VÝSLEDKY

I. OPAKOVÁNÍ STŘEDOŠKOLSKÉ LÁTKY, VÝROKY

1. a) $(4;6]$ b) $(-6;-3)\cup(\frac{-1-\sqrt{13}}{2},\frac{-1+\sqrt{13}}{2})$ c) $[1;2]$ d) $\frac{4}{3}$
e) $\bigcup_{k\in\mathbb{Z}}((-\frac{\pi}{2}+2k\pi;\frac{\pi}{6}+2k\pi)\cup(\frac{\pi}{2}+2k\pi;\frac{5\pi}{6}+2k\pi))$
f) $(-\infty,3)\cup(3,2+\sqrt{6}]$ g) $[\frac{1}{2},\infty)$
h) $\{0,\frac{2}{3}\}$ i) $(-10;-7)\cup(10;\infty)$ j) $\{7,\frac{\sqrt{7}}{7}\}$

4. a) $c>1/4 \implies x\in\mathbb{R}$; $c\in(0,1/4] \implies x\in(-\infty,\frac{-1-\sqrt{1-4c}}{2c})\cup(\frac{-1+\sqrt{1-4c}}{2c},\infty)$; $c=0 \implies x>-1$;
$c<0 \implies x\in(\frac{-1+\sqrt{1-4c}}{2c},\frac{-1-\sqrt{1-4c}}{2c})$
b) $c>0 \implies x\in\emptyset$; $c=0 \implies x\in\mathbb{R}$; $c<0 \implies x<\log(-1/c)$
c) $c<0 \implies x\in\mathbb{R}$; $c=0 \implies x\in\mathbb{R}\setminus\{\pi/2+k\pi:\ k\in\mathbb{Z}\}$;
$c\in(0,1) \implies x\in\bigcup_{k\in\mathbb{Z}}(-\arccos c+k\pi,\arccos c+k\pi)$; $c\geq 1 \implies x\in\emptyset$
d) $x\in(-e^{\pi/2-c},e^{-\pi/2-c})\cup(e^{-\pi/2-c},e^{\pi/2-c})$

5. a) $\forall m\in M\ \forall z\in Z: S(m,z)\Rightarrow L_1(m,z)$,
b) $\forall z\in Z\ \exists m\in M: L_1(m,z)$,
c) $\forall z\in Z\ \forall m_1\in M\ \forall m_2\in M: S(m_1,z)\ \&\ S(m_2,z)\Rightarrow m_1=m_2$,
d) $\forall m\in M\ \forall z_1\in Z\ \forall z_2\in Z: S(m,z_1)\ \&\ S(m,z_2)\Rightarrow z_1=z_2$ (NE);
e) $\exists z\in Z\ \exists m\in M: S(m,z)$;
f) $\exists m\in M\ \exists z\in Z: S(m,z)$ (ANO);
g) Existuje nevěrná manželka (aspoň jedna):
$\exists z\in Z\ \exists m_1\in M\ \exists m_2\in M(m_1\neq m_2\ \&\ S(m_1,z)\ \&\ L_2(m_2,z))$,
existují nevěrné manželky (aspoň dvě):
$\exists z_1\in Z\ \exists z_2\in Z\exists m_1\in M\ \exists m_2\in M\ \exists m_3\in M\ \exists m_4\in M$
$(z_1\neq z_2\ \& m_1\neq m_2\ \&\ m_3\neq m_4\ \&\ S(m_1,z_1)\ \&\ L_2(m_2,z_1)\ \&\ S(m_3,z_2)\ \&\ L_2(m_4,z_2))$.
h) Existuje svobodný muž.
i) Existuje žena, která žádnému muži neopětuje lásku.
j) Existuje žena, jíž žádný muž neopětuje lásku.
k) Každá žena, která miluje nějakého muže, nemiluje některého muže, který miluje ji.

