I. OPAKOVÁNÍ STŘEDOŠKOLSKÉ LÁTKY, VÝROKY

1. Řešte následující nerovnosti a rovnosti v $\mathbb{R}$:

a) $\frac{x-2}{2x-8} \geq 1$; b) $\frac{x+2}{x+3} > \frac{2x+3}{x+6}$; c) $\log_{\frac{1}{8}}(x^2 - 3x + 3) \geq 0$; d) $\log(x^2+1) = 2\log(3-x)$;

e) $\sin 2x < \cos x$; f) $x \leq \left|\frac{x+2}{x-3}\right|$; g) $|x - |x+1|| \leq 2x$;

h) $|x - |x-1|| = 1 - |x|$; i) $\frac{x^2+2}{x+7} < 2(x-7)$; j) $\log_7(49x^2) = 4 \cdot (\log_7 x)^2$.

2. Dokažte:

a) Pro každé $a, b \in \mathbb{R}$: $||a| - |b|| \leq |a - b|$; b) Pro každé $a, b \in \mathbb{R}$: $|a+b| \leq |a| + |b|$.

3. Načrtněte graf funkce

a) $f(x) = 1 - |\cos \frac{x}{2}|$; b) $g(x) = \frac{1}{2} + \cos(\frac{\pi}{2} + |x|)$; c) $h(x) = ||||x| - 1| - 1| - 1|$;

d) $i(x) = \left|\frac{3x+3}{2x-4}\right|$; e) $j(x) = |\log|1-x||$.

4. V závislosti na parametru $c \in \mathbb{R}$ určete, pro která $x \in \mathbb{R}$ platí:

a) $cx^2 + x + 1 > 0$ b) $ce^x \in (-1, 0]$ c) $|\cos x| - c > 0$ d) $\log|x| + c \in (-\pi/2, \pi/2)$

5. Nechť M značí množinu všech mužů a Z množinu všech žen. Uvažujme následující výrokové formy:

$S(m,z)$: „Muž m je manželem ženy z.";

$L_1(m,z)$: „Muž m miluje ženu z."; $L_2(m,z)$: „Žena z miluje muže m.".

Pomocí kvantifikátorů, logických spojek a forem S, L_1 a L_2 zapište následující výroky:

a) Každý ženatý muž miluje svou manželku. b) Každou ženu miluje nějaký muž.

c) Každá žena má nejvýš jednoho manžela.

d) Každý muž má nejvýš jednu manželku. (Říká tento výrok totéž, co c)?)

e) Existuje vdaná žena. f) Existuje ženatý muž. (Říká tento výrok totéž, co e)?)

g) Existují nevěrné manželky. (Manželku prohlásíme za nevěrnou, pokud miluje jiného muže než svého manžela.)

Následující výroky přeložte do češtiny.

h) $\exists m \in M \forall z \in Z(\neg S(m,z))$;

i) $\exists z \in Z \forall m \in M(L_1(m,z) \Rightarrow \neg L_2(m,z))$;

j) $\exists z \in Z \forall m \in M(L_2(m,z) \Rightarrow \neg L_1(m,z))$;

k) $\forall z \in Z((\exists m \in M : L_2(m,z)) \Rightarrow (\exists m \in M : L_1(m,z) \,\&\neg L_2(m,z))$.

6. Uvažme následující výroky:

(i) $\forall x \in M\ \exists y \in M\ \exists z \in M \quad x = y + z$ (ii) $\exists y \in M\ \forall x \in M\ \exists z \in M \quad x = y + z$

(iii) $\exists y \in M\ \exists z \in M\ \forall x \in M \quad x = y + z$

Které z nich jsou pravdivé a které nepravdivé, je–li

a) $M = \mathbb{N}$ b) $M = \mathbb{N} \cup \{0\}$ c) $M = (0,1)$ d) $M = \{0\}$?

7. Rozhodněte o správnosti následujících výroků a napište jejich negace.

a) $\forall x \in \mathbb{N}\ \exists y \in \mathbb{N}\ \forall z \in \mathbb{N}\,(z > x \Rightarrow y < z)$; b) $\exists y \in \mathbb{N}\ \forall x \in \mathbb{N}\ \forall z \in \mathbb{N}\ (z > x \Rightarrow y < z)$;

c) $\exists x \in \mathbb{N}\ \forall y \in \mathbb{N}\ \forall z \in \mathbb{N}\,(z > x \Rightarrow y < z)$; d) $\exists x \in \mathbb{N}\ \forall y \in \mathbb{N}\ \forall z \in \mathbb{N}\,(z < x \Rightarrow y > z)$;

e) $\forall x \in \mathbb{R}\ \forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall y \in \mathbb{R}\,(|y - x| < \delta \Rightarrow y < x + \frac{\varepsilon}{3})$.

8. Vyjádřete co nejjednodušeji:

a) $\forall \varepsilon > 0\ \forall y \in \mathbb{R} : |y - 7| < 5 \Rightarrow |f(y) - 15| < \varepsilon$;

b) $\forall x \in \mathbb{R}\ \exists \delta > 1 \forall y \in \mathbb{R}\ \forall n \in \mathbb{N} : |y - x| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \frac{1}{n}$.

