $y'' - \frac{2}{x}y' + \frac{2}{x^2}y = 0$.

3. Uvažujte rovnici $y'' + y = \operatorname{tg} x$. a) Dokažte, že $\{\sin x, \cos x\}$ tvoří fundamentální systém řešení homogenní rovnice na intervalu $(-\pi/2, \pi/2)$ b) Nalezněte obecné řešení rovnice na intervalu $(-\pi/2, \pi/2)$ c) Nalezěte řešení splňující počáteční podmínku $y(0) = 1$, $\lim_{x\to(\pi/2)^-} y(x) = 0$.

4. Nalezněte obecné řešení rovnic a) $y''-3y'+2y = 0$ b) $y''-2y'+y = 0$ c) $y''-y'+y = 0$ d) $y''-3y'+2y = 4e^{2x}$ e) $y'' - 2y' + y = 4e^{2x}$

5. Nalezněte maximální řešení diferenciálních rovnic s počáteční podmínkou a) $y'' - y' + y = \cos x - \sin x$, $y(0) = -1$, $y(1) = -\sin(1) - \cos(1)$ b) $y'' - 4y' = x^2$, $y(0) = 2$, $y'(0) = 4 - \frac{1}{32}$ c) $y'' - 2y' + y = \frac{e^x}{x}$, $y(e) = e^e$, $y'(e) = e^e$

6. Ukázkové příklady ke třetímu zápočtovému testu: a) Nalezněte obecné řešení rovnice $y' = 3x^2(1 + y^2)$ b) Nalezněte alespoň jedno maximální řešení rovnice $y' + (\sin x)y = -\sin x \cos x$ c) Nalezněte maximální řešení rovnice $y'' - 8y' + 7y = 7x - 8$ s počáteční podmínkou $y(0) = 0$, $y'(0) = 7$ d) Nalezněte obecné řešení rovnice $y'' - 5y' + 6y = -\frac{2e^{4x}}{1+e^{2x}}$.

Další příklady k procvičení lze nalézt například zde:
`http://www.karlin.mff.cuni.cz/~barta/pcODR/` a také v sekci VI zde:
`http://www.karlin.mff.cuni.cz/~kalenda/archiv/s21314l.pdf`

VI. OBYČEJNÉ DIFERENCIÁLNÍ ROVNICE DRUHÉHO ŘÁDU - VÝSLEDKY

1. a) jsou lineárně nezávislé b) jsou lineárně nezávislé

3. a) b) $\left\{a\sin x + b\cos x + (-\cos x)\sin x + \left(\sin x + \log\sqrt{\frac{1-\sin x}{1+\sin x}}\right)\cos x :\ a, b \in \mathbb{R}\right\}$
c) $y(x) = \cos x + (-\cos x)\sin x + \left(\sin x + \log\sqrt{\frac{1-\sin x}{1+\sin x}}\right)\cos x$, $x \in (-\pi/2, \pi/2)$.

4. a) $\{ae^{2x}+be^x :\ a, b \in \mathbb{R}\}$, $x \in \mathbb{R}$ b) $\{ae^x+bxe^x :\ a, b \in \mathbb{R}\}$, $x \in \mathbb{R}$ c) $\{ae^{\frac{x}{2}}\sin(\frac{\sqrt{3}x}{2})+be^{\frac{x}{2}}\cos(\frac{\sqrt{3}x}{2}) :\ a, b \in \mathbb{R}\}$, $x \in \mathbb{R}$ d) $\{ae^{2x} + be^x + 4xe^{2x} :\ a, b \in \mathbb{R}\}$, $x \in \mathbb{R}$ e) $\{ae^x + bxe^x + 4e^{2x} :\ a, b \in \mathbb{R}\}$, $x \in \mathbb{R}$

5. a) $y(x) = -\sin x - \cos x$, $x \in \mathbb{R}$ b) $y(x) = 1 + e^{4x} - \frac{1}{12}x^3 - \frac{1}{16}x^2 - \frac{1}{32}x$, $x \in \mathbb{R}$ c) $y(x) = (e+1)e^x - xe^x + (-x)e^x + (\log x)xe^x$, $x \in (0, \infty)$

