Podmínky k získání zápočtu:
Jsou určeny centrálně - viz. stránky přednášejícího Luboše Picka:
`https://www.karlin.mff.cuni.cz/~pick/2023-2024-ZS-pozadavky.pdf`

CVIČENÍ 1

1. Řeště soustavu $y' = \mathbb{A}y$.

a) $\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$; b) $\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$; c) $\mathbb{A} = \begin{pmatrix} -7 & 9 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$; d) $\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$;

e) $\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 7 & 4 & -1 \\ 13 & 7 & -3 \end{pmatrix}$; f) $\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 1 & -6 & 3 \\ 0 & -8 & 6 \\ 3 & -12 & 7 \end{pmatrix}$;

2. Naleznete maximální řešení soustavy splnující počáteční podmínku $y(0) = (1, 1, 1)$.

$$y' = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} y$$

3. Naleznete všechna maximální řešení soustavy

$$y' = \begin{pmatrix} 6 & 5 & 13 \\ -8 & -7 & -21 \\ 2 & 2 & 6 \end{pmatrix} y$$

a určete všechna řešení soustavy, která mají v $+\infty$ limitu $(0, 0, 0)$.

Další užitečné zdroje příkladů:
- Zkouškové písemky z minulých let na webu prof. Spurného:
`http://www.karlin.mff.cuni.cz/~spurny/pages/ma3.php#`
- Sbírka úloh a řešených příkladů ODR od T. Bárty a D. Pražáka:
`http://www.karlin.mff.cuni.cz/~barta/pcODR/index.html`
- Příklady od cvičící Kristýny Kuncové:
`https://www.karlin.mff.cuni.cz/~kuncova/vyukaMA3.php`
- Příklady od přednášejícího, Luboše Picka:
`http://www.karlin.mff.cuni.cz/~pick/2023-2024-ZS-cviceni.pdf`

CVIČENÍ 2

1. Řeště soustavu $y' = \mathbb{A}y + b$ a nalezněte řešení splňující zadanou počáteční podmínku.

a) $\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 4 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, $\quad b = \begin{pmatrix} e^{2t} \\ -4e^{-t} \\ 0 \end{pmatrix}$, počáteční podmínka $y(0) = (0, -1, 1)$;

b) $\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, $\quad b = \begin{pmatrix} e^{t} \\ e^{t} \end{pmatrix}$, počáteční podmínka $y(0) = (0, 0)$;

c) $\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$, $\quad b = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}t^2 \\ 5t^2 \end{pmatrix}$, počáteční podmínka $y(0) = (2, 2)$;

d) $\mathbb{A} = \begin{pmatrix} -4 & 0 & 6 \\ -7 & 2 & 8 \\ -3 & 0 & 5 \end{pmatrix}$, $\quad b = \begin{pmatrix} 2e^{t} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, počáteční podmínka $y(0) = (4, 5, 0)$;

e) $\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 4 \\ 2 & 2 & 1 \\ -2 & -2 & -2 \end{pmatrix}$, $\quad b = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, počáteční podmínka $y(0) = (1, 2, 3)$.

———-VÝSLEDKY———-

a) $y(t) = (0, -e^{2t}, e^{-t})$ b) $y(t) = (\frac{1}{2}e^{3t} - \frac{1}{2}e^{t}, \frac{1}{2}e^{3t} - \frac{1}{2}e^{t})$ c) $y(t) = (\frac{1}{3}e^{3t} + e^{2t} + \frac{2}{3} + t + \frac{t^2}{2}, \frac{2}{3}e^{3t} + e^{2t} + \frac{1}{3} - t^2)$

d) $y(t) = \big(4e^{t} + 6e^{-t} - 6e^{2t}, 4e^{t} + 6e^{-t} - (5 + 6t)e^{2t}, 3e^{t} + 3e^{-t} - 6e^{2t}\big)$

e) $y(t) = \big(-14 + e^{t}(3\sin t + 15\cos t), -14 + e^{t}(21\sin t - 12\cos t), e^{t}(-15\sin t + 3\cos t)\big)$

CVIČENÍ 3

Ve cvičeních níže na $\mathbb{R}^2$ uvažujeme Euklidovskou metriku ρ_2 a na $C([0,1])$ supremovou metriku ρ_{sup}.

