1. CVIČENÍ

1. Najděte reálnou a imaginární část komplexních čísel

a) $\frac{1-i}{1+i}$ b) $\frac{2}{1-5i}$ c) $(1+i\sqrt{2})^3$ d) $\frac{2+i}{i}+\frac{i}{i+1}-\frac{2i+1}{i-1}$ e) $\overline{\frac{3+4i}{1-2i}}$

2. Určete absolutní hodnotu

$$\left|\frac{|4-3i|+i}{3-2i}\right|$$

3. Zapište v goniometrickém tvaru

a) -5 b) $-3-3i$ c) $10-10i$ d) $-2+5i$ e) $-\cos\frac{\pi}{7}+i\sin\frac{\pi}{7}$

4. Najděte reálnou a imaginární část následujících hodnot funkcí

a) $\sin(2+i)$ b) $\cos(2i)$ c) $\mathrm{tg}(2-i)$ d) $\mathrm{cotg}(\frac{\pi}{4}-i\log 3)$

Výsledky: **1.**Výsledky ve tvaru $\mathrm{Re}\,z$; $\mathrm{Im}\,z$: a) 0; -1 b) $\frac{1}{13}$; $\frac{5}{13}$ c) -5; $\sqrt{2}$ d) 1; 0 e) -1; -2
2. $\sqrt{2}$
3. a) $5(\cos\pi+i\sin\pi)$ b) $3\sqrt{2}(\cos(-\frac{3}{4}\pi)+i\sin(-\frac{3}{4}\pi))$ c) $10\sqrt{2}(\cos(-\frac{\pi}{4})+i\sin(-\frac{\pi}{4}))$ d) $\sqrt{29}(\cos\arccos\frac{-2}{\sqrt{29}}+i\sin\arccos\frac{-2}{\sqrt{29}})$ e) $1(\cos(\frac{6}{7}\pi)+i\sin(\frac{6}{7}\pi))$
4.Výsledky ve tvaru $\mathrm{Re}\,z$; $\mathrm{Im}\,z$ (používáme funkce $\sinh(x)=\frac{e^x-e^{-x}}{2}$ a $\cosh(x)=\frac{e^x+e^{-x}}{2}$): a) $\sin 2\cdot\cosh 1$; $\cos 2\cdot\sinh 1$; b) $\cosh 2$; 0 c) $\frac{\sin 2\cdot\cos 2}{\cos^2 2+\sinh^2 1}$; $\frac{-\sinh 1\cdot\cosh 1}{\cos^2 2+\sinh^2 1}$ d) $\frac{9}{41}$; $\frac{40}{41}$

1. Najděte "všechny hodnoty komplexních odmocnin" (tj. všechna řešení rovnice $z^n = a$, pokud je v zadání uvedeno $\sqrt[n]{a}$): a) $\sqrt[3]{1}$ b) $\sqrt{i-1}$

2. Najděte všechna řešení následujících rovnic v $\mathbb{C}$: a) $iz^2 - 3z + 4i = 0$ b) $z^2 - 6iz - 9 = 0$
c) $\sin z + \cos z = 10$ d) $\sin z - \cos z = i$ e) $\cos z = \frac{3}{4} i$

3. Najděte reálnou a imaginární část následujících hodnot funkcí

a) i^i b) $(-1)^{\sqrt{2}}$ c) 2^i d) $(-2i)^{-2i}$

Výsledky: **1.** a) $1, -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$ b) $\sqrt[4]{2}(\cos\frac{3}{8}\pi + i\sin\frac{3}{8}\pi), \sqrt[4]{2}(\cos\frac{11}{8}\pi + i\sin\frac{11}{8}\pi)$
2. a) $i, -4i$ b) $3i$ c) $\frac{\pi}{4} + 2k\pi + i\log(5\sqrt{2}+7), \frac{\pi}{4} + 2k\pi + i\log(5\sqrt{2}-7)$
d) $\frac{\pi}{4} + 2k\pi - i\log\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{2}}, -\frac{3\pi}{4} + 2k\pi - i\log\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{2}}$ e) $(4k+1)\pi + i\log 2, (4k-1)\pi - i\log 2$
3.Výsledky ve tvaru $\operatorname{Re} z$; $\operatorname{Im} z$: a) $e^{-\pi/2}; 0$ b) $\cos(\sqrt{2}\pi); \sin(\sqrt{2}\pi)$ c) $\cos(\log 2); \sin(\log 2)$
d) $e^{-\pi}\cos(-2\log 2); e^{\pi}\sin(-2\log 2)$

