I. ÚVOD DO MATEMATIKY

K důkazové technice

1. Dokažte nepřímo a sporem: je–li $n \in \mathbb{N}$ sudé, pak je i n^2 sudé **2.** Dokažte, že $\sqrt{2}$ je iracionální číslo
3. Pro $n \in \mathbb{N}$ je číslo $\sqrt{n}$ buď celé nebo již iracionální
4. (Bernoulli) Nechť $x \in \mathbb{R}$, $x \geq -1$, $n \in \mathbb{N}$. Pak platí Bernoulliova nerovnost

$$(1+x)^n \geq 1 + nx.$$

Dokažte matematickou indukcí. Indukcí s krokem „$n \to n+2$“ dále ukažte, že uvedená nerovnost platí i pro $x \geq -2$. Ukažte na příkladě, že pro $x < -2$ a obecné $n \in \mathbb{N}$ již Bernoulliova nerovnost neplatí.
5. (Cauchy) Nechť $a_1, a_2, \ldots, a_n$, $b_1, b_2, \ldots, b_n$ jsou reálná čísla. Potom platí

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right)^2 \leq \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2\right).$$

6.(AG nerovnost) Nechť $a_1, \ldots, a_n$ jsou nezáporná reálná čísla. Pak platí

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} a_i}{n} \geq \sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n} a_i}.$$

Ukažte, že rovnost v AG nerovnosti platí právě tehdy, když $a_1 = a_2 = \cdots = a_n$. Ukažte, že pro kladná reálná čísla $a_1, \ldots, a_n$ platí tzv. AGH nerovnost

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} a_i}{n} \geq \sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n} a_i} \geq \frac{n}{\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{a_i}}$$

přičemž i zde rovnosti platí právě tehdy, když $a_1 = a_2 = \cdots = a_n$.
7. Dokažte indukcí:

(i) $n! \leq \left(\frac{n+1}{2}\right)^n$ (*Hint: při důkazu použijte Bernoulliho nerovnost*)

(ii) $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{1}{2}n(n+1)$

(iii) $\sum_{k=1}^{n} k^3 = (1+2+\ldots+n)^2$

(iv) $\sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}, q \neq 1$

(v) $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(2k-1)(2k+1)} = \frac{n}{2n+1}$

Binární relace a zobrazení

8. Nerovnost mezi reálnými čísly „$\leq$“ tvoří binární relaci na $[0,1]$. Tuto relaci lze také graficky znázornit pomocí horního trojúhelníku ve čtverci $[0,1]^2$. **9.** Jakákoli výroková funkce $V(x,y)$ na $A \times B$ vytváří binární relaci $M = \{[x,y] \subset A \times B;\ V(x,y)\}$ a naopak. **10.** Inverzní relací k relaci „$\leq$“ na $[0,1]$ je relace „$\geq$“.
11. Nechť A je libovolná neprázdná množina. Pak relace *rovnost* $(=)$ je ekvivalence na A.
12. Nechť $p \in \mathbb{N}$. Pak relace *kongruence modulo* p definovaná předpisem

$$m \equiv n \pmod{p} \quad \Longleftrightarrow \quad |m-n| \text{ je dělitelné číslem } p,$$

je ekvivalence na $\mathbb{N}$. **13.** Relace menší nebo rovno než ($\leq$) je lineární uspořádání na $\mathbb{R}$.
14. Nechť A je množina všech funkcí z intervalu $[0,1]$ do $\mathbb{R}$ a nechť $\leq$ je relace definovaná předpisem

$$f \leq g \iff \forall\, x \in [0,1] : \ f(x) \leq g(x).$$

Pak $\leq$ tvoří na množině A částečné uspořádání, které není lineární.
15. Je-li X množina, pak relace

$$R = \{[A, B] \in \exp X \times \exp X; A \subset B\}$$

je částečné uspořádání na $\exp X$, které obecně není lineární.
16. Nechť A a B jsou množiny a nechť $f : A \to B$ je zobrazení. Pak

- f je prosté právě tehdy, když rovnice $f(x) = y$ má pro každé $y \in B$ nejvýše jedno řešení;
- f je „na" právě tehdy, když rovnice $f(x) = y$ má pro každé $y \in B$ alespoň jedno řešení;
- f je bijekce právě tehdy, když rovnice $f(x) = y$ má pro každé $y \in B$ právě jedno řešení.