1. Pro zadané metrické prostory M a jejich podmnožiny $A \subset M$ rozhodněte, zda A je otevřená (resp. uzavřená). Zjistěte vnitřek, uzávěr a hranici množiny A.
a) $M = \mathbb{R}$, $A = \{\frac{1}{n} \colon n \in \mathbb{N}\}$ b) $M = \mathbb{R}$, $A = \mathbb{Q}$ c) $M = \mathbb{R}^2$, $A = \{(x,y) \colon x > 0, y \leq 0\}$
d) Nechť $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je spojitá funkce, uvažujme pak $M = \mathbb{R}$ a $A = \{t \colon f(t) > 0\}$ (u této úlohy nezjišťujte hranici a uzávěr)
e) $M = [0,1]$, $A =$ Cantorovo diskontinuum f) $M = \mathbb{R}^2$, $A = \{(0,0)\} \cup \{(x, \sin\frac{1}{x}) \colon x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\}$
g) $M = C([0,1])$, $A = \{f \in M \colon f(\frac{1}{2}) = 2\}$ h) $M = C([0,1])$, $A = \{f \in M \colon f(\frac{1}{2}) \in (0,2)\}$

2. Platí v metrických prostorech následující rovnosti? Platí alespoň jedna inkluze?
a) $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$ b) $\operatorname{Int}(A \setminus B) = \operatorname{Int}(A) \setminus \operatorname{Int}(B)$

3.Uvažujme na $\mathbb{R}^2$ libovolnou metriku ρ. Která z následujících tvrzení jsou pravdivá? Která jsou pravdivá, pokud $\rho(x,y) = \|x-y\|$ pro nějakou normu na $\mathbb{R}^2$?
a) $5B(0,1) = B(0,5)$ (0 značí nulový vektor, $5A$ definujeme jako mnozinu $\{5a : \ a \in A\}$ pro $A \subset \mathbb{R}^2$)
b) $5B(x,1) = x + B(0,5),\ x \in \mathbb{R}^2$ c) $\overline{B(0,1)} = \{x \in \mathbb{R}^2 \colon \rho(x,0) \leq 1\}$

CVIČENÍ 4

1. Ať ρ_1, ρ_2 jsou metriky na množině P. Musí být i funkce ρ definovaná níže metrikou na P?
a) $\rho = \max\{\rho_1, \rho_2\}$ b) $\rho = \min\{\rho_1, \rho_2\}$ c) $\rho = \min\{\rho_1, 1\}$

2. Rozhodněte, zda jsou následující množiny A kompaktní v metrickém prostoru P.
a) Ať $x_n \to x$ je konvergentní posloupnost. Položme $A = \{x_n : n \in \mathbb{N}\} \cup \{x\}$.
b) $A =$Cantorovo diskontinuum, $P = [0, 1]$
c) $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 :\ \sin(xy) \leq \frac{1}{2},\ x \leq 1,\ y \geq -3\}$, $P = \mathbb{R}^2$
d) $A = \{\operatorname{arctg}(n) : n \in \mathbb{N}\}$, $P = \mathbb{R}$ e) $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 :\ \exp(x^2 + y^2) \leq 10\}$, $P = \mathbb{R}^2$
f) $A = \{(x, f(x)) : x \in \mathbb{R}\}$, kde $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je spojitá funkce; $P = \mathbb{R}^2$

3. Rozhodněte o platnosti následujících tvrzení v $\mathbb{R}^n$ (své tvrzení dokažte).
a) Kompaktní množiny mají neprázdný vnitřek b) Pro každou $A \subset \mathbb{R}^n$ s neprázdným vnitřkem platí $\overline{\operatorname{Int} A} = \overline{A}$
c) $A \subset \mathbb{R}^n \Rightarrow \operatorname{Int} \overline{A} = \operatorname{Int} A$ d) Pokud je A omezená, pak $\overline{A}$ je kompaktní.