3. CVIČENÍ

1. Ve kterých bodech mají následující funkce derivaci podle komplexní proměnné? a) $|z|$ b) $|(\operatorname{Re} z)^2 - (\operatorname{Im} z)^2| + 2i|\operatorname{Re} z \cdot \operatorname{Im} z|$ c) $|z|^2 + i\operatorname{Im}(z^2)$

2. Pomocí definice křivkového integrálu spočtěte $\int_\varphi f$, kde: a) $f(z) = \operatorname{Re} z$, φ je orientovaná úsečka $[0, 1+i]$ b) $f(z) = \operatorname{Im} z$, φ je kladně orientovaná polokružnice $|z| = 1$, $0 \le \arg z \le \pi$ c) $f(z) = |z|$, φ je orientovaná úsečka $[0, 2-i]$ d) $f(z) = z^2$, φ je oblouk paraboly $y = 1 - x^2$ s počátečním bodem -1 a koncovým 1 e) $f(z) = |z|z$, φ je kladně orientovaný obvod "čtvrtkružnicové výseče" $|z| = 1$, $0 \le \arg z \le \frac{\pi}{2}$ (viz. obrázek na tabuli) f) $f(z) = |z|\bar{z}$, φ je kladně orientovaný obvod "osminokružnicové výseče" $|z| = 1$, $0 \le \arg z \le \frac{\pi}{4}$ (viz. obrázek na tabuli)

Výsledky: **1.** a) v žádném bodě b) v bodech z, pro které platí $0 < \operatorname{Im} z < \operatorname{Re} z$, $\operatorname{Re} z < \operatorname{Im} z < 0$, $0 < -\operatorname{Re} z < \operatorname{Im} z$ nebo $\operatorname{Im} z < -\operatorname{Re} z < 0$ c) v bodech reálné osy

2. a) $\frac{1+i}{2}$ b) $-\frac{\pi}{2}$ c) $\frac{\sqrt{5}}{2}(2-i)$ d) $\frac{2}{3}$ e) $\frac{1}{3}$ f) $\frac{\pi}{4}i$

4. CVIČENÍ

1. S využitím Cauchyovy věty, znalosti primitivních funkcí a definice spočtěte $\int_\varphi f$, pokud:
a) $f(z) = -\frac{1}{z} + \frac{1}{2}\frac{1}{z-1} + \frac{1}{2}\frac{1}{z+1}$ a φ je kladně orientovaná kružnice o poloměru $\frac{1}{2}$ a středu (a2) 0 (a3) 1 (a4) 2;
b) $f(z) = \frac{1}{z^2(z^2-1)}$ a φ je kladně orientovaná kružnice o poloměru $\frac{1}{2}$ a středu (b1) -1 (b2) 0 (b3) 1 (b4) 2

2. Pomocí Cauchyova vzorce spočtěte integrály $\int_\varphi f$, kde φ je kladně orientovaná kružnice o středu 0 a poloměru 2; a) $f(z) = \frac{e^z}{z^2-1}$ b) $f(z) = \frac{e^z - z}{z^2-1}$ c) $\frac{ze^z}{(z+1)^3}$

Výsledky: **1.** a) (a2) $-2\pi i$, (a3) πi, (a4) 0; b) (b1) $-\pi i$, (b2) 0, (b3) πi, (b4) 0
2. a) $\pi i(e - \frac{1}{e})$ b) $\pi i(e - \frac{1}{e})$ c) $\frac{\pi i}{e}$

