

CVIČENÍ 1

1. Vyšetřete bodovou a stejnoměrnou konvergenci následujících posloupností funkcí

- a) $f_n(x) = \frac{2nx}{1+n^2x^2}$ na \mathbb{R} ; b) $f_n(x) = \frac{2nx}{1+n^2x^2}$ na $[1, \infty)$; c) $f_n(x) = n \cdot (\sqrt{x+1/n} - \sqrt{x})$ na $(0, \infty)$;
d) $f_n(x) = \sqrt[n]{x^n + 3^n}$ na $[0, \infty)$; e) $f_n(x) = \frac{(nx+2)^2}{n^2x^2+4}$ na $[0, 2]$ a na $[2, \infty)$; f) $f_n(x) = nx(1-x)^n$ na $[0, 1]$;
g) $f_n(x) = \exp(n(|x-1|-2))$ na $(0, 1]$ a na $[1, 3)$; h) $f_n(x) = \sin(\frac{x}{n})$ na $[-100, 100]$ a na \mathbb{R} ;

2. Necht' $f_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ a $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ jsou spojité funkce. Rozhodněte o pravdivosti následujících tvrzení (tj. podejte důkaz že tvrzení ne/platí).

(Připomeňme, že funkce $g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ je 1-Lipschitzovská, pokud pro každé $x, y \in [0, 1]$ platí $|g(x) - g(y)| \leq |x - y|$.)

- a) Pokud funkce f_n jsou 1-Lipschitzovské a $f_n(x) \rightarrow f(x)$ pro $x \in [0, 1]$, pak funkce f je 1-Lipschitzovská.
b) Pokud funkce f_n jsou 1-Lipschitzovské a $f_n(x) \rightarrow f(x)$ pro $x \in [0, 1]$, pak $f_n \rightrightarrows f$ na $[0, 1]$.
c) Platí, že $f_n \rightrightarrows f$ na $[0, 1]$, právě když $f_n \rightrightarrows f$ na (a, b) pro každé $0 < a < b < 1$.

Další užitečné zdroje příkladů:

- Ilja Černý: Inteligentní kalkulus. Online zde:

<http://matematika.cuni.cz/ikalkulus.html>

- Řešené příklady od Ondřeje Bouchaly. Online zde: (viz. cvičení k Matematické analýze 3):

<https://www2.karlin.mff.cuni.cz/~bouchala/Vyuka/>

- Příklady od Kristýny Kuncové z minulého semestru. Online zde:

<https://www2.karlin.mff.cuni.cz/~kuncova/historie20.php>

CVIČENÍ 2

1. Vyšetřete bodovou, stejnoměrnou a lokálně stejnoměrnou konvergenci následujících posloupností funkcí

- a) $f_n(x) = e^{n(x-1)}$ na $(0, 1)$; b) $f_n(x) = \frac{nx}{1+n+x}$ na $(0, \infty)$; c) $f_n(x) = \frac{\log nx}{n}$ na $(0, \infty)$;
d) $f_n(x) = (1 + \frac{x}{n})^n$ na $[0, \infty)$; e) $f_n(x) = \frac{n^2-x^2}{n^2+x^2}$ na \mathbb{R} ; f) $f_n(x) = x^n e^{-x^2/n}$ na $(-1, 1)$;
g) $f_n(x) = nx \log(1 + \frac{1}{nx})$ na $(0, \infty)$; h) $f_n(x) = n \sin \frac{x}{n}$ na \mathbb{R} ;

2. Nechť jsou dány funkce $f_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ a $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$. Rozhodněte o pravdivosti následujících tvrzení (tj. podejte důkaz že tvrzení ne/platí).

a) $f_n \rightrightarrows f$ na $[0, 1]$, právě když existuje množina $E \subset [0, 1]$ míry nula splňující že $f_n \rightrightarrows f$ na $[0, 1] \setminus E$;

b) Pokud jsou funkce f_n a f spojité, pak $f_n \rightrightarrows f$ na $[0, 1]$, právě když $\int_0^1 |f_n(t) - f(t)| dt \rightarrow 0$;

c) Pokud jsou funkce f_n a f spojité, pak $f_n \rightrightarrows f$ na $[0, 1]$, právě když existuje množina $E \subset [0, 1]$ míry nula splňující že $f_n \rightrightarrows f$ na $[0, 1] \setminus E$;

3. Nechť jsou dány 1-Lipschitzovské funkce $f_n : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$. Dokažte, že existuje podposloupnost f_{n_k} a spojitá funkce $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ splňující, že $f_{n_k} \rightrightarrows f$ na $[0, 1]$.