6. a) (i), (ii), (iii) neplatí b) (i), (ii) platí; (iii) neplatí c) (i) platí; (ii), (iii) neplatí
d) (i), (ii), (iii) platí

7. e) Platí, negace $\exists x\in\mathbb{N}\ \forall y\in\mathbb{N}\ \exists z\in\mathbb{N}\,(z>x\ \&\ y\geq z)$;
f) Platí, negace $\forall y\in\mathbb{N}\ \exists x\in\mathbb{N}\ \exists z\in\mathbb{N}\ (z>x\ \&\ y\geq< z)$;
g) Neplatí, negace $\forall x\in\mathbb{N}\ \exists y\in\mathbb{N}\ \exists z\in\mathbb{N}\,(z>x\ \&\ y\geq z)$;
h) Platí, negace $\forall x\in\mathbb{N}\ \exists y\in\mathbb{N}\ \exists z\in\mathbb{N}\,(z<x\ \&\ y\leq z)$;
i) Platí, negace $\exists x\in\mathbb{R}\ \exists\varepsilon>0\ \forall\delta>0\ \exists y\in\mathbb{R}\,(|y-x|<\delta\ \&\ y\geq x+\frac{\varepsilon}{3})$.

8. a) $f(y)=15$ pro všechna $y\in(2,12)$;
b) Funkce f je na konstantní na $\mathbb{R}$.

II. DŮKAZOVÁ TECHNIKA, OPERACE S MNOŽINAMI, BINÁRNÍ RELACE A ZOBRAZENÍ

3. a) ano b) ano c) ne d) ano e) ne
6. (i) platí, (ii) neplatí, (iii) neplatí, (iv) neplatí
7. (i) ano, (ii) ano, (iii) ne, (iv) ne, (v) ne, (vi) ne, (vii) ano, (viii) ne

III. SUPREMA, INFIMA

1. a) $\sup A=0,\min A=-1$; b) $\max B=\frac{3}{2},\min B=0$; c) C_1 nemá supremum ani infimum (není zdola, ani shora omezená), C_2 není shora omezená, $\min C_2=3$, $\max C_3=0$, C_3 není zdola omezená; d) $\max D_1=\frac{5}{6}$, $\inf D_1=0$, D_2 není shora omezená, $\inf D_2=0$; e) E není shora omezená, $\inf E=0$; f) F není shora omezená, $\inf F=0$.

