I. L'HOSPITALOVO PRAVIDLO A TAYLORŮV POLYNOM

1. Spočtěte limity (můžete používat l'Hospitalovo pravidlo)

a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{tg} x - x}{x - \sin x}$ b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{3\operatorname{tg} 4x - 12\operatorname{tg} x}{3\sin 4x - 12\sin x}$ c) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x\operatorname{cotg} x - 1}{x^2}$ d) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}} \dfrac{\sqrt[3]{\operatorname{tg} x} - 1}{2\sin^2 x - 1}$

e) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(1+x)^{1/x} - e}{x}$ f) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^x - x}{\ln x - x + 1}$ g) $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{e^x - 1}\right)$ h) $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{\arcsin x}{x}\right)^{1/x^2}$

i) $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{a^x - x^a}{x - a},\ a > 0$

Připomeňme si:

a) Pro $x \in \mathbb{R}$ platí: $\sin(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$, $\cos(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$, $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$.

b) Pro $x \in (-1, 1\rangle$: $\log(1+x) = \sum_{n=1}^{k} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n}$

c) Pro $x \in (-1,1)$ a $a \in \mathbb{R}$: $(1+x)^a = \sum_{n=0}^{k} \binom{a}{n} x^n$, kde $\binom{a}{n} = \frac{a\cdot(a-1)\cdot(a-2)\cdots(a-n+1)}{n!}$.

2. Najděte Taylorův polynom k-tého řádu v bodě 0 pro funkce:

a) $\operatorname{tg}(x),\ k=4$ b) $\cos(\sin x),\ k=5$ c) $\sin(\sin x),\ k=6$ d) $\sin(1-\cos x),\ k=3$ e) $\frac{1+x+x^2}{1-x+x^2},\ k=4$

f) $e^{2x-x^2},\ k=5$ g) $\frac{x}{e^x-1},\ k=4$ h) $\log(\cos x),\ k=6$

3. Odhadněte absolutní chybu aproximace daných funkcí na daných intervalech:

a) $\sin x \approx x - \frac{x^3}{6},\ x \in [-1/2, 1/2]$ b) $\sqrt{1+x} \approx 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8},\ x \in [0,1]$

4. Spočtěte $\sqrt{e}$ s přesností 10^{-2}

5. Spočtěte limity

a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos x - e^{-\frac{x^2}{2}}}{x^4}$ b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x \sin x - x(1+x)}{x^3}$ c) $\lim\limits_{x\to\infty} (\sqrt[6]{x^6 + x^5} - \sqrt[6]{x^6 - x^5})$

d) $\lim\limits_{x\to\infty} x^{3/2}(\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1} - 2\sqrt{x})$ e) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{a^x + a^{-x} - 2}{x^2}$ $(a > 0)$ f) $\lim\limits_{x\to 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\sin x}\right)$

g) $\lim\limits_{x\to\infty} (x - x^2 \log(1 + \frac{1}{x}))$ h) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{x}\left(\frac{1}{x} - \frac{\cos x}{\sin x}\right)$ i) $\lim\limits_{x\to\infty} ((x^3 - x^2 + \frac{x}{2})e^{\frac{1}{x}} - \sqrt{x^6+1})$

j) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1 - (\cos x)^{\sin x}}{x^3}$ k) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1 - 2x + x^3} - \sqrt[3]{1 - 3x + x^2} - \frac{x^2}{6}}{\sin x - x}$

6. Spočtěte limity (příklady ze zkouškových písemek na FSV):

a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin(e^{(x^2)} - 1) + 2\sin(\cos(x) - 1)}{\log(1 + x^4)}$ b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\log(1 + x\sin x) - \exp(x\sin x) + \cos(x\sin x)}{\sin^4 x}$

II. MOCNINNÉ ŘADY

1. Nalezněte poloměr konvergence následujících mocninných řad. Určete oblasti absolutní konvergence, neabsolutní konvergence a divergence.