17. Nechť $f : A \to C$ a $g : A \to B$ splňují $g(A) = B$. Najděte nutnou a postačující podmínku pro existenci zobrazení $h : B \to C$ splňujícího $f = h \circ g$. **18.** Nechť $A_n \subset \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}$, jsou množiny. Pak platí

$$\{z \in \mathbb{C}; \{n \in \mathbb{N}; z \notin A_n\} \text{ je konečná}\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k=n}^{\infty} A_k,$$
$$\{z \in \mathbb{C}; \{n \in \mathbb{N}; z \in A_n\} \text{ není konečná}\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k.$$

19. Nechť $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$. Rozhodněte o platnosti následujících tvrzení:

(i) Je-li $f(\mathbb{N})$ konečná, není f prosté.
(ii) Je-li $f(\mathbb{N})$ nekonečná, je f prosté.
(iii) Je-li $\mathbb{N} \setminus f(\mathbb{N}) = \emptyset$, je f prosté.
(iv) Je-li f prosté, je $\mathbb{N} \setminus f(\mathbb{N}) = \emptyset$.

20. Uvažujme zobrazení $f : X \to Y$ a množiny $A \subset X$, $B \subset X$. Dokažte následující rovnosti.

(i) $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$,
(ii) $f^{-1}(A \cup B) = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$,
(iii) $f^{-1}(A \cap B) = f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$,
(iv) $f^{-1}(A \setminus B) = f^{-1}(A) \setminus f^{-1}(B)$.

21. Uvažujme zobrazení $f : X \to Y$ a množiny $A \subset X$, $B \subset X$. Ukažte, že následující vztahy obecně neplatí.

(i) $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$,
(ii) $f(A \setminus B) = f(A) \setminus f(B)$.

22. Ukažte, že bez ohledu na pravdivostní hodnotu výroků A, B, C jsou následující výroky vždy pravdivé.

(i) $A \,\&\, (B \,\&\, C) \Leftrightarrow (A \,\&\, B) \,\&\, C$,
(ii) $A \,\&\, (B \vee C) \Leftrightarrow (A \,\&\, B) \vee (A \,\&\, C)$,
(iii) $A \vee (B \,\&\, C) \Leftrightarrow (A \vee B) \,\&\, (A \vee C)$,
(iv) $(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\neg B \Rightarrow \neg A)$,
(v) $\neg(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (A \,\&\, \neg B)$.

23. Ukažte, že skládání funcí je asociativní operace, ale není komutativní operace.

II. OPAKOVÁNÍ STŘEDOŠKOLSKÉ LÁTKY, VÝROKY

1. Řešte následující nerovnosti a rovnosti v $\mathbb{R}$:

a) $\frac{x-2}{2x-8} \geq 1$; b) $\frac{x+2}{x+3} > \frac{2x+3}{x+6}$; c) $\log_{\frac{1}{8}}(x^2-3x+3) \geq 0$; d) $\log(x^2+1) = 2\log(3-x)$;
e) $\sin 2x < \cos x$; f) $x \leq \left|\frac{x+2}{x-3}\right|$; g) $|x-|x+1|| \leq 2x$;
h) $|x-|x-1|| = 1-|x|$; i) $\frac{x^2+2}{x+7} < 2(x-7)$; j) $\log_7(49x^2) = 4\cdot(\log_7 x)^2$.

2. Dokažte:

a) Pro každé $a, b \in \mathbb{R}$: $||a|-|b|| \leq |a-b|$; b) Pro všechna $n \in \mathbb{N}$ platí $n \leq 2^n$;
c) Pro všechna $n \in \mathbb{N}$, $n \neq 3$, platí $n^2 \leq 2^n$.

3. Načrtněte graf funkce

a) $f(x) = 1-|\cos\frac{x}{2}|$; b) $g(x) = \frac{1}{2}+\cos(\frac{\pi}{2}+|x|)$; c) $h(x) = ||||x|-1|-1|-1|$.