II. DŮKAZOVÁ TECHNIKA, MNOŽINY, ZOBRAZENÍ A MOHUTNOST

1. (Bernoulli) Nechť $x \in \mathbb{R}$, $x \geq -1$, $n \in \mathbb{N}$. Pak platí Bernoulliova nerovnost

$$(1+x)^n \geq 1 + nx.$$

Dokažte matematickou indukcí. Indukcí s krokem „$n \to n{+}2$" dále ukažte, že uvedená nerovnost platí i pro $x \geq -2$. Ukažte na příkladě, že pro $x < -2$ a obecné $n \in \mathbb{N}$ již Bernoulliova nerovnost neplatí.

2. Dokažte indukcí: a) $\sum_{k=1}^n k = \frac{1}{2}n(n+1)$ b) $\sum_{k=1}^n k^3 = (1+2+\ldots+n)^2$ c) $\sum_{k=0}^n q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}, q \neq 1$
d) $\sum_{k=1}^n \frac{1}{(2k-1)(2k+1)} = \frac{n}{2n+1}$ e) Pro $x_1, \ldots, x_n \in [0,\pi]$ platí, že $|\sin(\sum_{i=1}^n x_i)| \leq \sum_{i=1}^n \sin(x_i)$
f) $n! \leq \left(\frac{n+1}{2}\right)^n$ (*Hint: při důkazu použijte Bernoulliho nerovnost*)

3. Platí pro libovolné množiny A, B a C následující vztahy? Své tvrzení dokažte.
a) $A \cup B = B \Leftrightarrow A \cap B = A$ b) $A \subset B \Leftrightarrow A \cup B = B$ c) $(A \cap B) \setminus (B \cap C) = (C \cap B) \setminus (A \cap C)$ d) $(A \cap B) \setminus (B \cap C) = (A \cap B) \setminus (A \cap C)$ e) $(A \cup B) \setminus C = A \setminus (C \cup B)$

4. Uvažujme zobrazení $f : X \to Y$ a množiny $A \subset X$, $B \subset X$. Dokažte následující rovnosti.

(i) $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$,

(ii) $f^{-1}(A \cup B) = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$,

(iii) $f^{-1}(A \cap B) = f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$,

(iv) $f^{-1}(A \setminus B) = f^{-1}(A) \setminus f^{-1}(B)$.

5. Uvažujme zobrazení $f : X \to Y$ a množiny $A \subset X$, $B \subset X$. Ukažte, že následující vztahy obecně neplatí.

(i) $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$,

(ii) $f(A \setminus B) = f(A) \setminus f(B)$.

6. Nechť $f \colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$. Rozhodněte o platnosti následujících tvrzení:

(i) Je-li $f(\mathbb{N})$ konečná, není f prosté.

(ii) Je-li $f(\mathbb{N})$ nekonečná, je f prosté.

(iii) Je-li $\mathbb{N} \setminus f(\mathbb{N}) = \emptyset$, je f prosté.

(iv) Je-li f prosté, je $\mathbb{N} \setminus f(\mathbb{N}) = \emptyset$.

7.Rozhodněte, zda jsou následující množiny spočetné. Své tvrzení dokažte:

(i) $\mathbb{Z}$ (množina celých čísel)

(ii) $\mathbb{Q}$ (množina racionálních čísel)

(iii) $\mathbb{R}$

(iv) množina všech zobrazení z $\mathbb{N}$ do $\{0,1\}$

(v) množina všech iracionálních čísel

(vi) množina všech otevřených intervalů na $\mathbb{R}$

(vii) množina všech konečných podmnožin $\mathbb{N}$

(viii) množina všech nekonečných podmnožin $\mathbb{N}$

III. SUPREMA, INFIMA

1. Najděte suprema a infima následujících množin (pokud existují). Existují maxima a minima?

a) $A = \{-\frac{1}{n};\ n \in \mathbb{N}\}$; b) $B = \{\frac{n+(-1)^n}{n};\ n \in \mathbb{N}\}$;
c) $C_1 = \{n^2 - m^2;\ n, m \in \mathbb{N}\}$, $C_2 = \{n^2 - m^2;\ n, m \in \mathbb{N}, n > m\}$, $C_3 = \{n^2 - m^2;\ n, m \in \mathbb{N}, n \leq m\}$;
d) $D_1 = \{2^{-n} + 3^{-n};\ n \in \mathbb{N}\}$, $D_2 = \{2^{-n} + 3^{-n};\ n \in \mathbb{Z}\}$;
e) $E = \{n^{(-1)^n};\ n \in \mathbb{N}\}$; f) $F = \{5^{(-1)^j 3^k};\ j \in \mathbb{Z},\ k \in \mathbb{Z}\}$;

IV. LIMITY POSLOUPNOSTÍ

1. Vypočtěte přímo z definice limity:

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n^2}$ b) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^2+n}{n^3+3}$ c) $\lim\limits_{n\to\infty} (-1)^n \dfrac{2n}{n^3+1} = 0$ d) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sin(n\frac{\pi}{7})}{n^2} = 0$