(Hint: pomocí diagonálního argumentu nejprve nalezněte podposloupnost f_{n_k} splňující, že pro každé racionální číslo $q \in [0, 1]$ existuje limita $\lim_k f_{n_k}(q)$)

CVIČENÍ 3

1. Odpovězte na otázky: Pro jaké x řada konverguje? Na jakém intervalu konverguje řada stejnoměrně nebo lokálně stejnoměrně? Na jakém intervalu je součet řady spojitá funkce?

- a) $\sum_{n=1}^{\infty} x^n$; b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{nx}{1+n^5x^2}$; c) $\sum_{n=1}^{\infty} \log(1 + \frac{x^2}{n^2})$; d) $\sum_{n=1}^{\infty} \exp(-(n + x^2))$; e) $\sum_{n=1}^{\infty} (-x^2 + 6x - 8)^n$;
 f) $\sum_{n=1}^{\infty} x^2 e^{-n^2x^2}$; g) $\sum_{n=1}^{\infty} \log(1 + \frac{x^2 \sin^2 x}{n^2})$; h) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+n^2x^2}$; i) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{1+n^2x^2}$;

2. Uvažujte funkci $f(x) := \sum_{n=0}^{\infty} (3/4)^n g(4^n x)$, kde $g(x)$ je 2-periodické rozšíření funkce $|x|$ (tj. $g(x+2) = g(x)$). Dokažte, že f je spojitá funkce, která nemá v žádném bodě vlastní derivaci.

Hint: Důkaz spojitosti je standardní. Pro důkaz neexistence derivace v bodě x ukažte, že pro každé $k \in \mathbb{N}$ existuje $\delta_k \in \{\pm \frac{1}{2 \cdot 4^k}\}$ takové, že

$$|g(4^n x + 4^n \delta_k) - g(4^n x)| \begin{cases} = 0 & n > k \\ = \frac{1}{2} & k = n \\ \leq 4^n \delta_k & n < k. \end{cases} \quad (1)$$

Použijte pak pro každé $k \in \mathbb{N}$ odhad

$$\left| \frac{f(x + \delta_k) - f(x)}{\delta_k} \right| \geq \left| \sum_{n=k}^{\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^n \frac{g(4^n x + 4^n \delta_k) - g(4^n x)}{\delta_k} \right| - \sum_{n=1}^{k-1} \left(\frac{3}{4}\right)^n \frac{|g(4^n x + 4^n \delta_k) - g(4^n x)|}{\delta_k}$$

a s pomocí (1) odvoďte, že $\left| \frac{f(x+\delta_k)-f(x)}{\delta_k} \right| \rightarrow \infty$ a tedy f nemá derivaci v bodě x .

CVIČENÍ 4

1. Dokažte, že funkce f daná předpisem

$$f(x) := \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\sin(1 + \frac{x}{n})}{\sqrt{n}}, \quad x \in \mathbb{R}$$

je spojitá na \mathbb{R} a vyjádřete $f'(0)$ jako součet řady.

2. Dokažte, že pro funkci f danou předpisem

$$f(x) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|x|}{n^2 + x^2}, \quad x \in [-1, 1]$$

platí $f \in \mathcal{C}([-1, 1])$. Spočtete $f'(\frac{1}{2})$ a $f'(0)$.

3. Dokažte, že pro funkci $f(x) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x}$, $x \in (1, \infty)$ platí $f \in \mathcal{C}^\infty((1, \infty))$.

4. Dokažte, že pro funkci f danou předpisem

$$f(x) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \cdot \log\left(\frac{2x-2}{n^3} + 3\right), \quad x \in (0, \infty)$$

platí $f \in \mathcal{C}((0, \infty))$. Ukažte, že tato funkce má vlastní derivaci na intervalu $[1, \infty)$ a že $\sup_{x \geq 1} |f'(x)| < \infty$.