IV. LIMITY POSLOUPNOSTÍ

1. a) 0 b) 0 c) 0 d) 0
2. a) 0 b) 2 c) 2 d) 0 e) 0 f) Nemá limitu g) 1/2 h) 1 i) $\frac{81}{2^{13}-1}$ j) $\frac{1}{3}$ k) $\frac{1}{2}$ l) 0 m) $\frac{1}{2}$ n) 0 o) 0 p) 1 q) 0
3. a) $\frac{1}{3}$ b) $\frac{8}{50}$ c) $\sqrt{1+\sqrt{2}}$ d) Nemá limitu e) 0 f) 1 g) 2 h) 1 i) 5 j) $\frac{1}{3}$ k) $\frac{2}{\sqrt{3}}$ l) $\frac{3}{2}$ m) Nemá limitu n) 0 o) 4 p) $-\infty$ q) $+\infty$ r) 0
4. a) $-\frac{7^7}{3^6}$ b) 30 c) 2 d) $-54 \cdot 5^{10} \cdot \sqrt[6]{21}$ e) -5^{35} f) $\frac{11}{9}$
5. a) 1 b) 2 c) $\sqrt{x}$ d) 1 e) $\sqrt{x}$ f) $\sqrt[3]{x}$
6. a) e^3 b) $\frac{1}{\sqrt{e}}$ c) 1 d) 0 e) ∞
7. a) $\limsup_{n\to\infty} a_n = 1$, $\liminf_{n\to\infty} a_n = 0$ b) $\limsup_{n\to\infty} a_n = \infty$, $\liminf_{n\to\infty} a_n = -\infty$ c) $\limsup_{n\to\infty} a_n = 2$, $\liminf_{n\to\infty} a_n = 0$ d) $\limsup_{n\to\infty} a_n = e$, $\liminf_{n\to\infty} a_n = -e$ e) $\limsup_{n\to\infty} a_n = \infty$, $\liminf_{n\to\infty} a_n = 0$ f) $\limsup_{n\to\infty} a_n = 1$, $\liminf_{n\to\infty} a_n = -\frac{1}{2}$ g) $\limsup_{n\to\infty} a_n = 2$, $\liminf_{n\to\infty} a_n = 1$
8. a) $\{-\infty, 0, \infty\}$ b) $\{-4, 0, 2, 6\}$ c) $\{-\infty, 1, \infty\}$ d) $\{-e-\frac{\sqrt{2}}{2}, -e+\frac{\sqrt{2}}{2}, e, e-1, e+1\}$ e) $\{-\frac{5}{3}, \frac{1}{3}, 1\}$
9. a) $\frac{1}{n}$ b) $\frac{n^2}{3^n}$ c) $\frac{1}{n^{2/3}}$ d) $\frac{1}{n^{35/2}}$ e) $\frac{1}{n^{5/36}}$ f) n g) $\frac{1}{n}$
10. *HINT: nejprve dokažte že* $|a_{n+2}-a_{n+1}| \le \frac{1}{2}|a_{n+1}-a_n|$. *Tuto nerovnost iterujte a dokažte* $|a_{n+1}-a_n| \le \frac{1}{2^{n-1}}|a_2-a_1|$. *To použijte na odhad* $|a_{n+k}-a_n| \le |a_2-a_1| \cdot \sum_{i=n-1}^{\infty} \frac{1}{2^i}$ *a s jeho pomocí ukažte že posloupnost je cauchyovská.*
Výsledky ukázkových úloh: a) 1 b) $\frac{1}{e}$ c) limita neexistuje d) 0 e) 3 f) 0 g) $+\infty$ h) $\limsup a_n = e+1$, $\liminf a_n = -e-\frac{\sqrt{2}}{2}$

V. ŘADY

1. a) Diverguje (D) b) D c) D d) Konverguje (K) e) K f) K g) K h) K i) K j) D k) K l) K m) K n) K o) K
2. a) K b) K c) K pro $x < 0$, D pro $x \ge 0$ d) K pro $x \le 0$, D pro $x > 0$ e) K f) D g) K h) K i) D j) K k) K l) D m) D n) K
3. a) D b) K c) D d) D
4. a) D (obecněji K $\iff a > 1$) b) K (obecněji K $\iff a > 1$)
5. a) ne AK b) AK c) ne AK
6. a) K, ale ne absolutně b) D c) K, ale ne absolutně d) K, ale ne absolutně e) D f) K, ale ne absolutně g) AK h) K, ale ne absolutně
7. a) K, ale ne absolutně b) AK c) D d) K, ale ne absolutně e) D f) AK g) K, ale ne absolutně h) D i) K, ale ne absolutně j) K, ale ne absolutně k) K, ale ne absolutně l) K, ale ne absolutně m) AK