4. Ať (P, ρ) je metrický prostor, $f : [0, \infty) \to [0, \infty)$ je funkce splňující

- $f(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$**,**
- $r \leq s + t \Rightarrow f(r) \leq f(s) + f(t)$**.**

Položme $\sigma(x, y) := f(\rho(x, y))$.

(i) Dokažte, že σ je potom metrika na P.

(ii) Pomocí tohoto tvrzení dokažte, že $\sigma(x, y) = \frac{\rho(x,y)}{1+\rho(x,y)}$ definuje omezenou metriku na P.

(iii) Ať $\sigma(x, y) := \frac{|x-y|}{1+|x-y|}$ je metrika na $\mathbb{R}$. Jsou pak množiny $F_n = [n, \infty) \subset (\mathbb{R}, \sigma)$ uzavřené, omezené a kompaktní?

5. Na prostoru $\mathcal{C}([0, 1])$ uvažujme supremovou metriku, tj. $\rho_s(f, g) = \max\{|f(t) - g(t)| :\ t \in [0, 1]\}$.
a) Spočítejte $\rho_s(x, x^2)$.
b) Pro $n \in \mathbb{N}$ a $x \in [0, 1]$ definujme $f_n(x) = \frac{\sin(nx+3)}{\sqrt{n+1}}$ a $g_n(x) = \frac{nx}{1+n^2x^2}$. Je posloupnost funkcí $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ konvergentní v metrice ρ_s k funkci $f(x) = 0$, $x \in [0, 1]$? Platí analogické tvrzení pro posloupnost $(g_n)_{n=1}^{\infty}$?
c) Zjistěte vnitřek, uzávěr a hranici množiny $\{f \in \mathcal{C}[0, 1] :\ \int_0^1 f(x)\mathrm{d}x = 0\}$. Je tato množina kompaktní?
d) Rozhodněte, zda je množina všech 1-lipschitzovských funkcí f na $[0, 1]$ splňujících $\|f\| \leq 1$ kompaktní v $C([0, 1]$.

6. Definujme metriku ρ na $\mathbb{R}$ následujícím předpisem

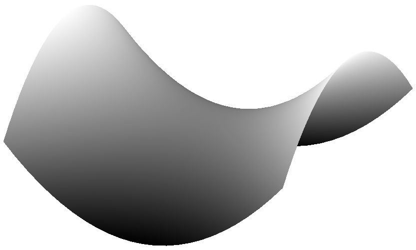
$$\rho(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{|x|} & x \neq 0, y = 0, \\ \frac{1}{|y|} & x = 0, y \neq 0, \\ \frac{1}{|x|} + \frac{1}{|y|} & x \neq 0 \neq y, x \neq y, \\ 0 & x = y. \end{cases}$$

Dokažte, že $(\mathbb{R}, \rho)$ je metrický prostor a charakterizujte jeho kompaktní podmnožiny. Je $(\mathbb{R}, \rho)$ kompaktní?

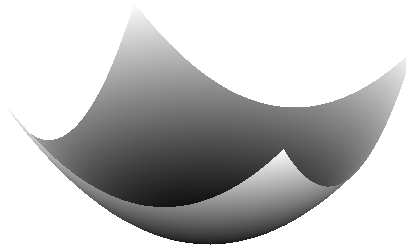
CVIČENÍ 5

1.Přiřaďte grafy funkcí k předpisům:

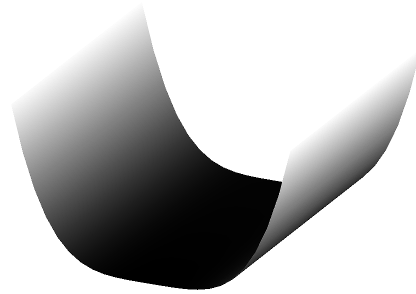
a)