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} z^n$ $(p \in \mathbb{R})$ b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n+(-2)^n}{n}(z+1)^n$ c) $\sum_{n=1}^{\infty}(1+\frac{1}{n})^{n^2} z^n$ d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a^{\sqrt{n}}} z^n$ $(a > 0)$

e) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3+(-1)^n)^n}{n} z^n$ f) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{a^n+b^n}$ $(a, b > 0)$ g) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{a^n}{n} + \frac{b^n}{n^2}\right) z^n$ $(a, b > 0)$ h) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left(1+2\cos\frac{\pi n}{4}\right)^n}{n} z^n$

i) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} z^{n^2}$

2. Sečtěte řady uvnitř kruhu konvergence:

a) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{4n+5}}{n!}$ b) $\sum_{n=1}^{\infty} nz^n$ c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n(n+1)}$ d) $\sum_{n=1}^{\infty} n^2 x^n$ e) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1} n^2 x^n$ f) $\sum_{n=1}^{\infty} n(n+2)x^n$

g) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1} \frac{x^{2n}}{n(2n-1)}$ h) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2-1}{3^n\, n!}\, x^n$ i) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n n x^{2n+1}}{(2n+1)!}$ j) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}$ k) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{4n}}{(4n)!}$

l) $\sum_{n=1}^{\infty}(n-1)(n+3)x^{2n}$

může se hodit: $\big((1-x)\log(1-x) - (1-x)\big)' = -\log(1-x)$; $\big(x \operatorname{arctg} x - \log(1+x^2)/2\big)' = \operatorname{arctg} x$

3. Vyjádřete následující funkce jako mocninnou řadu o středu 0:

a) e^{-z^2} b) $\operatorname{arctg} x$ c) $\sin^2 x$ d) $(1+x)\log(1+x)$ e) $\frac{z}{1+z-2z^2}$ f) $\operatorname{arctg}\left(\frac{2-2x}{1+4x}\right)$ g) $\frac{1}{(1-z)^2}$ h) $\log\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$

4. Rozviňte funkce $f(z) = \exp(z)$, $g(z) = z\exp(z)$, $h(z) = z^2\exp(z)$ v mocninné řady se středem v bodě z_0, kde a) $z_0 = 0$, b) $z_0 = 1$, c) $z_0 = -8$; a stanovte poloměr konvergence těchto řad.

5. Rozviňte funkce $f(z) = \sin(z)$, $g(z) = z\sin(z)$, $h(z) = z^2\sin(z)$ v mocninné řady se středem v bodě z_0, kde a) $z_0 = 0$, b) $z_0 = \pi/6$, c) $z_0 = 2$; a stanovte poloměr konvergence těchto řad.

III. HLEDÁNÍ PRIMITIVNÍ FUNKCE - ÚVOD

Vyjádřete primitivní funkce na maximálních intervalech existence

1. Příklady na integrování "přímo":
a) $\int x^9 + \frac{1}{x} - 5e^x + x^{-3} - \cos x \,\mathrm{d}x$ b) $\int 2e^{3x} - \sqrt[5]{5-x} \,\mathrm{d}x$ c) $\int \frac{x^2+3x+6}{x^4} \,\mathrm{d}x$ d) $\int x(1-x)^{10} \,\mathrm{d}x$

2. Příklady, kde se musí funkce "lepit":
a) $\int |x| \,\mathrm{d}x$ b) $\int |\cos x| \,\mathrm{d}x$ c) $\int \sqrt{x^6} \,\mathrm{d}x$ d) $\int \sin|2x-1| \,\mathrm{d}x$ e) $\int |\sin x + \cos x| \,\mathrm{d}x$
f) $\int \max\{x, x^2\} \,\mathrm{d}x$ g) $\int e^{-|x|} \,\mathrm{d}x$ h) $\int |2x+1| \,\mathrm{d}x$

3. Příklady na integrování pomocí substituce:
a) $\int \operatorname{tg} x \,\mathrm{d}x$ b) $\int \operatorname{cotg} x \,\mathrm{d}x$ c) $\int \frac{x^2}{\cos^2 x^3} \,\mathrm{d}x$ d) $\int \frac{x}{1+x^4} \,\mathrm{d}x$ e) $\int \frac{1}{x \log x} \,\mathrm{d}x$ f) $\int \frac{x}{\sqrt{x^2+5}} \,\mathrm{d}x$ g) $\int \frac{1}{x \log x \log(\log x)} \,\mathrm{d}x$