5. Nechť funkce f je dána předpisem

$$f(x) := \sum_{n=1}^{\infty} \left(\cos\left(\frac{2x-1}{3}\pi\right) \right)^n.$$

Nalezněte definiční obor f (tj. ta x pro která je řada konvergentní). Dále dokažte, že funkce f je na intervalu $(\frac{1}{2}, 2)$ spojitá, má na tomto intervalu vlastní derivaci a najděte maximum funkce f na intervalu $[1, \frac{5}{4}]$.

6. Ať $g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$. Rozhodněte, jaké implikace platí mezi následujícími tvrzeními.

- Funkce g je spojitá skoro všude a $|g(x)| < 1$ pro každé $x \in [0, 1]$.
- Řada $\sum_{n=1}^{\infty} (g(x))^n$ je stejnoměrně konvergentní na $[0, 1]$.
- Funkce g je spojitá a $|g(x)| < 1$ pro každé $x \in [0, 1]$.

7. Nechť je dána posloupnost funkcí $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ předpisem

$$f_n(x) = \frac{1}{n^2} \cdot \frac{|x + \frac{1}{n^2}| - |x - \frac{1}{n^2}|}{|x + \frac{1}{n^2}| + |x - \frac{1}{n^2}|}, \quad x \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}.$$

Dokažte, že funkce $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ je spojitá v bodě 3 a že je klesající na intervalu $(2, \infty)$.

CVIČENÍ 5

1. Ukažte, že funkce f daná předpisem

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+x}$$

je spojitá na $(-1, \infty)$.

2. Vyšetřete, zda je řada

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(nx)}{n} \arctan(nx)$$

stejněměrně a lokálně stejněměrně konvergentní na $(0, 2\pi)$.

3. Vyšetřete, zda je řada

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \arcsin(x^n) \frac{x}{1+n^2x^2}$$

stejněměrně a lokálně stejněměrně konvergentní na $(0, 1)$.

Zadání zápočtové písemky, varianta A:

1. Pro $n \in \mathbb{N}$ uvažujme funkce

$$f_n(x) = \frac{(-1)^n}{n} \operatorname{arctg} \left(\frac{3x-2}{n+1} + 2 \right), \quad x \in \mathbb{R}.$$

- Platí, že posloupnost funkcí f_n je stejněměrně konvergentní na \mathbb{R} ?
- Dokažte, že funkce $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ je spojitá na \mathbb{R} .

2. Pro $n \in \mathbb{N}$ uvažujme funkce

$$f_n(x) = n \log \left(\frac{|\sin x|}{n} + 1 \right), \quad x \in \mathbb{R}$$

- Nalezněte funkci f splňující $f_n \rightarrow f$.
- Platí, že posloupnost funkcí f_n je stejněměrně konvergentní na \mathbb{R} ?
(Hint: můžete bez důkazu použít nerovnost $|\log(1+y) - y| \leq \frac{y^2}{2}$, $y \geq 0$)

3. Nechtě $f_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$ a $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ jsou spojitě funkce a $f_n \rightarrow f$ na $[0, 1]$. Rozhodněte, jaké implikace platí mezi následujícími tvrzeními a své tvrzení dokažte.

- $f_n \rightrightarrows f$.
- $\frac{f_{2n-1} + f_{2n}}{2} \rightrightarrows f$.

Zadání zápočtové písemky, varianta B:

1. stejné jako ve variantě A, jen s funkcemi $f_n(x) = \frac{(-1)^n}{n+1} \operatorname{arctg} \left(\frac{2x-5}{n} + 3 \right)$.

2. stejné jako ve variantě A, jen s funkcemi $f_n(x) = n \log \left(\frac{|\cos x|}{n} + 1 \right)$.

3. Nechtě $f_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$ a $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ jsou spojitě funkce a $f_n \rightarrow f$ na $[0, 1]$. Rozhodněte, jaké implikace platí mezi následujícími tvrzeními a své tvrzení dokažte.

- $f_n \rightrightarrows f$.
- Existuje podposloupnost (f_{n_k}) splňující $f_{n_k} \rightrightarrows f$.

CVIČENÍ 6

1. Nalezněte poloměr konvergence následujících mocninných řad. Určete oblasti absolutní konvergence, neabsolutní konvergence a divergence.