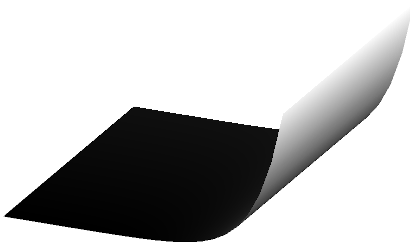
b)



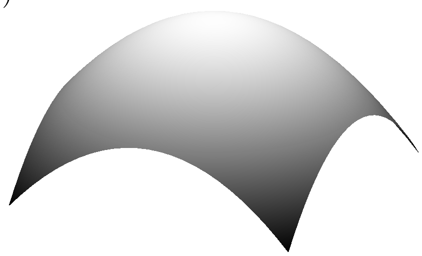
c)



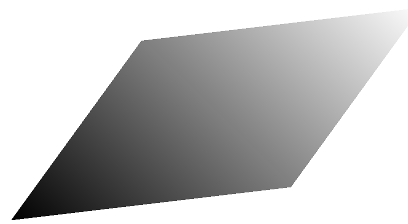
d)



e)



f)



i) $x^2 + y^2$ ii) $exp(x) + y$ iii) $-x^2 - y^2$ iv) $x + y$ v) $x^2 - y^2$ vi) $x^4 + y$

2. Zjistěte, zda existují limity a pokud ano, spočtěte je:

a) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sqrt{x^2y^2+1}-1}{x^2+y^2}$ b) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2}$ c) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin(x^3+y^3)}{x^2+y^2}$ d) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,3)} \frac{\sin(xy)}{x}$

e) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2+1}-1}$ f) $\lim\limits_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ x+y\neq 0}} \frac{x-y}{x+y}$ g) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} (1+x^2y^2)^{\frac{1}{x^2+y^2}}$ h) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{1-\cos(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)x^2y^2}$

i) $\lim\limits_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ xy\neq 0}} (x+y)\sin\frac{1}{x}\sin\frac{1}{y}$ j) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{yx^2}{x^4+y^2}$ k) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} (x^2+y^2)^{x^2y^2}$ l) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^6}{x^3+y^3}$

3. Nechť $\delta > 0$ a $f : [-\delta, \delta]^2 \to \mathbb{R}$ je funkce. Označme následující limity:

$$L := \lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y), \quad L_{xy} := \lim_{x\to 0}\Big(\lim_{y\to 0} f(x,y)\Big), \quad L_{yx} := \lim_{y\to 0}\Big(\lim_{x\to 0} f(x,y)\Big).$$

(i) Dokažte, že pokud existují limity L, L_{xy}, L_{yx}, pak jsou si všechny rovny.

(ii) Uvažujte funkci f z Příkladu 2f výše. Ukažte, že $L_{xy} \neq L_{yx}$ a s pomocí (i) odvoďte že L neexistuje.

(iii) Uvažujte funkci f z Příkladu 2b výše. Ukažte, že $L_{xy} = L_{yx}$, ale přesto limita L neexistuje.

(iv) Uvažujte funkci f z Příkladu 2i výše. Ukažte, že limita L existuje, ale neexistují limity L_{xy} a L_{yx}.

———-VÝSLEDKY———-

1. a)-v), b)-i), c)-vi), d)-ii), e)-iii), f)-iv)

2. a) 0 b) Limita neexistuje c) 0 d) Limita neexistuje, protože funkce není definována na prstencovém okolí bodu $(0,3)$, limita přes množinu $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \neq 0\}$ je 3. e) 2 f) Limita neexistuje g) 1 h) Limita neexistuje, protože funkce není definována na prstencovém okolí bodu $(0,0)$, limita přes množinu $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : xy \neq 0\}$ je $+\infty$. i) 0 j) Limita neexistuje k) 1 l) Limita neexistuje, protože funkce není definována na prstencovém okolí bodu $(0,0)$, limita přes množinu $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \neq -y\}$ také neexistuje.