4. Nechť M značí množinu všech mužů a Z množinu všech žen. Uvažujme následující výrokové formy:
$S(m,z)$: „Muž m je manželem ženy z.“;
$L_1(m,z)$: „Muž m miluje ženu z.“; $L_2(m,z)$: „Žena z miluje muže m.“.
Pomocí kvantifikátorů, logických spojek a forem S, L_1 a L_2 zapište následující výroky:
a) Každý ženatý muž miluje svou manželku. b) Každou ženu miluje nějaký muž.
c) Každá žena má nejvýš jednoho manžela.
d) Každý muž má nejvýš jednu manželku. (Říká tento výrok totéž, co c)?)
e) Existuje vdaná žena. f) Existuje ženatý muž. (Říká tento výrok totéž, co e)?)
g) Existují nevěrné manželky. (Manželku prohlásíme za nevěrnou, pokud miluje jiného muže než svého manžela.)
Následující výroky přeložte do češtiny.
h) $\exists m \in M \forall z \in Z(\neg S(m,z))$;
i) $\exists z \in Z \forall m \in M(L_1(m,z) \Rightarrow \neg L_2(m,z))$;
j) $\exists z \in Z \forall m \in M(L_2(m,z) \Rightarrow \neg L_1(m,z))$;
k) $\forall z \in Z((\exists m \in M : L_2(m,z)) \Rightarrow (\exists m \in M : L_1(m,z) \,\&\neg L_2(m,z))$.

5. Rozhodněte o správnosti následujících výroků a napište jejich negace.
a) $\forall x \in \mathbb{N}\ \exists y \in \mathbb{N}\ \forall z \in \mathbb{N}\,(z > x \Rightarrow y < z)$; b) $\exists y \in \mathbb{N}\ \forall x \in \mathbb{N}\ \forall z \in \mathbb{N}\ (z > x \Rightarrow y < z)$;
c) $\exists x \in \mathbb{N}\ \forall y \in \mathbb{N}\ \forall z \in \mathbb{N}\,(z > x \Rightarrow y < z)$; d) $\exists x \in \mathbb{N}\ \forall y \in \mathbb{N}\ \forall z \in \mathbb{N}\,(z < x \Rightarrow y > z)$;
e) $\forall x \in \mathbb{R}\ \forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall y \in \mathbb{R}\,(|y-x| < \delta \Rightarrow y < x + \frac{\varepsilon}{3})$.

6. Vyjádřete co nejjednodušeji:
a) $\forall \varepsilon > 0\ \forall y \in \mathbb{R} : |y-7| < 5 \Rightarrow |f(y)-15| < \varepsilon$;
b) $\forall x \in \mathbb{R}\ \exists \delta > 1 \forall y \in \mathbb{R}\ \forall n \in \mathbb{N} : |y-x| < \delta \Rightarrow |f(x)-f(y)| < \frac{1}{n}$.

III. AXIOMY TĚLES, USPOŘÁDANÝCH TĚLES, SUPREMA, INFIMA

1. Dokažte, že pro každé těleso $(T,+,\cdot,0,1)$ platí:

a) $\forall x,y,z \in T:\quad x+y = x+z \Rightarrow y = z$; b) Nechť $x \in T, x \neq 0$. Pak opačný prvek $(-x)$ a inverzní prvek $\frac{1}{x}$ jsou jednoznačně definovány. c) $\forall x \in T:\ x \cdot 0 = 0$; d) $-0 = 0$;
e) $\forall a \in \mathbb{R}:\ -(-a) = a$; f) $\forall a \in T:\ -a = (-1)\cdot a$; g) $\forall a,b \in T:\ (-a)b = -(ab) = a(-b)$;
h) $\forall x,y \in T:\ (-x)(-y) = xy$; i) $\forall a,b \in T:\ ab = 0 \Rightarrow (a = 0 \vee b = 0)$;

2. Dokažte, že pro každé uspořádané těleso $(T,+,\cdot,0,1)$ a pro $x,y \in T$ platí:

a) $0 < 1$; b) $0 < x \Rightarrow 0 < \frac{1}{x}$; c) $x < y \Rightarrow x < \frac{x+y}{2} < y$, kde $2 = 1+1$; d) $0 < x < y \Rightarrow 0 < \frac{1}{y} < \frac{1}{x}$;
e) $x \neq 0 \Rightarrow x \cdot x > 0$; f) $x < 0 < y \Rightarrow xy < 0$; g) $0 < x < 1 \Rightarrow x \cdot x < x$;

IV. LIMITY POSLOUPNOSTÍ

1. Určete, zda je posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ monotónní a (jednostranně) omezená:

a) $\frac{n^2-1}{n}$ b) n^{1-n} c) $\sin(\frac{n\pi}{4})$

2. Vypočtěte přímo z definice limity:

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n^2}$ b) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^2+n}{n^3+3}$ c) $\lim\limits_{n\to\infty} (-1)^n \dfrac{2n}{n^3+1} = 0$ d) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sin(n\frac{\pi}{7})}{n^2} = 0$

3. Dokažte, že posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ nemá vlastní limitu: a) $a_n = 2^{(-1)^n n}$ b) $a_n = (-1)^n\left(\frac{1}{10} - \frac{1}{n}\right)$