6. a) Pro každé $c \in \mathbb{R}$ je maximálním řešením funkce $y_c(x) = \operatorname{tg}(x^3 + c)$, $x \in (\sqrt[3]{-\frac{\pi}{2} - c}, \sqrt[3]{\frac{\pi}{2} - c})$ b) Například $y(x) = -1 - \cos x$, $x \in \mathbb{R}$ je maximálním řešením c) $y(x) = -e^x + e^{7x} + x$, $x \in \mathbb{R}$ d) $\{ae^{3x} + be^{2x} - 2e^{3x}\operatorname{arctg}(e^x) + e^{2x}\log(e^{2x} + 1) :\ a, b \in \mathbb{R}\}$, $x \in \mathbb{R}$

VII. OTEVŘENÉ A UZAVŘENÉ MNOŽINY, SPOJITOST, PARCIÁLNÍ DERIVACE

1. Rozhodněte, zda následující množiny jsou otevřené ev. uzavřené a určete vnitřek.
a) $\mathbb{N}$ b) $\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\} \cup \{0\}$ c) $\{[x,y] \in \mathbb{R}^2 : x > 0,\ y \le 0\}$ d) $\{[x,y] \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1\}$
e) $\{[x,y] \in \mathbb{R}^2 : x^2 + e^y > 17\}$ f) $\{[x,y] \in \mathbb{R}^2 : |x-y| = x-y\}$ g) $\{[x,y,z] \in \mathbb{R}^3 : x \ge 0, y > 0, x+y = 2, z \le 0\}$

2. Zjistěte, zda existují limity a pokud ano, spočtěte je:
a) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sqrt{x^2y^2+1}-1}{x^2+y^2}$ b) $\lim\limits_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ x+y\neq 0}} \frac{x-y}{x+y}$ c) $\lim\limits_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ xy\neq 0}} (x+y)\sin\frac{1}{x}\sin\frac{1}{y}$

3. Spočtěte parciální derivace funkcí všude, kde existují
a) e^{xy} b) $xy + yz + zx$ c) $|x|\cdot|y|$ d) $|y + \cos x|$ e) $f(x,y) = \begin{cases} e^{\frac{-\pi}{x^2+3xy+3y^2}} & (x,y) \neq 0, \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$

4. Určete a nakreslete definiční obor funkce f a vyšetřete její parciální derivace
a) $f(x,y) = \sqrt{e^{xy} - e}$ b) $f(x,y) = (1+|x|)^{|y|}$

Další příklady k procvičení lze nalézt například v sekci II zde:
`http://www.karlin.mff.cuni.cz/~cuth/archiv/FSV/m2-2015-16.pdf` a také v sekci IX zde:
`http://www.karlin.mff.cuni.cz/~cuth/archiv/MFF/MA/ma2-2016-17.pdf`

VII. OTEVŘENÉ A UZAVŘENÉ MNOŽINY, SPOJITOST, PARCIÁLNÍ DERIVACE - VÝSLEDKY

1. a) Množina je uzavřená s prázdným vnitřkem b) Množina je uzavřená s prázdným vnitřkem c) Množina není uzavřená ani otevřená. Vnitřek je $\{[x,y] \in \mathbb{R}^2 : x > 0,\ y < 0\}$ d) Množina není uzavřená, je otevřená e) Množina není uzavřená, je otevřená f) Množina je uzavřená, není otevřená, vnitřek $\{[x,y] : x > y\}$ g) Ani uzavřená ani otevřená, vnitřek prázdný
2. a) limita existuje, je rovna 0 b) limita neexistuje c) limita existuje, je rovna 0
3. a) $\frac{\partial f}{\partial x} = ye^{xy}$, $\frac{\partial f}{\partial y} = xe^{xy}$ pro $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. b) $\frac{\partial f}{\partial x} = y + z$, $\frac{\partial f}{\partial y} = x + y$, $\frac{\partial f}{\partial z} = x + y$ pro $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$.
c) $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = |y|\operatorname{sgn} x$ pro $x \neq 0$. $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = |x|\operatorname{sgn} y$ pro $y \neq 0$. $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$. $\frac{\partial f}{\partial x}(0,y)$ pro $y \neq 0$ a $\frac{\partial f}{\partial y}(x,0)$ pro $x \neq 0$ neexistují. d) $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = -\operatorname{sgn}(y+\cos x)\cdot \sin x$, $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \operatorname{sgn}(y + \cos x)$, pokud $y \neq -\cos x$. $\frac{\partial f}{\partial y}(x, -\cos x)$ neexistuje pro $x \in \mathbb{R}$. $\frac{\partial f}{\partial x}(k\pi, (-1)^{k+1}) = 0$ pro $k \in \mathbb{Z}$. $\frac{\partial f}{\partial x}(x, -\cos x)$ neexistuje pro $x \neq k\pi$. e) $\frac{\partial f}{\partial x} = e^{-\frac{\pi}{x^2+3xy+3y^2}} \cdot \frac{\pi(2x+3y)}{(x^2+3xy+3y^2)^2}$, $\frac{\partial f}{\partial y} = e^{-\frac{\pi}{x^2+3xy+3y^2}} \cdot \frac{\pi(3x+6y)}{(x^2+3xy+3y^2)^2}$ pro $(x,y) \neq (0,0)$; v bodě $(0,0)$ jsou obě parciální derivace nulové.
4. viz. výsledky zkouškových písemek z FSV zde: `http://www.karlin.mff.cuni.cz/~kalenda/edu.php?edutype=archpis`