CVIČENÍ 6

1. Spočtěte parciální derivace funkcí všude, kde existují

a) $x^m y^n$ b) e^{xy} c) $|x|\cdot|y|$ d) $|\sin y - \sin x|$ e) $\sqrt{x+y^2}$ f) $xy+yz+zx$ g) $x^{\frac{y}{z}}$ h) $|y|\sin x$

i) $|y+\cos x|$ j) $f(x,y)=e^{\frac{-\pi}{x^2+3xy+3y^2}}$ pro $(x,y)\neq(0,0)$, $f(0,0)=0$

2. Určete a nakreslete definiční obor a vyšetřete parciální derivace funkcí (ze zkouškových písemek na FSV)

a) $\sqrt{e^{xy}-e}$ b) $\sqrt{x^2-y^2}$ c) $\log\frac{1-\sqrt[3]{x}}{|y|+\sqrt[3]{x}}$ d) $\arcsin\frac{y+x}{x^2+x+1}$

Další užitečné zdroje příkladů:
- Zkouškové písemky z minulých let na FSV na webu prof. Kalendy:
`http://www.karlin.mff.cuni.cz/~kalenda/edu.php?edutype=archpis`

———-VÝSLEDKY———-

1. a) $\frac{\partial f}{\partial x}=mx^{m-1}y^n$, $\frac{\partial f}{\partial y}=nx^m y^{n-1}$ pro $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ b) $\frac{\partial f}{\partial x}=ye^{xy}$, $\frac{\partial f}{\partial y}=xe^{xy}$ pro $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ c) $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=|y|\operatorname{sgn}x$ pro $x\neq 0$. $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=|x|\operatorname{sgn}y$ pro $y\neq 0$. $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)=\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)=0$. $\frac{\partial f}{\partial x}(0,y)$ pro $y\neq 0$ a $\frac{\partial f}{\partial y}(x,0)$ pro $x\neq 0$ neexistují d) $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=\cos x\operatorname{sgn}(\sin x-\sin y)$, $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=-\cos y\operatorname{sgn}(\sin x-\sin y)$, pokud $\sin x\neq\sin y$. $\frac{\partial f}{\partial x}(\frac{\pi}{2}+k\pi,\frac{\pi}{2}+k\pi+2l\pi)=\frac{\partial f}{\partial y}(\frac{\pi}{2}+k\pi+2l\pi,\frac{\pi}{2}+k\pi)=0$. V ostatních bodech parciální derivace neexistují e) Pokud $x>-y^2$, pak $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=\frac{1}{2\sqrt{x+y^2}}$; $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=\frac{y}{\sqrt{x+y^2}}$ a $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$ neexistuje. Jinak parciální derivace nemají smysl. f) $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z)=y+z$, $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z)=x+z$, $\frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z)=x+y$ pro $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$ g) Pokud $x>0$ a $z\neq 0$, pak $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z)=\frac{y}{z}\cdot x^{\frac{y}{z}-1}$; $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z)=x^{\frac{y}{z}}\cdot\log x\cdot\frac{1}{z}$; $\frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z)=-x^{\frac{y}{z}}\cdot\log x\cdot\frac{y}{z^2}$. h) $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=|y|\cos x$ pro $(x,y)\in\mathbb{R}^2$, $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=\operatorname{sgn}(y)\sin x$ pro $y\neq 0$, $\frac{\partial f}{\partial y}(k\pi,0)=0$ pro $k\in\mathbb{Z}$ a $\frac{\partial f}{\partial y}(x,0)$ pro $x\neq k\pi$ neexistuje i) $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=-\operatorname{sgn}(y+\cos x)\cdot\sin x$, $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=\operatorname{sgn}(y+\cos x)$, pokud $y\neq-\cos x$. $\frac{\partial f}{\partial y}(x,-\cos x)$ neexistuje pro $x\in\mathbb{R}$. $\frac{\partial f}{\partial x}(k\pi,(-1)^{k+1})=0$ pro $k\in\mathbb{Z}$. $\frac{\partial f}{\partial x}(x,-\cos x)$ neexistuje pro $x\neq k\pi$. j) $\frac{\partial f}{\partial x}=e^{-\frac{\pi}{x^2+3xy+3y^2}}\cdot\frac{\pi(2x+3y)}{(x^2+3xy+3y^2)^2}$, $\frac{\partial f}{\partial y}=e^{-\frac{\pi}{x^2+3xy+3y^2}}\cdot\frac{\pi(3x+6y)}{(x^2+3xy+3y^2)^2}$ pro $(x,y)\neq(0,0)$; v bodě $(0,0)$ jsou obě parciální derivace nulové.