4. Spočtěte následující limity posloupností ($[\cdot]$ značí dolní celou část):

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2n^2+n-3}{n^3-1}$ b) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2n^3+6n}{n^3-7n+7}$

c) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2n^5+3n-2}{n^5-3n^3+1}$ d) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)$ e) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\sqrt[3]{n+11}-\sqrt[3]{n}\right)$

f) $\lim\limits_{n\to\infty} (-1)^n\sqrt{n}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})$ g) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n}{2^n}$ h) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2^n}{n!}$ i) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{3^n+n^5}{n^6+n!}$ j) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1+2+\cdots+n}{n^2}$

k) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{1+2+\cdots+n}{n+2} - \dfrac{n}{2}\right)$ l) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1^2+2^2+\cdots+n^2}{n^3}$ m) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1^3+2^3+\cdots+n^3}{n^4}$

n) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a}$, $(a \geq 0)$ o) $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k(k+1)}$ p) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{A^n+B^n+C^n}$, $(A,B,C>0)$

q) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sum\limits_{k=1}^{n}[kx]}{n^2}$, $x \in \mathbb{R}$ r) $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{\sqrt{n^2+k}}$ s) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n+[\sqrt[3]{n}]^3}{n-[\sqrt{n+9}]}$ t) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n!}$

V. ŘADY

1. Určete, zda konvergují následující řady:

a) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^n}{n!}$ b) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!}$ c) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{e^{nx}}{n}, x \in \mathbb{R}$ d) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{e^{nx}}{n^2}, x \in \mathbb{R}$ e) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{\log n}}$ f) $\sum_{k=1}^{\infty} (\frac{n-1}{n+1})^{n(n-1)}$

g) $\sum_{k=1}^{\infty} (\sqrt{n^2+1}-\sqrt{n^2-1})$ h) $\sum_{k=1}^{\infty} (\sqrt[3]{n^2+1}-\sqrt[3]{n^2-1})$ i) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2n^2+3n+4}{2n^4+3}$ j) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2n^2+3n+4}{2n^3}$

k) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{n^8}{3^n+5^n}$ l) $\sum_{k=1}^{\infty} \log(1+A^n), A \geq 1$ m) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{n^5}{5^n}$ n) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sqrt[9]{n^{10}}+\sqrt[10]{n^9}}{\sqrt[9]{n^{11}}+\sqrt[11]{n^9}}$

2. Za pomoci Raabeho kritéria (viz. níže) určete, zda konvergují následující řady:

Věta (Raabeovo kritérium). *Nechť $\sum_{k=1}^{\infty} a_n$ je řada s kladnými členy.*

(i) Je-li $\lim n(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1) > 1$, pak je $\sum_{k=1}^{\infty} a_n$ konvergentní.

(ii) Je-li $\lim n(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1) < 1$, pak je $\sum_{k=1}^{\infty} a_n$ divergentní.

a) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{n^k}, k \geq 2, k \in \mathbb{N}$ b) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n!}}{(2+\sqrt{1})\cdots(2+\sqrt{n})}$ c) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{4^n(n!)^2}{(2n+1)!}$

3. Určete, zda následující řady konvergují absolutně:

a) $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n\sqrt[n]{n}}$ b) $\sum_{k=1}^{\infty} \sin(n^2+3n)\frac{4^n+3^n}{5^n+2^n}$ c) $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\sqrt[9]{n^{10}}+\sqrt[10]{n^9}}{\sqrt[9]{n^{11}}+\sqrt[11]{n^9}}$

4. Vyšetřete konvergenci (absolutní i neabsolutní) následujících řad:

a) $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\sqrt[n]{n^9}}{\log(\log n)}$ b) $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{\sqrt{n}\log n}$ c) $\sum_{k=1}^{\infty} \cos(n^2)(\sqrt{n^6+n}-n^3)$ d) $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n}{n+1}\cos(\frac{1}{n})$

e) $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n}{n^2+1}\cos(\frac{1}{n})$

5. Vyšetřete konvergenci (absolutní i neabsolutní) následujících řad:

a) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin n}{n}$ b) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin n \cos(\frac{1}{n})}{n}$ c) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos n \sin(\frac{1}{n})}{n}$

d) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(n+\frac{1}{n})}{n}$ (Návod: použijte součtový vzorec pro sinus a výsledky příkladů b) a c))

6. Vyšetřete konvergenci následující řady (jedná se o příklad ze zkouškové písemky):
$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^n}{(n+3)(2+\frac{1}{3n})^n}$, $x \in [0,\infty)$