VI. LIMITA FUNKCÍ

2. a) 5 b) $+\infty$ c) 0 d) 0 e) neexistuje f) $\lim_{x\to 2^+} f(x) = 0$, $\lim_{x\to 2^-} f(x) = 1$, $\lim_{x\to 2} f(x)$ neexistuje
4. a) $-\frac{1}{2}$ b) $\frac{1}{2}$ c) 1 d) $\frac{3^{10}}{2^{10}}$ e) $\frac{49}{24}$ **5.** a) $+\infty$ b) ∞ c) 0
6. a) 0 pro $n < 1$, 1 pro $n = 1$, pro $n > 1$ sudé limita neexistuje a pro $n > 1$ liché je limita ∞ b) 0 pro $n < 1$, $-\frac{1}{12}$ pro $n = 1$, pro $n > 1$ sudé limita neexistuje a pro $n > 1$ liché je limita $-\infty$ c) $\frac{12}{5}$ d) $-\frac{1}{16}$
7. a) 2 b) $\frac{1}{2}$ c) $-\frac{1}{2}$ d) 1 e) $\frac{3}{2}$ f) neexistuje g) $\frac{1}{2}$ h) 0 i) e^3 j) e k) 1 l) $-\frac{1}{12}$ m) $\frac{1}{4}$ n) $\frac{4}{3}$ o) -3 p) e^{-1} q) $\frac{2}{3}$ r) neexistuje
8. a) $\frac{1}{5}$ b) $\frac{\sqrt{3}}{3}$ c) 0 d) 1 e) $\frac{3}{2}$ f) $\cos a$ g) 0 h) $\sqrt{2}$ i) neexistuje j) $3\log 2$ k) 1 l) -1 m) $\frac{1}{2}$ n) 1 o) 2
9. a) 1 b) 2 c) AK d) $\log 2$ e) $\frac{1}{2}$ f) AK
10. a) $\sqrt{2}$ b) $\frac{1}{3\log 3}$ c) limita neexistuje (zprava $\sqrt{2}$, zleva $-\sqrt{2}$) d) $\frac{9}{2}$ e) $\frac{3}{4}$ f) -6 g) $\sqrt{e}$
11. a) $-\frac{1}{5}$ b) 2
12. a) AK b) D c) K, ale ne absolutně d) AK e) K
13. a) $\frac{1}{3\log 3}$ b) $\sqrt[3]{6}$ c) $\sqrt{2}$ d) 1

VII. SPOJITOSTI A DERIVACE

1. a) spojitá na $\mathbb{R}$ b) spojitá na $(0,\infty) \setminus \mathbb{N}$ a v bodě $x = 1$, v bodech $x \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ spojitá zprava a nespojitá zleva c) spojitá v $(0,\pi)$, v bodě $x = 0$ spojitá zprava (spojitost zleva nemá smysl vyšetřovat), v bodě $x = \pi$ není spojitá zleva (spojitost zprava nemá smysl vyšetřovat)
2. $A = -1$