2. viz. výsledky zkouškových písemek z Matematiky II zde:
`http://www.karlin.mff.cuni.cz/~kalenda/edu.php?edutype=archpis`

CVIČENÍ 7

1. Pro zadanou funkci $f(x,y)$ a body $a,h \in \mathbb{R}^2$ určete, zda existuje $f'(a)(h)$ a pokud ano, spočtěte tuto hodnotu (tj. určete, zda existuje totální diferenciál v bodě a a pokud ano, určete jeho hodnotu v bodě h).

a) $f(x,y) = \operatorname{arctg} \frac{x-y}{x+y}$, $a = (1,1)$, $h = (-2,2)$ b) $f(x,y) = xy\log(x+y)$, $a = (2,2)$, $h = (3,-3)$

2. Mají následující funkce totální diferenciál v bodě $[0,0]$?

a) $\sqrt{x^2+y^2}$ b) $|xy|$ c) $f(x,y) = \begin{cases} (x^2+y^2)\sin\frac{1}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & (x,y) = (0,0). \end{cases}$

d) $\sqrt[3]{x+y^2}$ e) $|x|\log(1+y)$ f) $f(x,y) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2+y^2}} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0). \end{cases}$ g) $f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^3-2y^3}{4x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0). \end{cases}$

3. Následující úlohy slouží k dokreslení teorie (jako varování, že některé varianty používaných vět neplatí).

a) Dokažte, že funkce $f(x,y) = \sqrt[3]{xy}$ je spojitá, $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0$, ale $f'(0,0)$ neexistuje.

b) Dokažte, že funkce $f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & (x,y) = (0,0). \end{cases}$ není spojitá, ale $\frac{\partial f}{\partial x}$ a $\frac{\partial f}{\partial y}$ existují ve všech bodech.

4. Vyšetřete, ve kterých bodech má funkce $f(x,y) = \max\{x^3, y^3\}$ totální diferenciál a spočtěte jej.

5. Nechť $F = (F_1, F_2) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ je zobrazení definované předpisem

$$F(x,y) = \Big((|x|+|y|)\log(1+x^2+y^2), \operatorname{sgn}(x+y)\sqrt{x^2+y^2}\Big)$$

Zjistěte, zda existují $F'(1,1)$, $F_1'(0,0)$, $\frac{\partial F_2}{\partial y}(0,0)$ a pokud ano, spočtěte je.

———-VÝSLEDKY———-

1. a) -2 b) 0 **2.** a) ne b) ano c) ano d) ne e) ano f) ano g) ne **4.** $f'(x,y) = (3x^2, 0)$ pro $x > y$, $f'(x,y) = (0, 3y^2)$ pro $x < y$, $f'(0,0) = (0,0)$, v ostatních bodech totální diferenciál neexistuje. **5.** viz. `https://www.karlin.mff.cuni.cz/~spurny/doc/ma3/jirka/24.1/pisemka-01-24-2023.pdf`

CVIČENÍ 8 A 9 BYLA SUPLOVÁNA

CVIČENÍ 10

1. Ukažte, že vztahy

$$u = \operatorname{arctg}(\pi x) + y^2 z$$
$$v = e^{-x} + 2\frac{y}{z},$$
$$w = \cos(2xy) + 2\sqrt{z}$$

definují na okolí bodu $[u, v, w] = [4, 3/2, 5]$ hladké funkce $x(u, v, w), y(u, v, w), z(u, v, w)$, pro které platí $x(4, 3/2, 5) = 0$, $y(4, 3/2, 5) = 1$, $z(4, 3/2, 5) = 4$. Rozhodněte, zda má funkce $y(u, v, w)$ totální diferenciál v bodě $(4, 3/2, 5)$, a pokud ano, spočtěte jej.