5. CVIČENÍ

1. Najděte Laurentův rozvoj funkce $\frac{1}{(z+1)(z+2)}$ v maximálních mezikružích o středech -1 a 1.

2. Zjistěte obor konvergence Laurentovy řady $\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2^{n^2}}(z-1)^n$.

3. Najděte Laurentovu řadu funkce $\frac{1}{(z-i)^2}$ v mezikruží $P(1, \sqrt{2}, \infty)$.

4. Najděte Laurentův rozvoj funkcí v maximálních mezikružích o uvedených středech:
a) $z^3 e^{1/z}$, 0 b) $\frac{1}{(z-2)(z-1)^2}$, 1 a 2 c) $\frac{1}{z^2-1}$, 1, -1 a 0 d) $\frac{1}{z-z^3}$, 0 a 1

Výsledky: **1.** v $P(-1,0,1)$: $\sum_{n=-1}^{\infty}(-1)^{n+1}(z+1)^n$, v $P(-1,1,\infty)$: $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(z+1)^n}$;
v $P(1,0,2)$: $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \left(\frac{1}{2^{n+1}} - \frac{1}{3^{n+1}}\right)(z-1)^n$, v $P(1,2,3)$: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-2)^{n-1}}{(z-1)^n} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{3^{n+1}}(z-1)^n$,
v $P(1,3,\infty)$: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}(2^{n-1}-3^{n-1})}{(z-1)^n}$
2. $P(1,0,\infty)$
3. $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(1-i)^n \frac{n+1}{(z-1)^{n+2}}$
4. a) v $P(0,0,\infty)$: $\sum_{n=-\infty}^{3} \frac{1}{(3-n)!} z^n$ b) v $P(1,0,1)$: $\sum_{n=0}^{\infty}(z-1)^n - \frac{1}{z-1} - \frac{1}{(z-1)^2}$, v $P(1,1,\infty)$: $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{(z-1)^n}$; v $P(2,0,1)$: $\frac{1}{z-2} + \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1}(n+2)(z-2)^n$, v $P(2,1,\infty)$: $\sum_{n=-\infty}^{-1}(-1)^{n+1}(z-2)^n$

6. CVIČENÍ

1. Najděte a klasifikujte izolované singularity následujících funkcí (včetně bodu ∞):
a) $\frac{z}{e^z+1}$ b) $\sin\frac{\pi}{z^2}$ c) $\frac{1}{e^z-1}-\frac{1}{\sin z}$ d) $z^2e^{1/z}$ e) $\sin z$ f) $\frac{\sin z}{z^2}$

2. Najděte izolované singularity následujících funkcí a spočtěte příslušná rezidua:
a) $\sin\frac{1}{1-z}$ b) $\frac{1}{z^3-z^5}$ c) $\frac{z^2+z-1}{z^2(z-1)}$ d) $\frac{\sin 2z}{(z+1)^3}$ e) $\frac{e^z}{z^2(z^2+9)}$ f) $(z+1)e^{\frac{z-1}{z}}$ g) $\sin\frac{z}{z+1}$

Výsledky: **1.** a) póly násobnosti 1 v bodech $\{(2k+1)\pi i\colon k\in\mathbb{Z}\}$, v ∞ není izolovaná singularita b) v bodě 0 podstatná singularita, v ∞ odstranitelná singularita c) v bodě 0 odstranitelná singularita, v bodech $\{k\pi\colon k\in\mathbb{Z}\}\cup\{2k\pi i\colon k\in\mathbb{Z}\}$ pól násobnosti 1, v ∞ není izolovaná singularita d) v bodě 0 podstatná singularita, v bodě ∞ pól násobnosti 2 e) v ∞ podstatná singularita f) v bodě 0 pól násobnosti 1, v bodě ∞ podstatná singularita
2. a) 1, reziduum -1 b) 0, reziduum 1; 1, reziduum $-\frac{1}{2}$; -1, reziduum $-\frac{1}{2}$ c) 0, reziduum 0; 1, reziduum 1 d) -1, reziduum $2\sin 2$ e) 0, reziduum $\frac{1}{9}$; $3i$, reziduum $\frac{ie^{3i}}{54}$; $-3i$, reziduum $-\frac{ie^{-3i}}{54}$ f) 0, reziduum $-\frac{e}{2}$ g) -1, reziduum $-\cos 1$