VIII. IMPLICITNÍ FUNKCE

1. Je dán vztah $x^2 + 2xy^2 + y^4 - y^5 = 0$ a bod $[0, 1]$. Dokažte, že:

i) tímto vztahem je definována hladká funkce $y = f(x)$ v jistém okolí bodu 0, pro kterou platí $f(0) = 1$;

ii) spočtěte $f'(0)$;

iii) spočtěte $f''(0)$;

iv) zjistěte, zda je f na okolí bodu 0 konkávní/konvexní.

2. Ukažte, že daná rovnice určuje v jisté okolí bodu $M = [m_1, m_2]$ implicitně zadanou funkci $y = f(x)$. Spočtěte $f'(m_1)$ a $f''(m_1)$.

a) $\operatorname{arctg} \frac{x+2y}{3} + \operatorname{arctg} \frac{2x+y}{3} = \frac{\pi}{2}$, $M = [1, 1]$ b) $x^y + y^x = 3$, $M = [1, 2]$
c) $\cos(y + xe^x) + \sin(y - xe^x) = -1$, $M = [0, \pi]$ d) $e^{(x^2+y-2)} + e^{(y^2-x)} = 2$, $M = [1, 1]$

Další příklady k procvičení lze nalézt například v sekci III zde:
`http://www.karlin.mff.cuni.cz/~cuth/archiv/FSV/m2-2015-16.pdf` a také zde:
`http://www.karlin.mff.cuni.cz/~zeleny/mff/MA_3/Implicitni_funkce.pdf`

VIII. IMPLICITNÍ FUNKCE - VÝSLEDKY

1. $f'(0) = 2$, $f''(0) = -14$, rovnice tečny je $y = -4x$, funkce je na okolí bodu 0 konkávní

2. viz. výsledky zkouškových písemek zde: `http://www.karlin.mff.cuni.cz/~kalenda/edu.php?edutype=archpis`

IX. EXTRÉMY FUNKCÍ VÍCE PROMĚNNÝCH

1. U následujících funkcí nalezněte lokální extrémy.
a) $f(x,y) = x^2 + (y-1)^2$ b) $f(x,y) = e^{x^2-y}(5-2x+y)$
c) $f(x,y) = xy\sqrt{1-x^2-y^2}$, $(x,y) \in \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ x^2+y^2 < 1\}$ d) $f(x,y) = xy\log(x^2+y^2)$

2. Zjistěte sup **a** inf **funkce** f **na množině** M **a vyšetřete, zda těchto hodnot funce** f **na** M **nabývá (bez Lagrangeových multiplikátorů).**

a) $f(x,y) = x - 2y - 3$; $M = \{[x,y]; 0 \le x \le 1, 0 \le y \le 1, x+y \le 1\}$
b) $f(x,y,z) = (x+y)^2 + (x-y)^2 + z$; $M = \langle -1,1\rangle \times \langle -1,1\rangle \times \langle -1,1\rangle$
c) $f(x,y,z) = x^2 + 4x + 5 - 3y^2 - 3y$; $M = \mathbb{R}^2$ d) $f(x,y) = x^2 - xy + y^2$; $M = \{[x,y]; |x|+|y| \le 1\}$ e) $f(x,y) = x^2 + y^2; M = \{[x,y]; x^2 + 4y^2 = 1\}$ f) $f(x,y) = xy; M = \{[x,y]; x+y = 5\}$