2. Ukažte, že vztah $xy^3 = y - z$ definuje implicitně zadanou funkci $x = x(y, z)$ na okolí bodu $(1, 2)$. Vypočítejte $\frac{\partial x}{\partial y}(1, 2)$.

3. Ukažte, že vztahy

$$x^4 + xu + yv + u^4 + v^4 = 1$$
$$y^3 + uv + yxu = 1$$

definují na okolí bodu $[x, y] = [1, 1]$ hladké funkce $u(x, y), v(x, y)$, pro které platí $u(1, 1) = 0$, $v(1, 1) = 0$. Spočtěte Jacobiho matici zobrazení $\phi(x, y) := (u(x, y), v(x, y))$ v bodě $(1, 1)$ a rozhodněte, zda je toto zobrazení difeomorfismus na okolí $(1, 1)$.
(*Hint:* ϕ je na okolí $(1, 1)$ difeomorfismus iff jakobián ϕ v bodě $(1, 1)$ je nenulový)

4. Dokažte, že na určitém okolí bodu $(x, y, z) = (1, 0, 1)$ existují funkce $y(x)$ a $z(x)$ takové, že

$$x^2 y^2 = \log z, \qquad x + y + z = 2.$$

Spočtěte $y'(1)$, $z'(1)$, $y''(1)$ a $z''(1)$.

———-VÝSLEDKY———-

1. $\nabla y = (\frac{2}{\pi+16}, \frac{2\pi}{\pi+16}, \frac{\pi-8}{2(\pi+16)})$ **2.** $\frac{\partial x}{\partial y}(1, 2) = 4$ **3.** $J_\phi(1, 1) = \left(\begin{smallmatrix} 0 & -3 \\ -4 & 3 \end{smallmatrix}\right)$, ϕ je difeomorfismus na okolí $(1, 2)$ **4.** $y'(1) = -1$, $z'(1) = 0$, $y''(1) = -2$, $z''(1) = 2$

CVIČENÍ 11

1. U následujících funkcí nalezněte lokální extrémy.

a) $f(x,y)=x^2+(y-1)^2$ b) $f(x,y)=e^{x^2-y}(5-2x+y)$

c) $f(x,y)=xy\sqrt{1-x^2-y^2}$, $(x,y)\in\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:\ x^2+y^2<1\}$ d) $f(x,y)=xy\log(x^2+y^2)$

2. Zjistěte sup **a** inf **funkce** f **na množině** M **a vyšetřete, zda těchto hodnot funce** f **na** M **nabývá (bez Lagrangeových multiplikátorů).**

a) $f(x,y)=x-2y-3$; $M=\{[x,y]; 0\le x\le 1, 0\le y\le 1, x+y\le 1\}$

b) $f(x,y,z)=(x+y)^2+(x-y)^2+z$; $M=\langle -1,1\rangle\times\langle -1,1\rangle\times\langle -1,1\rangle$

c) $f(x,y)=x^2+4x+5-3y^2-3y$; $M=\mathbb{R}^2$ d) $f(x,y)=x^2-xy+y^2$; $M=\{[x,y]; |x|+|y|\le 1\}$

e) $f(x,y)=x^2+y^2; M=\{[x,y]; x^2+4y^2=1\}$ f) $f(x,y)=xy; M=\{[x,y]; x+y=5\}$

Další příklady k procvičení lze nalézt například zde:
`http://www.karlin.mff.cuni.cz/~zeleny/mff/MA_3/Extremy.pdf`