4. Další příklady k procvičení:
a) $\int \left(1 - \frac{1}{x^2}\right) \sqrt{x\sqrt{x}} \,\mathrm{d}x$ b) $\int \frac{\left(\sqrt{2x} - \sqrt[3]{3x}\right)^2}{x} \,\mathrm{d}x$ c) $\int (2^x + 3^x)^2 \,\mathrm{d}x$ d) $\int \frac{x^2}{1+x^2} \,\mathrm{d}x$ e) $\int \frac{1}{\sqrt{2-5x}} \,\mathrm{d}x$ f) $\int \frac{x^3}{x^8+1} \,\mathrm{d}x$
g) $\int \frac{1}{x^2} \sin(\frac{1}{x}) \,\mathrm{d}x$ h) $\int \cos^2 x \,\mathrm{d}x$ i) $\int \frac{2x}{2+2x^2+x^4} \,\mathrm{d}x$ j) $\int \frac{\sin x}{1+\sin^4 x} \cos x \,\mathrm{d}x$ k) $\int \arcsin \sin \frac{4x}{x^2+1} \,\mathrm{d}x$ (těžké)

5. Příklady na integrování "per partes":
a) $\int x^3 \sin x \,\mathrm{d}x$ b) $\int e^x \cos x \,\mathrm{d}x$ c) $\int \log x \,\mathrm{d}x$ d) $\int x^n e^x \,\mathrm{d}x$, $n \in \mathbb{N}$ e) $\int x \log x \,\mathrm{d}x$ f) $\int x e^x \cos x \,\mathrm{d}x$

6. Další příklady k procvičení:
a) $\int \frac{\sin x}{\sqrt{\cos^3 x}} \,\mathrm{d}x$ b) $\int \frac{x^2}{(8x^3+27)^{2/3}} \,\mathrm{d}x$ c) $\int \frac{\operatorname{arctg} x}{1+x^2} \,\mathrm{d}x$ d) $\int \frac{2^{2x}}{9^x - 4^x} \,\mathrm{d}x$ e) $\int \operatorname{arctg} x \,\mathrm{d}x$ f) $\int x^2 \sin(2x) \,\mathrm{d}x$
g) $\int \sqrt{x} \log^2 x \,\mathrm{d}x$ h) $\int x^2 e^{-2x} \,\mathrm{d}x$ i) $\int \left(\frac{\log x}{x}\right)^2 \,\mathrm{d}x$ j) $\int x^5 e^{x^3} \,\mathrm{d}x$ k) $\int e^{\sqrt{x}} \,\mathrm{d}x$ l) $\int x \sin\sqrt{x} \,\mathrm{d}x$

7. Příklady na integrování pomocí druhé věty o substituci:
a) $\int \sqrt{4-x^2} \,\mathrm{d}x$ b) $\int \frac{1}{(1-x^2)^{3/2}} \,\mathrm{d}x$ c) $\int \frac{1}{(x^2+a^2)^{3/2}} \,\mathrm{d}x$ $(a > 0)$
d) $\int \sqrt{\frac{x+a}{a-x}} \,\mathrm{d}x$ $(a > 0)$ e) $\int x\sqrt{\frac{x}{2a-x}} \,\mathrm{d}x$ $(a > 0)$

IV. HLEDÁNÍ PRIMITIVNÍ FUNKCE - POKRAČOVÁVNÍ

Vyjádřete primitivní funkce na maximálních intervalech existence

1. Příklady na "integrování racionálních funkcí":
a) $\int \frac{1}{(2x+3)(3x+2)(x+1)}\,\mathrm{d}x$ b) $\int \frac{5x^3+3x^2-x-1}{x^2+2x+1}\,\mathrm{d}x$ c) $\int \frac{x^2+1}{x^2-1}\,\mathrm{d}x$ d) $\int \frac{1}{x^4+1}\,\mathrm{d}x$ e) $\int \frac{x^2+3x-2}{(x-1)(x^2+x+1)^2}\,\mathrm{d}x$
f) $\int \frac{x^5+x^4+x^3+x^2+x+1}{x^3-3x^2+3x-1}\,\mathrm{d}x$