9. CVIČENÍ

1. Spočtěte $\mathcal{L}(f)$ pro zadané funkce f: a) $f(t) = e^{-3t}\cos(2t + \frac{\pi}{2}) + \sin(3(t-\pi))$ b) $5 \cdot 2^{-t} - 4t \cdot 3^t$ c) $f(t) = t\sin(2t)$ d) $4\sin^2 3t + te^{3t}\cos 2t$

2. Nalezněte alespoň jednu funkci z $\mathcal{L}^{-1}(g(s))$ pro zadané funkce g: a) $g(s) = \frac{2s+3}{s^2+4s+3}$, $s > 0$ b) $\frac{4s+7}{s^2+16}$, $s > 0$ c) $g(s) = \frac{4s+5}{s^2+4s+13}$, $s > 0$ d) $g(s) = \frac{s^2}{(s-2)^3}$, $s > 2$ e) $\frac{s+3}{s(s^2+1)} + \frac{1}{(s-2)^3}$, $s > 2$ f) $g(s) = \frac{1}{s^2(s^2+1)}$, $s > 0$ g) $\frac{2s+3}{s^2+4}$, $s > 0$ h) $g(s) = \frac{3s-5}{s^2+2s+5}$, $s > -1$ i) $g(s) = \frac{2s+3}{(s+1)^3}$, $s > -1$ j) $g(s) = \frac{1}{s^2+4s+3}$, $s > -1$ k) $g(s) = \frac{s+3}{s^2(s^2+1)}$, $s > 0$

3. Spočtěte $\mathcal{L}(f)$ pro zadané funkce f:

a) $f(t) = \begin{cases} 2 & t \in [3,5] \\ 0 & t \notin [3,5] \end{cases}$ b) $f(t) = \begin{cases} 4-t & t \in [1,4] \\ 0 & t \notin [1,4] \end{cases}$ c) $f(t) = \begin{cases} \sin t & t \in [0,\pi] \\ 0 & t \geq \pi \end{cases}$

d) $f(t) = \begin{cases} 1 & t \in (1,3] \\ 0 & t \notin (1,3] \end{cases}$ e) $f(t) = \begin{cases} 2t & t \in [0,1] \\ 2 & t > 1 \end{cases}$ f) $f(t) = \begin{cases} e^{-t} & t \in [0,2] \\ 0 & t > 2 \end{cases}$

4. Nalezněte alespoň jednu funkci z $\mathcal{L}^{-1}(g(s))$ pro zadané funkce g: a) $g(s) = \frac{2}{s(s-1)}e^{-s}$, $s > 1$ b) $g(s) = \frac{3s+2-6e^{-\pi s}}{s^2+4}$, $s > 0$ c) $g(s) = \frac{2}{s^2}(1 - e^{-s} - se^{-3s})$, $s > 0$ d) $g(s) = \frac{1}{s^2+9}(3 - 3e^{-\frac{\pi}{2}s} - (3+s)e^{-\frac{\pi}{6}s})$, $s > 0$

Výsledky: **1.** a) Hint: použijte součtový vzorec pro funkce cosinus a sinus, výsledek: $\frac{-2}{(s+3)^2+4} - \frac{3}{s^2+9}$, $s > 0$ b) $\frac{5}{s+\log 2} - \frac{4}{(s-\log 3)^2}$, $s > \log 3$ c) $\frac{4s}{(s^2+4)^2}$, $s > 0$ d) $\frac{2}{s} - \frac{2s}{s^2+36} + \frac{s^2-6s+5}{((s-3)^2+4)^2}$, $s > 3$