———-VÝSLEDKY———-

1. a) $[0,1]$ - ostré lokální minimum b) $[1,-2]$ - není extrém (sedlový bod) c) $[\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}}]$ a $[-\frac{1}{\sqrt{3}},-\frac{1}{\sqrt{3}}]$ jsou ostrá lokální maxima, $[\frac{1}{\sqrt{3}},-\frac{1}{\sqrt{3}}]$ a $[-\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}}]$ jsou ostrá lokální minima, ve stacionárním bodě $[0,0]$ není lokální extrém d) $[\frac{1}{\sqrt{2e}},\frac{1}{\sqrt{2e}}]$ a $[-\frac{1}{\sqrt{2e}},-\frac{1}{\sqrt{2e}}]$ jsou ostrá lokální minima, $[\frac{1}{\sqrt{2e}},-\frac{1}{\sqrt{2e}}]$ a $[-\frac{1}{\sqrt{2e}},\frac{1}{\sqrt{2e}}]$ jsou ostrá lokální maxima, ve stacionárních bodech $[0,\pm 1]$, $[\pm 1,0]$ není lokální extrém

2. a) max -2 v bodě $[1,0]$, min -5 v bodě $[0,1]$ b) max 5 v bodech $[\pm 1,\pm 1,1]$, min -1 v bodě $[0,0,-1]$ c) sup neexistuje, inf neexistuje d) max 1 v bodech $[\pm 1,0]$, $[0,\pm 1]$, min 0 v bodě $[0,0]$ e) max 1 v bodech $[\pm 1,0]$, min $\frac{1}{4}$ v bodech $[0,\pm\frac{1}{2}]$ f) max $\frac{25}{4}$ v bodě $[\frac{5}{2},\frac{5}{2}]$, inf neexistuje

CVIČENÍ 12

1. U následujících funkcí nalezněte globální extrémy funkce f na množině M.
a) $f(x,y) = 5x - 3y$, $M = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon x^2 + y^2 = 136\}$
b) $f(x,y,z) = x^2 + 2xz + y^2 + z$, $M = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \colon x^2 + y^2 + z^2 = 1, x = y^2 + z^2\}$
c) $f(x,y) = x^4 y$, $M = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon x^4 + y^4 \leq 16, x \geq -1\}$
d) $f(x,y) = xy$, $M = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon 3x^2 + y^2 = 6\}$
e) $f(x,y,z) = x - y^2$, $M = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \colon x^2 + y^2 \leq 5, (x+z)^2 + 2y^2 = 2\}$
f) $f(x,y,z) = x - y - z$, $M = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \colon x^2 + y^2 \leq z, x + y + z \leq 1\}$

————-VÝSLEDKY————-

1. a) max 68 v $[10,-6]$, min -68 v $[-10,6]$ b) max v bodě $[\frac{\sqrt{5}-1}{2}, 0, \sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}]$, min v bodě $[\frac{\sqrt{5}-1}{2}, 0, -\sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}]$
c) max v bodě $[\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt[4]{5}}, \frac{2}{\sqrt[4]{5}}]$, min v bodě $[\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt[4]{5}}, -\frac{2}{\sqrt[4]{5}}]$ d) max $\sqrt{3}$ v $[1,\sqrt{3}]$ a $[-1,-\sqrt{3}]$, min $-\sqrt{3}$ v $[1,-\sqrt{3}]$ a $[-1,\sqrt{3}]$
e) max $\sqrt{5}$ v bodech $[-\sqrt{5}, 0, \sqrt{5} \pm \sqrt{2}]$, min -3 v bodech $[-2, \pm 1, 2]$
f) max $\frac{1}{2}$ v $[\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$, min $-2-\sqrt{6}$ v $[\frac{-1-\sqrt{6}}{2}, -\frac{1}{2}, 2+\frac{\sqrt{6}}{2}]$