2. a) $\int \frac{1}{1+\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$ b) $\int \frac{1-\sqrt{x+1}}{1+\sqrt[3]{x+1}}\,\mathrm{d}x$ c) $\int \frac{x\sqrt[3]{2+x}}{x+\sqrt[3]{2+x}}\,\mathrm{d}x$ d) $\int \frac{1}{(1+e^x)^2}\,\mathrm{d}x$ e) $\int \frac{1}{e^{2x}+e^x-2}\,\mathrm{d}x$ f) $\int \frac{1}{1+e^{x/2}+e^{x/3}+e^{x/6}}\,\mathrm{d}x$
g) $\int \frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{x-1}}{\sqrt{1+x}+\sqrt{x-1}}$

3. a) $\int \frac{1}{\sin x+\operatorname{tg} x}\,\mathrm{d}x$ b) $\int \frac{\operatorname{tg}^2 x+1}{\sin^2 x+\sin x\cos x}\,\mathrm{d}x$ c) $\int \frac{\sin^3 x+\sin x}{\cos^3 x+\cos x}\,\mathrm{d}x$ d) $\int \frac{1}{\cos^2 x(4\sin^2 x-1)}\,\mathrm{d}x$ e) $\int \frac{1}{(2+\cos x)\sin x}\,\mathrm{d}x$
f) $\int \frac{\sin^2 x}{1+\sin^2 x}\,\mathrm{d}x$ g) $\int \frac{\sin x}{\sin^3 x+\cos^3 x}\,\mathrm{d}x$

4. a) $\int \frac{1}{5+\cos x}\,\mathrm{d}x$ b) $\int \frac{\sin x\cos x}{1+\sin^4 x}\,\mathrm{d}x$ c) $\int \frac{1}{(\sin^2 x+2\cos^2 x)^2}\,\mathrm{d}x$ d) $\int \frac{1}{2\sin x-\cos x+5}\,\mathrm{d}x$
e) $\int \sqrt{x^2+a^2}\,\mathrm{d}x$ $(a>0)$ f) $\int \sqrt{x^2-a^2}\,\mathrm{d}x$ $(a>0)$

5. a) $\int \frac{x^2}{\sqrt{x^2-2}}\,\mathrm{d}x$ b) $\int \frac{x^2}{\sqrt{x^2+a^2}}\,\mathrm{d}x$ $(a>0)$ c) $\int \frac{1}{1+\sqrt{x^2+2x+2}}\,\mathrm{d}x$ d) $\int \frac{1}{(x-1)\sqrt{x^2-3x+2}}\,\mathrm{d}x$

6. Převeďte "$\int \sqrt{x^2-3x+1}\,\mathrm{d}x$" na integrál z racionální funkce pomocí následujících substitucí:
a) $t=\sqrt{x^2-3x+1}-x$ b) $t=\sqrt{x^2-3x+1}+x$ c) "$t=\sqrt{\frac{x-x_1}{x-x_2}}$"

7. BONUS - příklady ze zkouškových písemek na FSV:
a) $\int \frac{2x}{(2x+3)(\sqrt{2x+3}+\sqrt[3]{2x+3})}\,\mathrm{d}x$ b) $\int \frac{\sin^3 x}{\cos x(\sin^2 x+1)}\,\mathrm{d}x$ c) $\int \frac{1}{(\sqrt{x^2+x+7}-x)^3+\sqrt{x^2+x+7}-x}\,\mathrm{d}x$ d) $\int \frac{\cos x-1}{\sin x-1}\,\mathrm{d}x$

8. BONUS - příklady ze zkouškových písemek na MFF:
a) $\int \frac{1}{(e^{2x}+e^x-2)(e^{2x}+1)}\,\mathrm{d}x$ b) $\int \frac{\sin x}{\sin x+\cos x-3}\,\mathrm{d}x$ c) $\int \frac{1}{x+\sqrt{x^2+x}}\,\mathrm{d}x$ d) $\int \frac{2\log^2(x)+3}{x\log^4(x)-x\log^2(x)-6x}\,\mathrm{d}x$