- a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^7}{n+20} x^n$ b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{a^{n^2}} x^n$ ($a > 1$) c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n + (-2)^n}{n} (x+1)^n$ d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3+(-1)^n)^n}{n} x^n$
e) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{6^n + (-2)^n}{n^2} (x-1)^n$ f) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1+2\cos\frac{\pi n}{4})^n}{n} x^n$ g) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{a^n + b^n}$ ($a, b > 0$) h) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a\sqrt{n}} x^n$ ($a > 0$)
i) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!} x^n$ (Hint: na kruhu konvergence použijte Stirlingův vzorec: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \left(\frac{e}{n}\right)^n n! = \sqrt{2\pi}$)

2. Najděte mocninnou řadu, která

- (a) Diverguje pro $x = 0$.
(b) Konverguje pro $x = 5$, ale nikde jinde.
(c) Má střed konvergence v 0, poloměr konvergence roven 2 a konverguje pro 2, ale diverguje pro -2 .

3. Nalezněte poloměr konvergence následujících mocninných řad. Určete oblasti absolutní konvergence, neabsolutní konvergence a divergence.

- a) $\sum_{n=1}^{\infty} (1 + \frac{1}{n})^{n^2} x^n$ b) $\sum_{n=1}^{\infty} (\frac{a^n}{n} + \frac{b^n}{n^2}) x^n$ ($a, b > 0$) c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} x^{n^2}$
d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{n!} x^n$ (Hint: na kruhu konvergence použijte Stirlingův vzorec)

Další užitečné zdroje příkladů:

- Příklady připravené k Matematické analýze 2 z let 2012/13 a 2016/2017. Online zde:

<https://www2.karlin.mff.cuni.cz/~cuth/examples.html>

- Příklady od Kristýny Kuncové z minulého semestru. Online zde:

<https://www2.karlin.mff.cuni.cz/~kuncova/historie20.php>

CVIČENÍ 7

1. Vyjádřete následující funkce jako mocninnou řadu o středu 0:

a) e^{-x^2} b) $(1+x)\log(1+x)$ c) $\frac{1}{(1-x)^2}$ d) $\operatorname{arctg} x$ e) $\operatorname{arctg} \left(\frac{2-2x}{1+4x} \right)$

2. Sečtěte řady všude na intervalu konvergence:

a) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{4n+5}}{n!}$ b) $\sum_{n=1}^{\infty} nx^n$ c) $\sum_{n=1}^{\infty} n^2x^n$ d) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1}n^2x^n$ e) $\sum_{n=1}^{\infty} (n-1)(n+3)x^{2n}$

3. Řekneme, že reálná funkce f je vyjádřitelná na okolí nuly jako mocninná řada (zkráceně “je (MR)”), pokud existuje $\delta > 0$ a posloupnost $(a_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ splňující, že $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, $x \in (-\delta, \delta)$. Určete, jaké implikace platí mezi následujícími tvrzeními o reálné funkci f definované na okolí nuly a své tvrzení dokažte.

(a) f je (MR).

(b) f je (MR) a existuje $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ splňující $f^{(k)}(0) \neq 0$.

(c) Existuje $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ a g která je (MR) a $g(0) \neq 0$ tak, že na nějakém otevřeném okolí nuly platí $f(x) = x^k g(x)$.

(d) f má na okolí nuly spojitě derivace všech řádů (tj. $f \in C^{\infty}((-\delta, \delta))$) pro nějaké $\delta > 0$).

4. Sečtěte řady všude na intervalu konvergence: a) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}$ b) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{4n}}{(4n)!}$

5. Vyjádřete následující funkci jako mocninnou řadu o středu 0: a) $\frac{4}{(x-3)(x+1)}$

CVIČENÍ 8

1. Rozviňte funkce $f(x) = \frac{1}{1-x}$, $g(x) = \frac{1}{(1-x)^2}$ v mocninné řady se středem v bodě $x_0 = -1$ a stanovte poloměr konvergence těchto řad.