2. Spočtěte následující limity posloupností: a) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2n^2+n-3}{n^3-1}$ b) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2n^3+6n}{n^3-7n+7}$

c) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2n^5+3n-2}{n^5-3n^3+1}$ d) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)$ e) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\sqrt[3]{n+11}-\sqrt[3]{n}\right)$

f) $\lim\limits_{n\to\infty} (-1)^n\sqrt{n}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})$ g) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(n+4)^{100}-(n+3)^{100}}{(n+2)^{100}-n^{100}}$ h) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^2+(n+1)^2}{(n+3)^2+(n+4)^2}$

i) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(n+4)^{27}-(n+1)^{27}}{(2n^2+5)^{13}-(n^2-1)^{13}}$ j) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(n^2-1)(n+2)^3-n^2}{3n(n^2+5)(n^2+1)}$ k) $\lim\limits_{n\to\infty} (\sqrt{n+\sqrt{n}}-\sqrt{n})$

l) $\lim\limits_{n\to\infty} (\sqrt[3]{n+2}-\sqrt[3]{n-1})$ m) $\lim\limits_{n\to\infty} (\sqrt{n^2+n+1}-\sqrt[3]{n^3+1})$ n) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt[4]{n+2}-\sqrt[4]{n+1}}{\sqrt[3]{n+3}-\sqrt[3]{n}}$

o) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt{n^2+n+1}-n-1}{\sqrt{n}}$ p) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{\dfrac{n+\sqrt{n+\sqrt{n+1}}}{n+1}}$

3. Spočtěte následující limity posloupností([·] značí celou část):

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{3^n+5^n+n^3}{1+5n^2+3\cdot 5^n}$ b) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(n^7+1)^8-(n^7+2)^8}{(n+1)^{50}-(n+2)^{50}}$ c) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{\dfrac{n+\sqrt{n^2+\sqrt{n^4+1}}}{n+1}}$

d) $\lim\limits_{n\to\infty} (-1)^n\cdot n\cdot(\sqrt[3]{n^3+1}-\sqrt{n^2+5})$ e) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\sqrt{n+\sqrt{n}}-\sqrt{n+6}\right)\dfrac{3+(-5)^n+n!+4^n}{n^n+8-6n!}$

f) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(n^6+n)^5-(n^6+7n)^5}{(n^5+1)^6-(n^5+6)^6}$ g) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n+[\sqrt[3]{n}]^3}{n-[\sqrt{n+9}]}$ h) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{3^n+n^5+(n+1)!}{n(n^6+n!)}$ i) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{5^n+4^n+3^n+2^n}$

j) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(-2)^n+3^n}{(-2)^{n+1}+3^{n+1}}$ k) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\sqrt{3^n+2\cdot 2^n}-\sqrt{3^n+2^n}}$ l) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt[n]{2^n+3^n}}{\sqrt[2n]{4^n+\sqrt{n}}}$

m) $\lim\limits_{n\to\infty} \sin\left(\dfrac{n\pi}{4}\right)\sqrt[n]{5+n}$ n) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{3^n-[\sqrt[3]{n!}]}{3n^3-[\sqrt[3]{(n+1)!}]}$ o) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{[n^4\cos n]-n^2 3^n+4^n}$

p) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{2\sqrt{n}-\sqrt[3]{n}}{\sqrt{n+1}}-\cos\frac{n\pi}{4}\right)\frac{2n}{1-\sqrt[n]{2n}}$ q) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sqrt[6]{n^5+1}-\sqrt[5]{n^4-n^3}+\sqrt[n]{n^2}}{\sqrt{n-\sqrt{n}}}$ r) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{5+\sqrt[3]{n^3+n^2}-\sqrt{n^2+n}}{\sqrt{n}-\sqrt[4]{n}}$

4. Spočtěte následující limity posloupností (příklady ze zkouškových písemek na FSV):

a) $\lim\limits_{n\to\infty} ((n^{10}+n^3)^7-(n^7+1)^{10})\cdot\left(\sqrt[3]{(1+\dfrac{1}{n^9})^7}-1\right)^7$

b) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(n+\frac{2}{n})^{30}-(n+\frac{1}{n})^{30}}{\sqrt{(2+n^7)^8-2^8}}$ c) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n\sqrt{n}\,\sqrt[n]{(n+1)^n+n^{n+1}}}{[\sqrt{n}]+[2\sqrt{n}]+\cdots+[n\sqrt{n}]}$

d) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\left(25+\dfrac{1}{n}\right)^6-\left(5+\dfrac{1}{n}\right)^{12}\right)\cdot\sqrt[6]{(n+2)^7-(n-1)^7}$

e) $\lim\limits_{n\to\infty} ((n^5+2)^{25}-(n+5)^{125})\cdot\left(\left(1+\dfrac{1}{25n^4}\right)^{125}-1\right)^{31}$ f) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt{n^5+17\sqrt[6]{n}}-\sqrt{n^5-5\sqrt[6]{n}+1}}{\sqrt[3]{n^5+18n-16}-\sqrt[3]{n^5-9n}}$

