Kalkulus 4, LS 2018-2019
Zadání písemné části zkoušky - Varianta A

Příklad 1. Pro funkci
$$f(z) = \frac{\sin z}{e^z - 1}$$
najděte všechny kořeny a izolované singularity. Pro kořeny určete jejich násobnost, pro izolované singularity jejich typ.
(8 bodů)

Příklad 2. Spočtěte integrál
$$\int_0^\infty \frac{x^{2/3}}{x^3+1}\,\mathrm{d}x.$$
Hint: v závěru výpočtu je třeba ukázat následující rovnost
$$-\frac{2}{3}\pi i \frac{e^{i\pi 5/9} + e^{i\pi 5/3} + e^{i\pi 25/9}}{1 - e^{i\pi 10/3}} = (2\cos\tfrac{\pi}{9} - 1)\tfrac{2\pi}{3\sqrt{3}}.$$
(18 bodů)

Příklad 3. (i) Nalezněte alespoň jednu funkci z $\mathcal{L}^{-1}(g(s))$, kde
$$g(s) = \frac{s+7}{s^2+4s+3}, \quad s > 1.$$
(ii) Pomocí výsledku z (i) řešte diferenciální rovnici pro $t \geq 0$:
$$y'(t) + 4y(t) + 3\int_0^t y(x)\,\mathrm{d}x = 7, \quad y(0) = 1.$$
(8 bodů)

Příklad 4. (i) Spočtěte Fourierovu transformaci funkce
$$f(x) = \begin{cases} |x|\sqrt{2\pi} & x \in [-1,1], \\ 0 & x \in \mathbb{R} \setminus [-1,1]. \end{cases}$$
(ii) Pomocí výsledku z (i) určete Fourierovu transformaci funkce $g(x) := f(4x+6)$.
(6 bodů)

Kalkulus 3, ZS 2018-2019
Zadání písemné části zkoušky - Varianta B

Příklad 5. (i) Nalezněte všechna komplexní čísla z, pro která platí $\cos z + i \sin z = \frac{e}{\sqrt{2}}(1+i)$.

(ii) Pomocí výsledku z (i) najděte všechny izolované singularity funkce

$$f(z) = \frac{1}{\cos z + i \sin z - \frac{e}{\sqrt{2}}(1+i)}$$

a určete jejich typ.

(10 bodů)

Příklad 6. Spočtěte integrál

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{(13 + 5\cos x)(5 - 4\cos x)} \, \mathrm{d}x.$$

Hint: může se hodit znalost, že $\sqrt{576} = 24$.
(11 bodů)

Příklad 7. (i) Spočtěte Fourierovu transformaci funkce

$$f(x) = \frac{1}{(x^2+1)(x^2+9)}$$

(ii) Pomocí výsledku z (i) určete Fourierovu transformaci funkce $g(x) := \cos(x) f(x)$.
(11 bodů)

Příklad 8. Uvažujme $M := \{y \in \mathcal{C}^1([1,2])\colon y(1) = \frac{3}{8}, y(2) = \frac{1}{2}\}$ a zobrazení $F : M \to \mathbb{R}$ dané předpisem

$$F(y) := \int_1^2 -3xy'(x) + 2(y'(x))^2 \, \mathrm{d}x, \quad y \in M.$$

Nalezněte funkci $y_0 \in M$, která je bodem globálního minima zobrazení F.
(8 bodů)

Kalkulus 4, LS 2018-2019
Zadání písemné části zkoušky - Varianta C

Příklad 9. (i) Nalezněte všechna komplexní čísla z, pro která platí $\cos z + \frac{5}{8}e^{-iz} = -2i$.
(ii) Pomocí výsledku z (i) najděte všechny izolované singularity funkce

$$f(z) = \frac{z}{\cos z + \frac{5}{8}e^{-iz} + 2i}$$

a určete typ izolované singularity alespoň v jednom bodě.

(12 bodů)

Příklad 10. Spočtěte integrál

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(x)}{(4x^2 - \pi^2)(x^2+1)^2}\,\mathrm{d}x.$$

(14 bodů)

Příklad 11. S použitím Laplaceovy transformace řešte diferenciální rovnici pro $t \geq 0$:

$$y''(t) + 6y'(t) + 9y(t) = t^2 e^{-3t}, \quad y(0) = y'(0) = 0.$$

(7 bodů)

Příklad 12. Uvažujme $M := \{y \in \mathcal{C}^1([0,1]) \colon y(0) = 0, y(1) = 0\}$ a zobrazení $F : M \to \mathbb{R}$ dané předpisem

$$F(y) := \int_0^1 3(y'(x))^2 - 5y(x)y'(x) + 12y(x)\,\mathrm{d}x, \quad y \in M.$$

Pomocí Euler-Lagrangeovy rovnice nalezněte jedinou funkci $y_0 \in M$, která může být bodem lokálního extrému zobrazení F. Spočtěte $F(y_0)$ a určete, zda se jedná o globální minimum.
(7 bodů)