2. Rozviňte funkci $\exp(x)$ v mocninnou řadu se středem v bodě $x_0 = 1$ a stanovte poloměr konvergence této řady.

3. Sečtěte řady všude na intervalu konvergence:

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n(n+1)}$ b) $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$ c) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^{2n}}{n(2n-1)}$

4. Rozviňte funkce $f(x) = \frac{1}{x-3}$, $g(x) = \frac{x}{x-3}$ v mocninné řady se středem v bodech $x_0 = 0$ a $x_0 = 1$ a stanovte poloměr konvergence těchto řad.

5. Rozviňte funkce $f(x) = \exp(x)$, $g(x) = x \exp(x)$ v mocninné řady se středem v bodě $x_0 = -17$ a stanovte poloměr konvergence těchto řad.

6. Určete, zda mají následující funkce f konečnou variaci na $[0, 1]$

a) $f(x) = \sqrt{x}$ b) $f(x) = \begin{cases} 1 & x \in [0, 1] \cap \mathbb{Q} \\ 0 & x \in [0, 1] \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$ c) $f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x} & x \in (0, 1] \\ 0 & x = 0 \end{cases}$ d) $f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x^2} & x \in (0, 1] \\ 0 & x = 0 \end{cases}$

e) $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{1-x} & x \in [0, 1) \\ 0 & x = 1 \end{cases}$

7. Sečtěte řadu $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2-1}{3^n n!} x^n$ všude na intervalu konvergence

CVIČENÍ 9

1. Sečtěte řady:

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n}$ c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$ d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(n+1)}{2^n}$ e) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n^3}{3^n}$ f) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{4^n(2n+1)}$
 g) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{4n^2-1}$ h) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2n+3}{(n+1)2^n}$ i) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n^2}{2^n n!}$

2. Sečtěte řady všude na intervalu konvergence:

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n!} x^{n+2}$ b) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{3n+1}{2n^2+n} x^{2n+1}$ c) $\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{n-1}{n!} x^n$

Výsledky:

1. a) $-\log 2$ b) 2 c) $\frac{\pi}{4} - 1$ d) 8 e) $\frac{3}{128}$ f) $2 \operatorname{arctg}(1/2) - 1$ g) $\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}$ h) $-2 \log(\frac{2}{3}) - \frac{5}{3}$ i) $-\frac{1}{4\sqrt{e}}$
 2. a) $e^x(x^4 + x^3)$, $x \in \mathbb{R}$ b) $-x + \arctan x - x \log(1 + x^2)$, $x \in [-1, 1]$ c) $(1 - x)e^{-x} - 1 + 2x$, $x \in \mathbb{R}$

CVIČENÍ 10

1. Určete, jaké implikace platí mezi následujícími tvrzeními o funkci $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$.

- (a) f má konečnou variaci na $[0, 1]$,
- (b) $|f|$ má konečnou variaci na $[0, 1]$,
- (c) f je omezená.

2. Určete, které z následujících funkcí $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ mají konečnou variaci, které jsou absolutně spojitě a které jsou Lipchitzovké.

a) $f(x) = x$ b) $f(x) = x^2$ c) $f(x) = \sqrt{x}$ d) $f(x) = \begin{cases} 1 & x \in [0, \frac{1}{2}] \\ 0 & x \in (\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$ e) $f(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x} & x \in (0, 1] \\ 0 & x = 0 \end{cases}$

3. Určete, jaké implikace platí mezi následujícími tvrzeními o funkci $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$.

- (a) f je absolutně spojitá na $[0, 1]$,
- (b) $|f|$ je absolutně spojitá na $[0, 1]$,
- (c) f má omezenou derivaci na $[0, 1]$.

4. Rozložte ve Fourierovy řady periodické prodloužení následujících funkcí

a) $f(x) = x, \quad x \in [-\pi, \pi)$ b) $f(x) = x^2, \quad x \in [0, 2\pi)$ c) $f(x) = \begin{cases} 0 & x \in [-5, 0] \\ 3 & x \in (0, 5) \end{cases}$ d) $f(x) = |x|, \quad x \in [-2, 2]$