5. Ukažte, že rekurentně zadaná posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ má limitu a určete jí:

a) $a_{n+1}=\frac{a_n+3}{4}$, $a_1=0$ b) $a_{n+1}=\sqrt{2+a_n}$, $a_1=\sqrt{2}$ c) $a_{n+1}=a_n+\frac{1}{2}(x-a_n^2)$, $a_1=0$, $0\le x\le 1$

d) $a_{n+1}=\frac{1}{2}(a_n+\frac{1}{a_n})$, $a_1>0$ e) $a_{n+1}=\frac{a_n(a_n^2+3x)}{3a_n^2+x}$, $a_1>0$, $x\ge 0$ f) $a_{n+1}=\frac{1}{3}(2a_n+\frac{x}{a_n^2})$, $a_1>0$, $x>0$

6. Spočtěte limity posloupností: a) $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{3n}$ b) $\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{100+2n}\right)^{n}$ c) $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^{n}$
d) $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{99}{100}+\frac{1}{5n}\right)^{n}$ e) $\sqrt[n]{n!+3^n+4n}$

7. Pro posloupnost $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ určete hodnoty $\limsup_{n\to\infty} a_n$ a $\liminf_{n\to\infty} a_n$:
a) $a_n=\frac{(-1)^n}{n}+\frac{1+(-1)^n}{2}$ b) $a_n=(-1)^n\frac{n^2+1}{n+1}$ c) $a_n=1+\frac{n}{n+1}\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)$ d) $a_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\cos(n\pi)$ e) $a_n=n^{(-1)^n}$
f) $a_n=\frac{n-1}{n+1}\cos\left(\frac{2n\pi}{3}\right)$ g) $a_n=\sqrt[n]{1+2^{n(-1)^n}}$

8. Pro posloupnost $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ najděte množinu hromadných bodů $H(\{a_n\})$:
a) $a_n=n\sin\left(\frac{n\pi}{4}\right)$ b) $a_n=1+2(-1)^{n+1}+3(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}$ c) $a_n=1+n\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)$ d) $a_n=(1+\frac{1}{n})^n(-1)^n+\sin\left(\frac{n\pi}{4}\right)$
e) $a_n=(-1)^n\frac{n+4}{3n+1}+\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)\sqrt[n]{\frac{4^n+6n}{3^n+5n}}$

9. Pro posloupnost $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ nalezněte co nejjednodušší posloupnost $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ která se chová jako $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ ve smyslu $\lim_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{b_n}\in(0,\infty)$:
a) $a_n=\frac{2n^2+4}{n^3+4n+6}$ b) $a_n=\frac{4n^2+6n+2}{2^n+3^n}$ c) $a_n=(\sqrt[3]{n+2}-\sqrt[3]{n+1})$ d) $a_n=\frac{\sqrt{n^3+2}-\sqrt[3]{n^2+4}}{(n+2)^{20}-n^{20}}$
e) $a_n=(1+\frac{1}{n})^n\frac{\sqrt[9]{n^{10}}+\sqrt[8]{n^7}}{\sqrt[4]{n^5}+\sqrt[3]{n^2}}$ f) $a_n=\frac{[(n+3)^2]}{\sqrt[n]{n^n+5n!+4^n}}$ g) $a_n=\sqrt[n]{\frac{1}{((n+1)^3-n^3-3n^2)^{n-1}}}$

10. Pomocí Bolzano-Cauchyovy podmínky a vztahu $|\cos x-\cos y|\le|x-y|,\ x,y\in\mathbb{R}$ dokažte, že posloupnost $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ pro kterou platí $a_1=1,\ a_{n+1}=\cos\left(\frac{a_n}{2}\right)$ je konvergentní.

Ukázkové příklady k prvnímu zápočtovému testu

V následujících příkladech určete

$$\lim_{n\to\infty} a_n,$$

nebo dokažte, že tato limita neexistuje.

a) $a_n=\dfrac{1}{n(\sqrt{n^2+2}-\sqrt[3]{n^3+1})}$ b) $a_n=\dfrac{n^n-(n+1)^n}{(n+1)^n-(n+2)^n}$

c) $a_n=(-1)^n\dfrac{2^n+4n+6}{2^n(\sqrt[n]{5}-1)}$ d) $a_n=\dfrac{(n+2)^{711}-(n+8)^{711}}{(n^{11}+3)^{71}-(n^{11}+4)^{71}}$

e) $a_n=\sqrt[n]{\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n+3^n}$ f) $a_n=\dfrac{2^n+3n^2+[n!]}{3^n+4n^2+[2n!]}$

g) Posloupnost zadaná rekurentně: $a_1=4,\quad a_{n+1}=(a_n)^2-6$
h) Určete hodnoty $\limsup_{n\to\infty} a_n$ a $\liminf_{n\to\infty} a_n$ pro posloupnost $a_n=(1+\frac{1}{n})^n(-1)^n+\sin\left(\frac{n\pi}{4}\right)$