V. NEWTONŮV INTEGRÁL

Vypočtěte následující integrály

1. a) $\int_0^2 |1-x|\,\mathrm{d}x$ b) $\int_0^{\log 2} xe^{-x}\,\mathrm{d}x$ c) $\int_0^{2\pi} x^2\cos x\,\mathrm{d}x$ d) $\int_{\frac{1}{e}}^{e} |\log x|\,\mathrm{d}x$ e) $\int_0^{100\pi} \sqrt{1-\cos 2x}\,\mathrm{d}x$
f) $\int_0^{\log 2} \sqrt{e^x-1}\,\mathrm{d}x$ g) $\int_0^a x^2\sqrt{a^2-x^2}\,\mathrm{d}x$ h) $\int_0^{2\pi} \frac{1}{1+\varepsilon\cos x}\,\mathrm{d}x$, $\varepsilon\in[0,1)$ i) $\int_{-1}^{1} \frac{1}{a^2\sin^2 x+b^2\cos^2 x}\,\mathrm{d}x$, $ab\neq 0$
j) $\int_{-1}^{1} \frac{x}{x^2+x+1}\,\mathrm{d}x$ k) $\int_0^{2\pi} \frac{1}{\sin^4 x+\cos^4 x}\,\mathrm{d}x$

2. a) $\int_0^{\infty} \frac{1}{x^2+3x+2}\,\mathrm{d}x$ b) $\int_1^3 \frac{1}{x\sqrt{-x^2+4x-3}}\,\mathrm{d}x$ c) $\int_{-1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{(x+1)^3}}\,\mathrm{d}x$ d) $\int_0^{5\pi} \frac{1}{\sin^2 x+2\cos^2 x}\,\mathrm{d}x$
e) $\int_0^{6\pi} x\frac{\sin(x^2)}{2+\sin(x^2)}\,\mathrm{d}x$

3. Další poučné příklady jsou např. na stránce doc. Kalendy zde (série IX):
`http://www.karlin.mff.cuni.cz/~kalenda/data/ma215-cv.pdf`

VII. EXISTENCE NEWTONOVA INTEGRÁLU

1. Vyšetřete existenci následujících Newtonových integrálů

a) $\int_0^1 \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{1-x^4}}\,\mathrm{d}x$ b) $\int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt[3]{(1-x^2)^5}}\,\mathrm{d}x$ c) $\int_0^1 \frac{1}{e^{\sqrt{x}}-1}\,\mathrm{d}x$ d) $\int_0^1 \frac{\sqrt{x}}{e^{\sin x}-1}\,\mathrm{d}x$ e) $\int_0^1 \frac{1}{e^x-\cos x}\,\mathrm{d}x$ f) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\log\sin x}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$

g) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sin^p x\cos^q x}\,\mathrm{d}x$ h) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sin^q x(1-\sin x)^p}\,\mathrm{d}x$ i) $\int_0^{\infty} \frac{1}{\sqrt{x}\log(1+e^x)}\,\mathrm{d}x$ j) $\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}\,\mathrm{d}x$ k) $\int_0^{\infty} x^p e^{-\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$

2. Vyšetřete existenci následujících Newtonových integrálů (všechny parametry jsou reálné)

a) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1-\cos x}{x^m}\,\mathrm{d}x$ b) $\int_1^{\infty} x^k\frac{x-\sin x}{x+\sin x}\,\mathrm{d}x$ c) $\int_0^{\infty} x^{\alpha}\operatorname{arctg}^{\beta} x\,\mathrm{d}x$ d) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\operatorname{tg} x)^{\alpha}\,\mathrm{d}x$

e) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^{\alpha}\left(\frac{\pi}{2}-x\right)^{\beta}\operatorname{tg}^{\gamma} x\,\mathrm{d}x$ f) $\int_2^{\infty} \frac{1}{x^p\ln^q x}\,\mathrm{d}x$