5. Ukažte, že

1. $BV([0, 1])$ je vektorový podprostor prostoru $\ell_\infty([0, 1]) = \{f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R} : f \text{ je omezená}\}$,
2. předpis $\|f\|_{BV} := \|f\|_\infty + V(f)$ definuje normu na $BV([0, 1])$,
3. Je-li ρ metrika na $BV([0, 1])$ generovaná normou $\|\cdot\|_{BV}$, pak $(BV([0, 1]), \rho)$ je úplný metrický prostor.
Hint: můžete použít, že $(\ell_\infty([0, 1]), \|\cdot\|_\infty)$ je úplný

6. Ukažte, že

1. $AC([0, 1])$ je vektorový podprostor prostoru $BV([0, 1])$,
2. předpis $\|f\|_{AC} := \|f\|_\infty + \|f'\|_{L_1}$ definuje normu na $AC([0, 1])$,
3. je-li ρ metrika na $AC([0, 1])$ generovaná normou $\|\cdot\|_{AC}$, pak $(AC([0, 1]), \rho)$ je úplný metrický prostor,
Hint: použijte úplnost prostoru L_1 , Newton-Leibnitzovu formuli pro absolutně spojitě funkce a záměnu limity a integrálu
4. pro $f \in AC([0, 1])$ platí $\|f\|_{AC} = \|f\|_{BV}$.
Hint: je třeba ukázat, že $V(f) = \|f'\|_{L_1}$. Pro důkaz nerovnosti \leq použijte definici variace a Newton-Leibnitzovu formuli pro absolutně spojitě funkce. Pro důkaz nerovnosti \geq postupujte takto: Nechť $F(t) = V(f; 0, t)$ je variace f na $[0, t]$. Pak F je neklesající, $|f(s) - f(t)| \leq F(s) - F(t)$ pro $0 \leq t \leq s \leq 1$. Tedy $|f'| \leq F'$ skoro všude na $[0, 1]$. Odtud odvoďte, že $\|f'\|_{L_1} \leq F(1) - F(0) = V(f)$.

CVIČENÍ 11

1. Rozložte ve Fourierovy řady 2π -periodické prodloužení následujících funkcí, rozhodněte zda příslušná řada konverguje bodově/lokálně stejnoměrně/stejnoměrně na \mathbb{R} a určete její součet. Nakonec pak určete součet zadané číselné řady.

a) $f(x) = \pi^2 - x^2, x \in (-\pi, \pi]; \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2}$ b) $f(x) = e^x, x \in (-\pi, \pi]; \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2+1}$

c) $f(x) = \sin(3x) + 4x, x \in (-\pi, \pi]; \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} \sin n}{n}$ d) $f(x) = \begin{cases} 1 & x \in (0, \pi) \\ 0 & x \in (\pi, 2\pi) \\ \frac{1}{2} & x \in \{0, \pi, 2\pi\}. \end{cases}; \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(2n-1)}{2n-1}$

e) $f(x) = \begin{cases} 0 & x \in [-\pi, -\frac{\pi}{6}] \cup [\frac{\pi}{6}, \pi] \\ \cos(3x) & x \in (-\frac{\pi}{6}, -\frac{\pi}{6}) \end{cases}; \sum_{n=1, n \neq 3}^{\infty} \frac{\cos^2 \frac{n\pi}{6}}{(9-n^2)^2}$ f) $f(x) = \frac{1}{4}\pi \operatorname{sgn} x, x \in (-\pi, \pi]; \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}$

2. Které koeficienty Fourierovy řady funkce $f \in \mathcal{P}_{2\pi}$ jsou nulové, jestliže platí

(a) $f(x + \pi) = -f(x)$

(b) $f(x + \pi) = f(x)$

(c) $f(-x) = f(x)$ a $f(x + \pi) = -f(x)$

CVIČENÍ 12

1. Rozviňte následující funkce do sinové/kosinové Fourierovy řady. Nalezněte intervaly, kde řada konverguje (bodově/stejněměrně/lokálně stejněměrně) a určete její součet. Určete pak součet číselných řad, pokud je v zadání číselná řada uvedena.

a) $\operatorname{sgn}(\sin(3x))$ na $[0, \pi)$ do cosinové řady. Určete součet $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(3k+1)(3k+2)}$

b) $\cos(ax)$ pro $a > 0$ na $[0, \pi)$ do sinové řady

c) $\chi_{[-a,a]}$ pro $a \in (0, \pi)$ na $[0, \pi)$ do cosinové řady. Určete součty $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2(na)}{n^2}$ a $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos^2(na)}{n^2}$.