V. ŘADY

1. Určete, zda konvergují následující řady:

a) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{n^2+3n+4}{n^2+5}$ b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n^3+1}$ c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2n+1}\sqrt{2n+3}}$ d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{2^n-2n}$ e) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n+(-1)^n n}{3^n+(-1)^n n}$
f) $\sum_{n=1}^{\infty}(\sqrt{n^3+1}-\sqrt{n^3-1})$ g) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n+4^n}{4^n+5^n}$ h) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt[3]{n^2+4}-\sqrt[3]{n^2+1}}{\sqrt[3]{n}}$ i) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2+\frac{1}{n})^n}$ j) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt[n]{n}}$
k) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{n-1}}{\sqrt{(n^2-n+1)^{n+1}}}$ l) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n^3+2}-\sqrt[3]{n^2+4}}{(n+2)^{20}-n^{20}}$ m) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n+6}-\sqrt{n+1}}{\sqrt[n]{n^n+3n!+4^n}}$ n) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{3^n}$ o) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3+4n+1}{4^n+3n}$

2. Určete, zda konvergují následující řady:

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n!}$ b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!}$ c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{nx}}{n}, x \in \mathbb{R}$ d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{nx}}{n^2}, x \in \mathbb{R}$ e) $\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{n-1}{n+1})^{n(n-1)}$
f) $\sum_{n=1}^{\infty}(\sqrt{n^2+1}-\sqrt{n^2-1})$ g) $\sum_{n=1}^{\infty}(\sqrt[3]{n^2+1}-\sqrt[3]{n^2-1})$ h) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n^2+3n+4}{2n^4+3}$ i) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n^2+3n+4}{2n^3}$
j) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^8}{3^n+5^n}$ k) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^5}{5^n}$ l) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt[9]{n^{10}}+\sqrt[10]{n^9}}{\sqrt[9]{n^{11}}+\sqrt[11]{n^9}}$ m) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{n+\frac{1}{n}}}{(n+\frac{1}{n})^n}$ n) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3(\sqrt{2}+(-1)^n)^n}{3^n}$

3. Za pomoci Raabeho kritéria (viz. níže) určete, zda konvergují následující řady:

Věta (Raabeovo kritérium)**.** Nechť $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je řada s kladnými členy.

(i) Je-li $\lim n(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1) > 1$, pak je $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergentní.

(ii) Je-li $\lim n(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1) < 1$, pak je $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergentní.

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n(n!)^2}{(2n+1)!}$ b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n!}}{(2+\sqrt{1})\cdots(2+\sqrt{n})}$ c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1\cdot3\cdot5\cdots(2n-1)}{2\cdot4\cdot6\cdots(2n)}$ d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1\cdot4\cdot7\cdots(3n-2)}{3\cdot6\cdot9\cdots(3n)}$

4. Pomocí kondenzačního kritéria určete konvergenci následujících řad:
a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\log n}$ (obecněji pak $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(\log n)^a}$ pro $a > 0$) b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log n}{n^2}$ (obecněji pak $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log n}{n^a}$ pro $a > 0$; můžete bez důkazu použít fakt že pro každé $a > 0$ existuje n_0 takové, že posloupnost $(\frac{\log n}{n^a})_{n=n_0}^{\infty}$ je nerostoucí)

5. Určete, zda následující řady konvergují absolutně:
a) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{1}{n\sqrt[n]{n}}$ b) $\sum_{n=1}^{\infty} \sin(n^2+3n)\frac{4^n+3^n}{5^n+2^n}$ c) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{\sqrt[9]{n^{10}}+\sqrt[10]{n^9}}{\sqrt[9]{n^{11}}+\sqrt[11]{n^9}}$

6. Vyšetřete konvergenci (absolutní i neabsolutní) následujících řad:
a) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{1}{n\log n}$ b) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{n}{n+1}$ c) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{n^2}{n^3+1}$ d) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})$
e) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n(\sqrt{n^2+n}-n)$ f) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{n}{n^2+6}$
g) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n(\sqrt{n^4+1}-n^2)\log n$ *(použijte výsledek příkladu 4b)* h) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{n}{(n^2+1)\log n}$

7. Vyšetřete konvergenci (absolutní i neabsolutní) následujících řad:
a) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{1}{\sqrt{n}\log n}$ b) $\sum_{n=1}^{\infty} \cos(n^2)(\sqrt{n^6+n}-n^3)$ c) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{n}{n+1}\cos(\frac{1}{n})$
d) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{n}{n^2+1}\cos(\frac{1}{n})$ e) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{\log n}}$
f) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log n}{n^2}\cos\left(\frac{\sin n+8}{n^8}\right)$ *(použijte výsledek příkladu 4b)* g) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{1}{\log n}\cos\left(\frac{n}{n^2+1}\right)$

h) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2 n}{n}$ i) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{n\sin n}{n^2+1}$ j) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n)\cos(\frac{1}{n})}{n}$ k) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n+\frac{1}{n})}{\log(\log n)}$ l) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(2n)}{\log n}$
m) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{2n^2+3n+4}{2n^4+3}$

VI. LIMITA FUNKCÍ

1. Ukažte, že následující výroky jsou ekvivalentní výroku $\lim_{x\to c} f(x) = A$ (v každé úloze je uvedeno, pro jaká A, c máte ekvivalenci dokazovat).