3. Pomocí B-C podmínky ukažte, že následující Newtonovy integrály neexistují:

a) $\int_1^{\infty} \frac{\sin x}{x^{\alpha}}\,\mathrm{d}x$ $(\alpha\le 0)$ b) $\int_1^{\infty} \frac{|\sin x|}{x}\,\mathrm{d}x$ c) $\int_1^{\infty} \frac{|\cos x|}{x}\,\mathrm{d}x$ d) $\int_{\pi}^{\infty} \frac{\sin^2 x}{x}\,\mathrm{d}x$

4. Pomocí metod "per partes" a "substituce" rozhodněte o existenci následujících Newtonových integrálů:

a) $\int_1^{\infty} \frac{\sin x}{x^{\alpha}}\,\mathrm{d}x$ $(\alpha\in(0,1])$ b) $\int_0^{\infty} \sin(x^2)\,\mathrm{d}x$

5. Vyšetřete existenci následujících Newtonových integrálů:

a) $\int_0^{\infty} 2x\cos\left(x^4\right)\,\mathrm{d}x$ b) $\int_0^{\infty} \frac{\sqrt{x}\cos x}{x+8}\,\mathrm{d}x$ c) $\int_0^{\infty} \frac{\sin^2 x}{x^{\alpha}}\,\mathrm{d}x$ d) $\int_1^{\infty} \frac{\sin x}{x}\frac{x^2}{x^2+1}\operatorname{arctg} x\,\mathrm{d}x$ e) $\int_0^{\infty} \frac{\log(1+x)}{x}\cos x\,\mathrm{d}x$

f) $\int_0^{\infty} \frac{\sin\left(\frac{1}{x}\right)\operatorname{arctg} x}{x}\,\mathrm{d}x$ g) $\int_0^{\infty} \frac{\sin\left(\frac{1}{x}+x\right)}{x^a}\,\mathrm{d}x$, $(a\in\mathbb{R})$

6. BONUS - příklady ze zkouškových písemek na MFF:

a) $\int_0^{\infty} \left(1+\frac{1}{x}\right)^x\frac{\sin(\sqrt{x})}{x}\,\mathrm{d}x$ U tohoto příkladu můžete bez ověřování použít informaci, že existuje okolí nekonečna, na kterém je funkce $(1+1/x)^x$ rostoucí.

b) $\int_1^{\infty} \frac{(x^3-1)(\log x)^{\alpha}}{(2+x^2)^2}\,\mathrm{d}x$ $(\alpha\in\mathbb{R})$ c) $\int_0^{\infty} \cos(x^{\alpha}+1)\,\mathrm{d}x$

VIII. METRICKÉ PROSTORY

1. Ověřte, zda následující formule definují metriku na $\mathbb{R}$:
a) $\rho(x,y) = |x^3 - y^3|$ b) $\rho(x,y) = |x^2 - y^2|$ c) $\rho(x,y) = (x-y)^2$

2. Ať ρ_1, ρ_2 jsou metriky na množině P. Musí být i funkce ρ definovaná níže metrikou na P?
a) $\rho = \rho_1 + \rho_2$ b) $\rho = \max\{\rho_1, \rho_2\}$ c) $\rho = \min\{\rho_1, \rho_2\}$ d) $\rho = \max\{\rho_1, 1\}$ e) $\rho = \min\{\rho_1, 1\}$

3. Na množině $\mathcal{P} = \{A \subset \mathbb{N} : A \text{ je konečná}\}$ definujme $\rho(A,B) = |(A \setminus B) \cup (B \setminus A)|$ pro $A, B \in \mathcal{P}$. Je ρ metrika?

4. Na prostoru $\mathcal{C}([0,1])$ uvažujme supremovou metriku, tj. $\rho_s(f,g) = \max\{|f(t) - g(t)| : t \in [0,1]\}$.
a) Spočítejte $\rho_s(x, x^2)$.
b) Pro $n \in \mathbb{N}$ a $x \in [0,1]$ definujme $f_n(x) = \frac{\sin(nx+3)}{\sqrt{n+1}}$ a $g_n(x) = \frac{nx}{1+n^2x^2}$. Je posloupnost funkcí $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ konvergentní v metrice ρ_s k funkci $f(x) = 0$, $x \in [0,1]$? Platí analogické tvrzení pro posloupnost $(g_n)_{n=1}^{\infty}$?