VI. LIMITA FUNKCÍ

1. Z definice limity funkce dokažte:
a) $\lim\limits_{x\to 0} x\sin(\frac{1}{x}) = 0$ b) $\lim_{x\to 0} \sin(\frac{1}{x})$ neexistuje

2. Spočtěte limitu, nebo ukažte že limita neexistuje (příklady na podíly polynomů):
a) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x^2-1}{2x^2-x-1}$ b) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x^2-1}{2x^2-x-1}$ c) $\lim\limits_{x\to 1} \frac{x^2-1}{2x^2-x-1}$ d) $\lim\limits_{x\to 1} \frac{x^2-1}{x^2-2x+1}$ e) $\lim\limits_{x\to 1} \frac{x^2+2x+1}{x^2-2x+1}$
f) $\lim\limits_{x\to 2} \frac{(x^2-x-2)^{20}}{(x^3-12x+16)^{10}}$ g) $\lim\limits_{x\to 2} \left(\frac{1}{x(x-2)^2} - \frac{1}{x^2-3x+2}\right)$ h) $\lim\limits_{x\to 1} \left(\frac{x+2}{x^2-5x+4} + \frac{x-4}{3(x^2-3x+2)}\right)$
i) $\lim\limits_{x\to 1} \frac{x^{100}-2x+1}{x^{50}-2x+1}$

3. Spočtěte limitu, nebo ukažte že limita neexistuje (příklady na výrazy s odmocninami):
a) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x^n}$, $n\in\mathbb{Z}$ b) $\lim\limits_{x\to 1} \frac{\sqrt[3]{x^2+7}-\sqrt[3]{x^3+7}}{(x-1)^n}$, $n\in\mathbb{Z}$ c) $\lim\limits_{x\to 8} \frac{\sqrt{9+2x}-5}{\sqrt[3]{x}-2}$
d) $\lim\limits_{x\to 3} \frac{\sqrt{x+13}-2\sqrt{1+x}}{x^2-9}$ e) $\lim\limits_{x\to a^+} \frac{\sqrt{x}-\sqrt{a}+\sqrt{x-a}}{\sqrt{x^2-a^2}}$ f) $\lim\limits_{x\to 1} \frac{(1-\sqrt{x})(1-\sqrt[3]{x})\cdots(1-\sqrt[n]{x})}{(1-x)^{n-1}}$, $n\in\mathbb{N}$

4. Spočtěte limitu, nebo ukažte že limita neexistuje (příklady na použití známých limit $\frac{\sin x}{x} \to 1$, $\frac{\log x}{x-1} \to 1$, $\frac{e^x-1}{x} \to 1$ a VOLSF):
a) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin 5x - \sin 3x}{\sin x}$ b) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2}$ (tuto limitu dále lze považovat za „známou“) c) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\log(\cos x)}{x^2}$
d) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\log(1+x)}{x}$ (tuto limitu dále lze považovat za „známou“) e) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^{\sin^2 x}-\cos x}{x^2}$ f) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{\sin^3 x}$
g) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{3}} \frac{\sin(x-\frac{\pi}{3})}{1-2\cos x}$ h) $\lim\limits_{x\to a} \frac{\sin x - \sin a}{x-a}$ i) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1+\sin x-\cos x}{1-\sin x-\cos x}$ j) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg} x - \sin x}{\sin^3 x}$
k) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sqrt{\cos x}-\sqrt[3]{\cos x}}{\sin^2 x}$ l) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+\operatorname{tg} x}-\sqrt{1+\sin x}}{x^3}$ m) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x^2}{\sqrt{1+x\sin x}-\sqrt{\cos x}}$