a) $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x \in P(c,\delta):\quad f(x) \in B(A, 5\varepsilon)$ (uvažujte $A \in \mathbb{R}, c \in \mathbb{R}$)
b) $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x \in P(c,8\delta):\quad f(x) \in B(A, \varepsilon)$ (uvažujte $A = +\infty, c \in \mathbb{R}$)
c) $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x \in P(c,\delta):\quad f(x) \in [A-\varepsilon, A+\varepsilon]$ (uvažujte $A \in \mathbb{R}, c = -\infty$)

2. Spočtěte z definice (nebo z definice dokažte že limita neexistuje):
a) $\lim_{x\to 5} x$ b) $\lim_{x\to 2^+} \frac{1}{x-2}$ c) $\lim_{x\to 0} \max\{4-|x-4|, 0\}$ d) $\lim_{x\to 0} x \sin\frac{1}{x}$ e) $\lim_{x\to 0} \sin\frac{1}{x}$
f) $\lim_{x\to 2^+} f(x)$, $\lim_{x\to 2^-} f(x)$ a $\lim_{x\to 2} f(x)$, kde funkce f je dána předpisem $f(x) = \begin{cases} 1 & x \in (0,2) \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases}$

3. Pro každý z následujících výroků nalezněte funkci $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a čísla $A, c \in \mathbb{R}$, že tvrzení "$\lim_{x\to c} f(x) = A$" není tomuto výroku ekvivalentní.
a) $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x \in P(c,\delta):\quad f(x) = A$
b) $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x:\quad \big(|x-c| = \delta \implies f(x) \in B(A,\varepsilon)\big)$
c) $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x \in B(c,\delta):\quad f(x) \in B(A,\varepsilon)$

4. Spočtěte limitu, nebo ukažte že limita neexistuje
a) $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{x^2-5x+6}{x^2-8x+15}$ b) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^3-3x+2}{x^4-4x+3}$ c) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^4-3x+2}{x^5-4x+3}$ d) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{(x^2-x-2)^{20}}{(x^3-12x+16)^{10}}$ e) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^{100}-2x+1}{x^{50}-2x+1}$

5. Spočtěte limitu, nebo ukažte že limita neexistuje (příklady na podíly polynomů):
a) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2+2x+1}{x^2-2x+1}$ b) $\lim\limits_{x\to 2} \left(\dfrac{1}{x(x-2)^2} - \dfrac{1}{x^2-3x+2}\right)$ c) $\lim\limits_{x\to 1} \left(\dfrac{x+2}{x^2-5x+4} + \dfrac{x-4}{3(x^2-3x+2)}\right)$

6. Spočtěte limitu, nebo ukažte že limita neexistuje (příklady na výrazy s odmocninami):
a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x^n}$, $n \in \mathbb{Z}$ b) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sqrt[3]{x^2+7}-\sqrt[3]{x^3+7}}{(x-1)^n}$, $n \in \mathbb{Z}$ c) $\lim\limits_{x\to 8} \dfrac{\sqrt{9+2x}-5}{\sqrt[3]{x}-2}$
d) $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{\sqrt{x+13}-2\sqrt{1+x}}{x^2-9}$

7. Spočtěte limitu, nebo ukažte že limita neexistuje (příklady na použití známých limit $\frac{\sin x}{x} \to 1$, $\frac{\log x}{x-1} \to 1$, $\frac{e^x-1}{x} \to 1$ a VOLSF):
a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin 5x - \sin 3x}{\sin x}$ b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos x}{x^2}$ (tuto limitu dále lze považovat za „známou“) c) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\log(\cos x)}{x^2}$
d) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\log(1+x)}{x}$ (tuto limitu dále lze považovat za „známou“) e) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{\sin^2 x}-\cos x}{x^2}$ f) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos x}{\sin^3 x}$
g) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{tg} x - \sin x}{\sin^3 x}$ h) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\frac{x+2}{2x+1}\right)^{x^2}$ i) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\frac{x^2+1}{x^2-2}\right)^{x^2}$ j) $\lim\limits_{x\to 0} \left(1+x^2\right)^{\operatorname{cotg}^2 x}$ k) $\lim\limits_{x\to 0} \left(\frac{1+\operatorname{tg} x}{1+\sin x}\right)^{\frac{1}{\sin^2 x}}$
l) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{\cos x}-\sqrt[3]{\cos x}}{\sin^2 x}$ m) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1+\operatorname{tg} x}-\sqrt{1+\sin x}}{x^3}$
n) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2}{\sqrt{1+x\sin x}-\sqrt{\cos x}}$ o) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{6}} \dfrac{2\sin^2 x+\sin x-1}{2\sin^2 x-3\sin x+1}$ p) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}} (\operatorname{tg} x)^{\operatorname{tg} 2x}$ q) $\lim\limits_{x\to 0} \left(\frac{1+x\cdot 2^x}{1+x\cdot 3^x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$ r) $\lim\limits_{x\to 0} (x+e^x)^{\frac{1}{x^2}}$