3. Nalezněte maxima a minima funkce f **na množině** M **(s Lagrangeovými multiplikátory).**

a) $f(x,y) = 5x - 3y$, $M = \{[x,y], x^2+y^2 = 136\}$ b) $f(x,y) = xy$, $M = \{[x,y], 3x^2+y^2 = 6\}$
c) $f(x,y) = x+y$, $M = \{[x,y], x^3+y^3-2xy = 0, x \ge 0, y \ge 0\}$
d) $f(x,y) = \operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} y$, $M = \{[x,y], x^2+y^2 \le 1, x \ge 0, y \ge 0\}$

4. Dokažte nerovnost $\frac{x^n+y^n}{2} \ge \left(\frac{x+y}{2}\right)^n$ pro $n \ge 1$, $x \ge 0$ a $y \ge 0$.

5. Pro $M \subset \mathbb{R}^2$ a $x \in \mathbb{R}^2$ je vzdálenost bodu $\mathbf{x}$ od M definována jako $\inf\{\rho(\mathbf{x},\mathbf{m}), \mathbf{m} \in M\}$. Určete vzdálenost bodu $[a, \frac{1}{2}]$ od paraboly $y = x^2$.

6. Dané kladné číslo a rozložte na součet dvou čísel x a y tak, že součet jejich druhých mocnin je minimální.

7. Při jakých rozměrech bude mít otevřená nádoba tvaru kvádru daného objemu V minimální povrch?

Další příklady k procvičení lze nalézt například v sekci IV zde:
`http://www.karlin.mff.cuni.cz/~cuth/archiv/FSV/m2-2015-16.pdf` a také zde:
`http://www.karlin.mff.cuni.cz/~zeleny/mff/MA_3/Extremy.pdf`

IX. EXTRÉMY FUNKCÍ VÍCE PROMĚNNÝCH - VÝSLEDKY

1. a) $[0,1]$ - ostré lokální minimum b) $[1,-2]$ - není extrém (sedlový bod) c) $[\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}]$ a $[-\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}]$ jsou ostrá lokální maxima, $[\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}]$ a $[-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}]$ jsou ostrá lokální minima, ve stacionárním bodě $[0,0]$ není lokální extrém d) $[\frac{1}{\sqrt{2e}}, \frac{1}{\sqrt{2e}}]$ a $[-\frac{1}{\sqrt{2e}}, -\frac{1}{\sqrt{2e}}]$ jsou ostrá lokální minima, $[\frac{1}{\sqrt{2e}}, -\frac{1}{\sqrt{2e}}]$ a $[-\frac{1}{\sqrt{2e}}, \frac{1}{\sqrt{2e}}]$ jsou ostrá lokální maxima, ve stacionárních bodech $[0,\pm 1]$, $[\pm 1, 0]$ není lokální extrém
2. a) max -2 v bodě $[1,0]$, min -5 v bodě $[0,1]$ b) max 5 v bodech $[\pm 1, \pm 1, 1]$, min -1 v bodě $[0,0,-1]$ c) sup neexistuje, inf neexistuje d) max 1 v bodech $[\pm 1, 0]$, $[0, \pm 1]$, min 0 v bodě $[0,0]$ e) max 1 v bodech $[\pm 1, 0]$, min $\frac{1}{4}$ v bodech $[0, \pm\frac{1}{2}]$ f) max $\frac{25}{4}$ v bodě $[\frac{5}{2}, \frac{5}{2}]$, inf neexistuje
3. a) max 68 v $[10,-6]$, min -68 v $[-10,6]$ b) max $\sqrt{3}$ v $[1,\sqrt{3}]$ a $[-1,-\sqrt{3}]$, min $-\sqrt{3}$ v $[1,-\sqrt{3}]$ a $[-1,\sqrt{3}]$ c) max 2 v $[1,1]$, min 0 v $[0,0]$ d) max v $[\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}]$, min v $[0,0]$
4. Hint: najděte minimum funkce $f(x,y) = \frac{x^n+y^n}{2}$ za podmínky $x+y = c$.
5. $\sqrt{a^2 - \frac{3}{4}\sqrt[3]{4}\sqrt[3]{a} + \frac{1}{4}}$
6. $x = y = \frac{a}{2}$
7. Rozměry nádoby jsou $\sqrt[3]{2V}$, $\sqrt[3]{2V}$, $\sqrt[3]{\frac{V}{4}}$