2. a) $\frac{3}{2}e^{-3t} + \frac{1}{2}e^{-t}$, $t \geq 0$ b) $4\cos 4t + \frac{7}{4}\sin 4t$, $t \geq 0$ c) $e^{-2t}(4\cos 3t - \sin 3t)$, $t \geq 0$ d) $e^{2t}(1 + 4t + 2t^2)$, $t \geq 0$ e) $\sin t + 3 - 3\cos t + \frac{1}{2}t^2e^{2t}$, $t \geq 0$ f) $t - \sin t$, $t \geq 0$ g) $2\cos 2t + \frac{3}{2}\sin 2t$, $t \geq 0$ h) $e^{-t}(3\cos 2t - 4\sin 2t)$, $t \geq 0$ i) $e^{-t}(\frac{1}{2}t^2 + 2t)$, $t \geq 0$ j) $\frac{1}{2}(e^{-t} - e^{-3t})$, $t \geq 0$ k) $1 + 3t - \cos t - 3\sin t$, $t \geq 0$

3. a) $\frac{2}{s}(e^{-3s} - e^{-5s})$, $s > 0$ b) $\frac{1}{s^2}(3se^{-s} + e^{-4s} - e^{-s})$, $s > 0$ c) $\frac{1+e^{-\pi s}}{s^2+1}$, $s > 0$ d) $\frac{1}{s}(e^{-s} - e^{-3s})$, $s > 0$ e) $\frac{2}{s^2}(1 - e^{-s})$, $s > 0$ f) $\frac{1}{s+1}(1 - e^{-2(s+1)})$, $s > -1$

4. a) $f(t) = \begin{cases} 0 & t \in [0,1] \\ 2(e^{t-1} - 1) & t > 1 \end{cases}$ b) $f(t) = \begin{cases} 3\cos 2t + \sin 2t & t \in [0,\pi] \\ 3\cos 2t - 2\sin 2t & t > \pi \end{cases}$ c) $f(t) = \begin{cases} 2t & t \in [0,1] \\ 2 & t \in (1,3] \\ 0 & t > 3 \end{cases}$

d) $f(t) = \begin{cases} \sin 3t & t \in [0,\frac{\pi}{6}] \\ \cos 3t & t \in (\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{2}] \\ 0 & t > \frac{\pi}{2} \end{cases}$

10. CVIČENÍ

1. Nalezněte reálnou funkci y, která splňuje následující rovnice pro všechna $t \in I$:
a) $y''(t) + 2y'(t) + 2y(t) = \chi_{(1,\infty)}(t) \cdot e^{-t}, \qquad y'(0) = y(0) = 0, \qquad I = (-\infty, \infty) \setminus \{1\}$
b) $y''(t) + 4y(t) = 2\cos 2t, \qquad y(0) = 0,\ y'(0) = 4, \qquad I = (-\infty, \infty) \setminus \{1\}$
c) $y''(t) + y(t) = e^{-t}, \qquad y(0) - y_0,\ y'(0) = y_1, \qquad I = (-\infty, \infty)$
d) $y'(t) + 2y(t) + 10\int_0^t y(x)\mathrm{d}x = 0, \qquad y(0) = 1, \qquad I = [0, \infty)$
e) $y'(t) + 6y(t) + 9\int_0^t y(x)\mathrm{d}x = 0, \qquad y(0) = 1, \qquad I = [0, \infty)$
f) $ty''(t) - y'(t) = -1, \qquad y(0) = 1,\ y(1) = 2, \qquad I = (-\infty, \infty)$

Výsledky: **1.** a) $\chi_{(1,\infty)}(t) \cdot e^{-t}(1 - \cos(t-1))$ b) $\frac{1}{2}(4+t)\sin 2t$ c) $\frac{1}{2}e^{-t} + (y_0 - \frac{1}{2})\cos t + (y_1 + \frac{1}{2})\sin t$
d) $e^{-t}(\cos 3t - \frac{1}{3}\sin 3t)$ e) $e^{-3t}(1 - 3t)$ f) $t + t^2$