8. Spočtěte limitu, nebo ukažte že limita neexistuje:
a) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\log\left(x^2-x+1\right)}{\log\left(x^{10}+x+1\right)}$ b) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{3}} \dfrac{\sin(x-\frac{\pi}{3})}{1-2\cos x}$ c) $\lim\limits_{x\to\infty} (\sin\sqrt{x+1} - \sin\sqrt{x})$ d) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\arcsin x}{x}$
e) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\log\left(1+\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}\right)}{\log\left(1+\sqrt[3]{x}+\sqrt[4]{x}\right)}$ f) $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{\sin x - \sin a}{x-a}$ g) $\lim\limits_{x\to\infty} (\cos\sqrt{x+1} - \cos\sqrt{x-1})$ h) $\lim\limits_{x\to 1^-} \dfrac{\arccos x}{\sqrt{1-x}}$

i) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{\sin x-\cos x}{\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^2}$ j) $\lim\limits_{x\to\infty} \log(1+2^x)\cdot\log\left(1+\dfrac{3}{x}\right)$ k) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\arcsin x}{\sin(\sin x)}$ l) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{(\cos x)^x-\sqrt{1+\sin^3 x}}{x^3}$

m) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}} \operatorname{tg} 2x\cdot\operatorname{tg}\left(\dfrac{\pi}{4}-x\right)$ n) $\lim\limits_{x\to\infty} x\left(\dfrac{\pi}{2}-\arcsin\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right)$ o) $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{\arccos\frac{1-x^2}{1+x^2}}{\sin x}$

Věta (Heineova věta)**.** Nechť $c\in\mathbb{R}^*$, $A\in\mathbb{R}^*$ a funkce f je definována na nějakém prstencovém okolí bodu c. Pak jsou následující dva výroky ekvivalentní.

(i) Platí $\lim_{x\to c} f(x)=A$.

(ii) Pro každou posloupnost $\{x_n\}$ splňující $x_n\in D_f$, $x_n\neq c$ pro všechna $n\in\mathbb{N}$ a $\lim_{n\to\infty} x_n=c$, platí $\lim_{n\to\infty} f(x_n)=A$.

9. Pro limity spočtěte limitu, nebo ukažte že limita neexistuje. Pro řady vysetřete jejich absolutní konvergenci.

a) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n+1}{n-1}\right)^{\frac{1-\sqrt{n}}{1-n}}$ b) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\log(e^{2x}+x^3)}{\log(e^x+x^4)}$ c) $\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{\sqrt{n}}\log\frac{n}{n+1}$

d) $\lim\limits_{n\to\infty} n(\sqrt[n]{2}-1)$ e) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt[x]{1+x^2+3^x+x^x}}{2x}$ f) $\sum_{n=1}^\infty(\sqrt{n+2}-\sqrt{n})\operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{n}+n}$

10. Spočtěte limitu, nebo ukažte že limita neexistuje (jedná se o příklady ze zkouškových písemek na FSV):

a) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{(1+\cos x)^x+1}{2}\right)^{\frac{1}{x}}$ b) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\log(1+x^3+3^x+x^x)}{\log(1+x^3+3^x)\log(1+x^3)}$ c) $\lim\limits_{x\to-\frac{\pi}{2}}\dfrac{\operatorname{tg} x\cdot\log(\sin^2 x)}{\sqrt{1+\sin x}}$

d) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n^n+n^{n+1}+\ldots+n^{2n}}\left(1-\cos\frac{3}{n}\right)$ e) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+\cos x\cdot\log(\cos x)}-\sqrt{1+\log(\cos x)}}{\sqrt[3]{\operatorname{tg} x}-\sqrt[3]{\sin x}}\cdot\dfrac{\sqrt[3]{x}}{\sin^2 x}$

f) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{n^3+\sin n}-\sqrt{n^3+3n}}{\sqrt[4]{n^2+n}-\sqrt[4]{n^2+\operatorname{arctg} n}}$ g) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\left(\dfrac{\operatorname{tg} x+\operatorname{cotg} x}{2}\right)^{\operatorname{tg}^2 2x}$

11. Spočtěte následující limity posloupností, nebo ukažte že limita neexistuje (jedná se o příklady ze zkouškových písemek na MFF):

a) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(1+\frac{1}{n})^{120}-(1+\frac{2}{n})^{80}}{(1-\frac{1}{n})^{100}+(1+\frac{3}{n})^{100}-2}$ b) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\log(n^2+n+1)-\log(n^2+n)}{\sqrt{n^4+2}-\sqrt{n^4+1}}$

12. Vyšetřete konvergenci a absolutní konvergenci následujících řad (jedná se o příklady ze zkouškových písemek na MFF):

a) $\sum_{n=1}^\infty \arcsin(\sqrt{n^2+3}-\sqrt{n^2-1})\sqrt{\sin(\frac{1}{n})}$ b) $\sum_{n=1}^\infty \operatorname{arctg}(\frac{1}{n}-\frac{1}{\sqrt{n^2+1}})\frac{\sqrt[3]{n+1}-\sqrt[3]{n}}{(\sin(\frac{1}{n}))^{\frac{10}{3}}}$

c) $\sum_{n=2}^\infty \frac{1}{\log n}\operatorname{arctg}((-1)^n\frac{1}{\sqrt{n}})$ d) $\sum_{n=1}^\infty \frac{\operatorname{arccotg}(2n)}{\sqrt[3]{n+4}}$ e) $\sum_{n=1}^\infty \cos(\pi n)\arccos(\log(e-\frac{1}{n}))$ (zde AK nevyšetřujte)