5. Na prostoru $\mathcal{C}([0,1])$ uvažujme integrální metriku, tj. $\rho_i(f,g) = \int_0^1 |f(x) - g(x)|\,\mathrm{d}x$.
a) Spočítejte $\rho_i(x, x^2)$. b) Pro jaké $a \in (0,1)$ je vzdálenost $\rho_i(ax, x^2)$ nejmenší možná?

6. Uvažujme na $\mathbb{R}^2$ libovolnou metriku ρ. Která z následujících tvrzení jsou pravdivá? Která jsou pravdivá, pokud $\rho(x,y) = \|x - y\|$ pro nějakou normu na $\mathbb{R}^2$?
a) $5U(0,1) = U(0,5)$ (0 značí nulový vektor, $5A$ definujeme jako mnozinu $\{5a : a \in A\}$ pro $A \subset \mathbb{R}^2$)
b) $5U(x,1) = x + U(0,5)$, $x \in \mathbb{R}^2$

7. Ať P je metrický prostor, $x \neq y$ jsou dva body z P. Dokažte:
a) $\{x\}$ je uzavřená množina. b) Existují disjunktní otevřené množiny U, V že $x \in U$ a $y \in V$.

8. Ať (P, ρ) je metrický prostor, $f : [0,\infty) \to [0,\infty)$ je funkce splňující

(i) $f(x) = 0 \leftrightarrow x = 0$

(ii) $r \leq s + t \to f(r) \leq f(s) + f(t)$

Položme $\sigma(x,y) = f(\rho(x,y))$. Dokažte, že σ je potom metrika na P.

Pomocí tohoto tvrzení dokažte, že $\sigma(x,y) = \frac{\rho(x,y)}{1+\rho(x,y)}$ je metrika na P.

9. Řekneme, že ρ je *pseudometrika* na P, pokud pro každé $x, y, z \in P$ platí
$$\rho(x,x) = 0,\ \rho(x,y) = \rho(y,x),\ \rho(x,z) \leq \rho(x,y) + \rho(y,z).$$

Nechť na množině P máme posloupnost pseudometrik ρ_n, $n \in \mathbb{N}$ splňující

$$\forall x, y \in P,\ x \neq y\ \ \exists n \in \mathbb{N} : \quad \rho_n(x,y) \neq 0.$$

Dokažte, že potom $\rho(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \min\{\rho_n(x,y), 1\}$ definuje metriku na P.

Toto tvrzení aplikujte na důkaz toho, že pokud na $\mathcal{C}(\mathbb{R})$ definuji $\rho_n(f,g) = \sup\{|f(x) - g(x)| : x \in [-n,n]\}$, pak $\rho(f,g) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \min\{\rho_n(f,g), 1\}$ je metrika na $\mathcal{C}(\mathbb{R})$.

10. Rozhodněte, zda následující množiny jsou otevřené (resp. uzavřené). Zjistěte jejich vnitřek, uzávěr a hranici.
a) $\mathbb{N}$ b) $\mathbb{Q}$ c) $\{\frac{1}{n}:\ n \in \mathbb{N}\}$ d) $\{[x,y] \in \mathbb{R}^2:\ x > 0,\ y \leq 0\}$ e) $\{[x,y] \in \mathbb{R}^2:\ |x+y| > x+y\}$
f) $\{[x,y] \in \mathbb{R}^2:\ |x-y| = x-y\}$ g) $\{[x,y] \in \mathbb{R}^2:\ x^2+y^2+2xy = 5\}$
h) $\{[x,y,z] \in \mathbb{R}^3:\ x \geq 0, y > 0, x+y = 2, z \leq 0\}$ i) $\{f \in \mathcal{C}[0,1]:\ f(\frac{1}{2}) = 2\}$
j) $\{f \in \mathcal{C}[0,1]:\ f(\frac{1}{2}) \in (0,2)\}$ k) $\{f \in \mathcal{C}[0,1]:\ \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = 0\}$

11. Platí v metrických prostorech následující rovnosti? Platí alespoň jedna inkluze?
a) $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cap \overline{B}$ b) $\mathrm{Int}(A \setminus B) = \mathrm{Int}(A) \setminus \mathrm{Int}(B)$ c) $\partial A = \overline{A} \setminus A$ (uvažujte A otevřenou)