11. CVIČENÍ

1. Spočtěte $\mathcal{F}(f)$ pro zadané funkce f: a) $f(x) = \begin{cases} 1 & x \in (0,1) \\ 0 & \text{jinak} \end{cases}$ b) $f(x) = \begin{cases} x & x \in (-1,1) \\ 0 & \text{jinak} \end{cases}$

c) $f(x) = \begin{cases} 1-|x| & x \in (-1,1) \\ 0 & \text{jinak} \end{cases}$ d) $f(x) = \frac{1}{(x^2+a^2)^2}$ $(a>0)$ e) $f(x) = \frac{\sqrt{2}x}{\sqrt{\pi}(1+x^2)^2}$

2. Nechť $a>0$, $b \in \mathbb{R}$, $\mathcal{F}(e^{-ax}\chi_{[0,\infty)}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{1}{a+it}$. Určete $\mathcal{F}(e^{-ax}e^{ibx}\chi_{[0,\infty)})$.

3. Nechť pro $a>0$ platí $\mathcal{F}(\chi_{[-a,a]})(t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{\sin at}{t}$ pro $t \neq 0$. Určete $\mathcal{F}(\cos(x)\chi_{[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]})(t)$ pro $|t| \neq 1$.

4. Nechť platí $\mathcal{F}(e^{-|x|})(t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{1}{1+t^2}$. Určete $\mathcal{F}(\cos(x)e^{-|x|})$.

Výsledky: **1.** a) $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{1-e^{-it}}{it}$ b) $-i\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{\sin t - t\cos t}{t^2}$ pro $t \neq 0$, $\mathcal{F}(f)(0) = 0$ c) $\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{1-\cos t}{t^2}$ pro $t \neq 0$, $\mathcal{F}(f)(0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$
d) $\sqrt{\frac{\pi}{2}}e^{-a|t|}\frac{1+a|t|}{2a^3}$ e) $-it\frac{e^{-|t|}}{2}$
2. $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{1}{a+i(t-b)}$ **3.** $\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{\cos\frac{t\pi}{2}}{1-t^2}$ (Hint: $\cos x = \frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}$) **4.** $\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{t^2+2}{t^4+4}$

12. CVIČENÍ

1. Pro zadané operátory F sestavte příslušnou Euler-Lagrangeovu rovnici a pomocí ní určete, které funkce y mohou býti lokálními extrémy operátoru F:

a)

$$F(y) = \int_2^3 12xy(x) + y'(x)^2 \, \mathrm{d}x, \quad y(2) = 1, \, y(3) = 27.$$

b)

$$F(y) = \int_0^1 x + y(x)^2 + 3y'(x) \, \mathrm{d}x, \quad y(0) = 0, \, y(1) = 1.$$

c)

$$F(y) = \int_{-1}^1 y(x)^2 + x^2 y'(x) \, \mathrm{d}x, \quad y(-1) = -1, \, y(1) = 1.$$

d)

$$F(y) = \int_1^2 y'(x) \, \mathrm{d}x, \quad y(1) = 0, \, y(2) = 0.$$

e)

$$F(y) = \int_0^{\pi/2} y(x)^2 - y'(x)^2 \, \mathrm{d}x, \quad y(0) = 2, \, y(\tfrac{\pi}{2}) = 1.$$

f)

$$F(y) = \int_0^1 xy'(x) + y'(x)^2 \, \mathrm{d}x, \quad y(0) = 13, \, y(1) = 13 + \tfrac{3}{4}.$$

g)

$$F(y) = \int_0^1 2y(x)e^x + y(x)^2 + y'(x)^2 \, \mathrm{d}x, \quad y(0) = 0, \, y(1) = \tfrac{1}{e}.$$

h)

$$F(y) = \int_2^3 2y'(x)^3 \, \mathrm{d}x, \quad y(2) = y(3) = 4.$$

Výsledky: **1.** a) $y(x) = x^3 + 7x - 21$ b) lokální extrémy neexistují c) $y(x) = x$ d) Euler-Lagrangeově rovnici vyhovují všechny funkce y e) $y(x) = \sin x + 2\cos x$ f) $y(x) = -\frac{x^2}{4} + x + 13$ g) $y(x) = e^{-x} - e^x + xe^x$ h) $y(x) = -x + 6$