5. Spočtěte limitu, nebo ukažte že limita neexistuje:
a) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\frac{x+2}{2x+1}\right)^{x^2}$ b) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\frac{x^2+1}{x^2-2}\right)^{x^2}$ c) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\log(x^2-x+1)}{\log(x^{10}+x+1)}$ d) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}} \frac{\sin x - \cos x}{\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^2}$
e) $\lim\limits_{x\to 0} \left(1+x^2\right)^{\operatorname{cotg}^2 x}$ f) $\lim\limits_{x\to 0} \left(\frac{1+\operatorname{tg} x}{1+\sin x}\right)^{\frac{1}{\sin^2 x}}$ g) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\log(1+\sqrt{x}+\sqrt[3]{x})}{\log(1+\sqrt[3]{x}+\sqrt[4]{x})}$ h) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}} (\operatorname{tg} x)^{\operatorname{tg} 2x}$
i) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}} \frac{\sin x - \cos x}{\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^3}$ j) $\lim\limits_{x\to 0} \left(\frac{1+x\cdot 2^x}{1+x\cdot 3^x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$ k) $\lim\limits_{x\to\infty} \log(1+2^x)\cdot\log\left(1+\frac{3}{x}\right)$ l) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}} \operatorname{tg} 2x \cdot \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-x\right)$
m) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\arcsin x}{x}$ (tato limita je důležitá - jak výsledek, tak postup)
n) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\arcsin x}{\sin(\sin x)}$ o) $\lim\limits_{x\to 1^-} \frac{\arccos x}{(1-x)^\alpha}$ p) $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{\arccos\frac{1-x^2}{1+x^2}}{\sin x}$ q) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{(\cos x)^x - \sqrt{1+\sin^3 x}}{x^3}$

6. Spočtěte limitu, nebo ukažte že limita neexistuje (jedná se o příklady ze zkouškových písemek na FSV):
a) $\lim\limits_{x\to 0} \left(\frac{(1+\cos x)^x+1}{2}\right)^{\frac{1}{x}}$ b) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\log(1+x^3+3^x+x^x)}{\log(1+x^3+3^x)\log(1+x^3)}$ c) $\lim\limits_{x\to -\frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{tg} x\cdot\log(\sin^2 x)}{\sqrt{1+\sin x}}$

d) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^n + n^{n+1} + \ldots + n^{2n}}\,\left(1 - \cos\frac{3}{n}\right)$ e) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1+\cos x\cdot\log(\cos x)} - \sqrt{1+\log(\cos x)}}{\sqrt[3]{\operatorname{tg} x} - \sqrt[3]{\sin x}} \cdot \dfrac{\sqrt[3]{x}}{\sin^2 x}$

f) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt{n^3+\sin n} - \sqrt{n^3+3n}}{\sqrt[4]{n^2+n} - \sqrt[4]{n^2+\operatorname{arctg} n}}$ g) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}} \left(\dfrac{\operatorname{tg} x + \operatorname{cotg} x}{2}\right)^{\operatorname{tg}^2 2x}$

Věta (Heineova věta)**.** *Nechť $c \in \mathbb{R}^*$, $A \in \mathbb{R}^*$ a funkce f je definována na nějakém prstencovém okolí bodu c. Pak jsou následující dva výroky ekvivalentní.*

(i) Platí $\lim_{x\to c} f(x) = A$.

(ii) Pro každou posloupnost $\{x_n\}$ splňující $x_n \in D_f$, $x_n \neq c$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$ a $\lim_{n\to\infty} x_n = c$, platí $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = A$.

7. Spočtěte následující limity posloupností, nebo ukažte že limita neexistuje (jedná se o příklady ze zkouškových písemek na MFF):

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(1+\frac{1}{n})^{120} - (1+\frac{2}{n})^{80}}{(1-\frac{1}{n})^{100} + (1+\frac{3}{n})^{100} - 2}$ b) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\log(n^2+n+1) - \log(n^2+n)}{\sqrt{n^4+2} - \sqrt{n^4+1}}$

8. Vyšetřete konvergenci a absolutní konvergenci následujících řad (jedná se o příklady ze zkouškových písemek na MFF):

a) $\sum_{k=1}^{\infty} \arcsin(\sqrt{n^2+3} - \sqrt{n^2-1})\sqrt{\sin(\frac{1}{n})}$ b) $\sum_{k=1}^{\infty} \operatorname{arctg}(\frac{1}{n} + \frac{1}{n^2+1})\frac{\sqrt[3]{n+1} - \sqrt[3]{n}}{(\sin(\frac{1}{n}))^{\frac{10}{3}}}$

c) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\log n} \operatorname{arctg}((-1)^n \frac{1}{\sqrt{n}})$ (v řešení použijte známou limitu: $\lim_{x\to\infty} \frac{(\log x)^a}{x^b} = 0,\ a, b > 0$)

9. Spočtěte limitu, nebo ukažte že limita neexistuje (jedná se o příklady ze zkouškových písemek na MFF):

a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos(\sin x) - 1}{\log(\sqrt{1+x^2})}$ b) $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{1^x + 2^x + 3^x}{3}\right)^{1/x}$ c) $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\arccos(e^{-x})}{\sqrt{x}}$ d) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{\sin 2x} - e^{\arcsin x}}{\operatorname{tg} x}$