13. Spočtěte limitu, nebo ukažte že limita neexistuje (jedná se o příklady ze zkouškových písemek na MFF):

a) $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\log(1+x^3+3^x+x^x)}{\log(1+x^3+3^x)\log(1+x^3)}$ b) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1^x+2^x+3^x}{3}\right)^{1/x}$ c) $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\arccos(e^{-x})}{\sqrt{x}}$ d) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{\sin 2x}-e^{\arcsin x}}{\operatorname{tg} x}$

VII. SPOJITOSTI A DERIVACE

1. Zjistěte, ve kterých bodech definičního oboru je funkce spojitá (pokud není v nějakém bodě spojitá, určete jestli je spojitá zleva a zprava).

a) $\max\{2x, x^2\}$ b) $[x] \cdot \log x$ c) $f(x) = \begin{cases} (\sin x)^{\cos x} & x \in (0, \pi), \\ 0 & x = 0, \\ 1 & x = \pi. \end{cases}$

2. Najděte $A \in \mathbb{R}$, aby pro každé $x \in (0, \infty)$ platil vztah

$$\left(\log(\cos^2 x + \sqrt{1 + \cos^4 x}) + \operatorname{arctg} x + \arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\right)\right)' = A\frac{\sin 2x}{\sqrt{1+\cos^4 x}}.$$

3. Spočtěte derivaci (resp. jednostranné derivace) následujících funkcí ve všech bodech, kde existuje.

a) $\arccos(\frac{1-x^2}{1+x^2})$ b) $x^2 \exp(-|x-1|)$ c) $\sqrt{1 - e^{-x^2}}$ d) $x \arcsin \sqrt{\frac{x}{x+1}} + \operatorname{arctg} \sqrt{x} - \sqrt{x}$ e) $\log \arccos x$

f) $f(x) = \begin{cases} (\sin x)^{\cos x} & x \in (0, \pi), \\ 0 & x = 0. \end{cases}$

4. Vyšetřete spojitost a najděte derivaci funkce $f(x) =$

Ze zkouškových písemek na FSV: a) $\max\{5x - 4, x^2\}$ b) $[x] \cdot \sqrt[3]{x^2 - 9}$ c) $|\cos 2x| \cdot (\operatorname{tg} x - 1)$

Ze zkouškových písemek na MFF: d) $f(x) = \begin{cases} x^2(\sin \frac{1}{x} + \cos \frac{1}{x}) & x \neq 0, \\ 0 & x = 0. \end{cases}$

e) $\cos x \cdot [\sin x]$ f) $(e + |x|)^x$

VIII. APLIKACE DERIVACÍ

1. Spočtěte limity (můžete používat l'Hospitalovo pravidlo)

a) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\operatorname{tg} x - x}{x - \sin x}$ b) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{3 \operatorname{tg} 4x - 12 \operatorname{tg} x}{3 \sin 4x - 12 \sin x}$ c) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{x \operatorname{cotg} x - 1}{x^2}$ d) $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{4}} \frac{\sqrt[3]{\operatorname{tg} x} - 1}{2 \sin^2 x - 1}$

e) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{(1+x)^{1/x} - e}{x}$ f) $\lim\limits_{x \to 1} \frac{x^x - x}{\ln x - x + 1}$ g) $\lim\limits_{x \to 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{e^x - 1}\right)$ h) $\lim\limits_{x \to 0} \left(\frac{\arcsin x}{x}\right)^{1/x^2}$

i) $\lim\limits_{x \to a} \frac{a^x - x^a}{x - a}$, $a > 0$

2. Nalezněte globální extrémy funkce $f(x) = x^3 - 3x + 2, \quad x \in [-3, 2]$

3. Nalezněte extrémy (lokální i globální) funkcí

a) $f(x) = \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 + 2x + 1}, \quad x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$ b) $g(x) = |x|e^{-|x-1|}, \quad x \in \mathbb{R}$

4. Dokažte následující nerovnosti: a) $\forall x > 0 : x - \frac{x^3}{6} < \sin x < x$ b) $\forall x > 0 : x^e \leq e^x$

5. Dokažte, že $\operatorname{arctg} x = \arcsin \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$

6. Vyšetřete průběh funkce $f(x) =$

Ze zkouškových písemek na FSV: a) $\left(3^{x+2|x|} - 9\right)^2$ b) $\operatorname{arctg} \frac{x^2}{x^2 - 6}$ c) $(x + \log 2) \cdot 2^{-\frac{5}{x}}$

Ze zkouškových písemek na MFF: d) $\frac{x^3}{\sqrt{|x^4 - 1|}}$ e) $|(1 - x^2)e^{-x}|$