3. a) $f'(x) = \frac{2\,\mathrm{sgn}(x)}{1+x^2}$ pro $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $f'_+(0) = 2$, $f'_-(0) = -2$.
b) $f'(x) = 2x\exp(-|x-1|) - x^2\exp(-|x-1|)\,\mathrm{sgn}(x-1)$ pro $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$, $f'_+(1) = 1$, $f'_-(1) = 3$.
c) $f'(x) = \frac{xe^{-x^2}}{\sqrt{1-e^{-x^2}}}$ pro $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $f'_+(0) = 1$, $f'_-(0) = -1$.
d) $f'(x) = \arcsin\sqrt{\frac{x}{x+1}}$ pro $x > 0$, $f'_+(0) = 0$.
e) $f'(x) = -\frac{1}{\arccos x \cdot \sqrt{1-x^2}}$ pro $x \in (-1,1)$, $f'_+(-1) = -\infty$.
f) $f'(x) = (\sin x)^{\cos x} \cdot (\frac{\cos^2 x}{\sin x} - \sin x \log \sin x)$ pro $x \in (0,\pi)$, $f'_+(0) = 1$.
4. a) f je definována a spojitá na $\mathbb{R}$, $f'(x) = 5$ pro $x \in (1,4)$; $f'(x) = 2x$ pro $x \in (-\infty,1) \cup (4,\infty)$; $f'_+(1) = f'_-(4) = 5$, $f'_-(1) = 2$, $f'_+(4) = 8$.
b) $D_f = \mathbb{R}$, f je spojitá v každém bodě $\mathbb{R} \setminus (\mathbb{Z} \setminus \{-3,3\})$, v bodech $\mathbb{Z} \setminus \{-3,3\}$ je spojitá zprava a nespojitá zleva. $f'(x) = \frac{2}{3}x[x](x^2-9)^{-2/3}$ pro $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$; $f'(-3) = f'(3) = \infty$; pro $k \in \mathbb{Z} \setminus \{-3,3\}$ je $f'_+(k) = \frac{2}{3}k^2(k^2-9)^{-2/3}$ a $f'_-(k) = \begin{cases} \infty, & |k| > 3, \\ -\infty, & |k| < 3. \end{cases}$
c) $D_f = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}}(-\frac{\pi}{2}+k\pi, \frac{\pi}{2}+k\pi)$, f je spojitá v každém bodě D_f. $f'(x) = -2\sin 2x \cdot (\mathrm{tg}\, x - 1) \cdot \mathrm{sgn}(\cos 2x) + |\cos 2x| \frac{1}{\cos^2 x}$ pro $x \in \bigcup_{k\in\mathbb{Z}}(-\frac{\pi}{2}+k\pi, -\frac{\pi}{4}+k\pi) \cup (-\frac{\pi}{4}+k\pi, \frac{\pi}{4}+k\pi) \cup (\frac{\pi}{4}+k\pi, \frac{\pi}{2}+k\pi)$; $f'(\frac{\pi}{4}+k\pi) = 0$, $f'_+(-\frac{\pi}{4}+k\pi) = -4$, $f'_-(-\frac{\pi}{4}+k\pi) = 4$ pro $k \in \mathbb{Z}$.
d) $f'(x) = \begin{cases} 2x(\sin\frac{1}{x} + \cos\frac{1}{x}) + \sin\frac{1}{x} - \cos\frac{1}{x} & x \neq 0, \\ 0 & x = 0. \end{cases}$
e) $D_f = \mathbb{R}$, f spojitá v každém bodě $\mathbb{R} \setminus \{k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$, v bodech $\{2k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$ je spojitá zprava a nespojitá zleva, v bodech $\{(2k+1)\pi : k \in \mathbb{Z}\}$ je spojitá zleva a nespojitá zprava. Pro $k \in \mathbb{Z}$ máme: $f'(x) = 0$ pro $x \in (2k\pi, (2k+1)\pi)$; $f'(x) = \sin x$ pro $x \in ((2k-1)\pi, 2k\pi)$; $f'_+(2k\pi) = f'_-((2k+1)\pi) = 0$; $f'_-(2k\pi) = f'_+((2k+1)\pi) = +\infty$.
f) f je definována a spojitá na $\mathbb{R}$, $f'(x) = (e+|x|)^x \cdot (\log(e+|x|) + \frac{|x|}{e+|x|})$ pro $x \in \mathbb{R}$
(pozor, $f'(0) = 1$ je potřeba spočítat zvlášť)

VIII. APLIKACE DERIVACÍ

1. a) 2 b) -2 c) $-\frac{1}{3}$ d) $\frac{1}{3}$ e) $-\frac{e}{2}$ f) -2 g) $\frac{1}{2}$ h) $e^{1/6}$ i) $a^a(\ln a - 1)$
2. $\max f(x) = f(2) = 4$, $\min f(x) = f(-3) = -16$
3. a) maximum neexistuje (ani lokální), globální minimum v bodě $\frac{7}{5}$ b) globální maximum v bodě 1, globální minimum v bodě 0, lokální maximum v bodě -1
6. a) , b) , c) : viz. výsledky zkouškové písemky z roku 2008/2009, varianty E, D, B
`http://www.karlin.mff.cuni.cz/~kalenda/pis-fsv/0809/pis.htm`
d) , e) : viz. sepsané úlohy od Petra Pošty (sepsáno v roce 2010/11)
`http://www.karlin.mff.cuni.cz/~pposta/priklady/PrubFR.pdf`