(můžete bez důkazu použít, že $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$)

2. S pomocí Parsevalovy rovnosti odvoďte z rozvoje x^2 do Fourierovy řady na $[-\pi, \pi]$, čemu je roven součet řady $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}$.

3. Sečtěte $\sum_{n=1}^{\infty} q^n \sin(nx)$ pro $q \in (-1, 1)$. Je tato řada Fourierovou řadou svého součtu?

(*Hint:* použijte komplexní čísla, tj. $\sin(nx) = \operatorname{Im}(e^{inx})$)

CVIČENÍ 13

Zadání zápočtové písemky, varianta A:

1. Sečtěte řadu

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2}{(3n+6)3^n}$$

2. Uvažujme funkci

$$f(x) = \begin{cases} 3x & x \in [0, \frac{1}{4}] \\ 0 & x \in (\frac{1}{4}, \pi] \end{cases}$$

Rozviňte ji v sinovou Fourierovu řadu, tj. nalezněte koeficienty b_k , $k \in \mathbb{N}$ takové, že platí

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin(kx), \quad x \in (0, \pi) \setminus \{\frac{1}{4}\}.$$

(nejprve nalezněte příslušné koeficienty a pak s pomocí vět z přednášky dokažte, že splňují žádanou rovnost)

Zadání zápočtové písemky, varianta B:

1. Sečtěte řadu

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{3}{(2n+4)4^n}$$

2. Uvažujme funkci

$$f(x) = \begin{cases} x & x \in [0, \frac{1}{3}] \\ 0 & x \in (\frac{1}{3}, \pi] \end{cases}$$

Rozviňte ji v cosinovou Fourierovu řadu, tj. nalezněte koeficienty a_k , $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ takové, že platí

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(kx), \quad x \in (0, \pi) \setminus \{\frac{1}{3}\}.$$

(nejprve nalezněte příslušné koeficienty a pak s pomocí vět z přednášky dokažte, že splňují žádanou rovnost)

1. Je Cantorovo diskontinuum souvislá množina?

2. Necht' $A, B \subset \mathbb{R}^2$ jsou souvislé množiny. Rozhodněte o platnosti následujících tvrzení.

(a) $A \cap B$ je souvislá množina.

(b) Pokud je $A \cap B \neq \emptyset$, pak $A \cup B$ je souvislá množina.

(c) $A \setminus B$ je souvislá množina.

(d) Pokud jsou A a B křivkově souvislé a $A \cap B \neq \emptyset$, pak $A \cup B$ je křivkově souvislá množina.

3. Dokažte, že každá konvexní množina v \mathbb{R}^n je křivkově souvislá.

4. Sestrojte dvě disjunktní souvislé množiny A a B v $[0, 1]^2$ takové, že $\{(0, 0), (1, 1)\} \subset A$ a $\{(1, 0), (0, 1)\} \subset B$. (stačí obrázek)

5. Existuje spočetný metrický prostor s alespoň dvěma body, který je souvislý?

6. Je množina $\{(0, 0)\} \cup \{(t \sin \frac{1}{t}, t \cos \frac{1}{t}) : t \in (0, 1]\} \subset \mathbb{R}^2$ křivkově souvislá?

7. Necht' (M, d) je metrický prostor. Uvažujme následující podmínku

$$\forall \varepsilon > 0 \forall x, y \in M \exists x_0, \dots, x_n : x_0 = x, x_n = y \text{ a } d(x_i, x_{i+1}) < \varepsilon \text{ pro } i = 0, \dots, n-1. \quad (2)$$

Dokažte, že pokud je M souvislý, pak splňuje (2) a že opačná implikace neplatí. Dále ukažte, že pokud je M kompaktní, pak je souvislý, právě když platí (2). Jaké implikace (mezi souvislostí a podmínkou (2)) platí, pokud je M úplný metrický prostor?

8. Dokažte, že pokud (M, d) je souvislý metrický prostor a $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ lokálně konstantní (tj. pro každé $x \in M$ existuje $\varepsilon > 0$ že f je konstantní na $B(x, \varepsilon)$), pak f je konstantní.