12. Dokažte následující ekvivalence pro uzavřenou množinu A v metrickém prostoru P:

$$\mathrm{Int}(A) = \emptyset \leftrightarrow \overline{P \setminus A} = P,$$

$$\mathrm{dist}(x,A) = 0 \leftrightarrow x \in A \qquad \text{(platí toto tvrzení i když } A \text{ není uzavřená?)}$$

13. Ať $A \subset P$ je podmnožina metrického prostoru (P,ρ). Dokažte:
a) $\mathrm{Int}(A) = \bigcup\{U \subset A:\ U \text{je otevřená}\}$ b) $\overline{A} = \bigcap\{F \supset A:\ F \text{ je uzavřená}\}$

IX. FUNKCE VÍCE PROMĚNNÝCH - LIMITY, DERIVACE

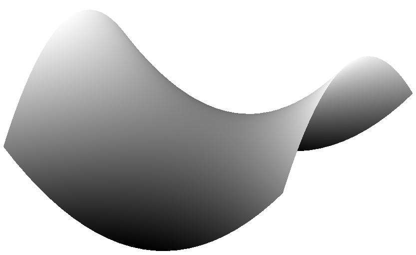
1. Lze následující funkce spojitě rozšířit na $\mathbb{R}^2$?

a) $\frac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2+1}-1}$ b) $\frac{\sqrt{x^2y^2+1}-1}{x^2+y^2}$ c) $\frac{\sin(x^3+y^3)}{x^2+y^2}$ d) $\frac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2}$ e) $\frac{x^3-y^3}{x-y}$

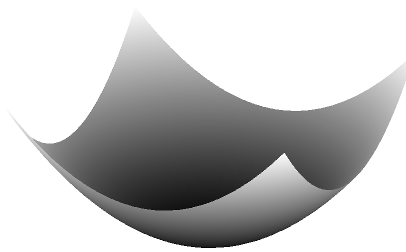
f) $(x+y)\sin\frac{1}{x}\sin\frac{1}{y}$ g) $\frac{2xy}{x^2+y^2}$ h) $\frac{x+y}{\sqrt{x^2+y^2}}$ i) $\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$ j) $(1+x^2y^2)^{\frac{1}{x^2+y^2}}$ k) $(x^2+y^2)^{x^2y^2}$

2. Přiřaďte grafy funkcí k předpisům:

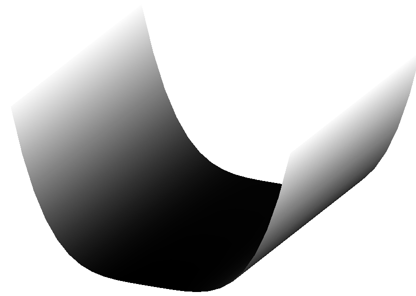
a)



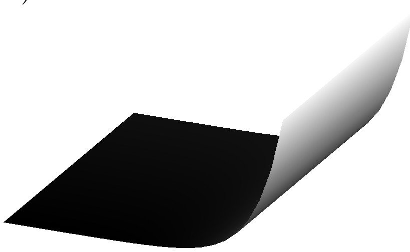
b)



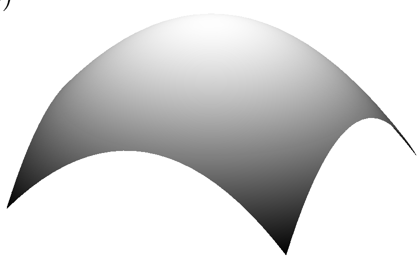
c)



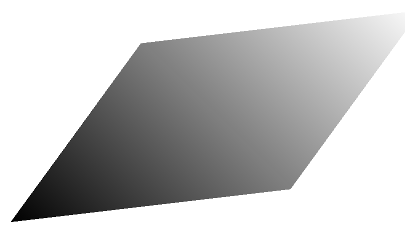
d)



e)



f)



i) x^2+y^2 ii) $exp(x)+y$ iii) $-x^2-y^2$ iv) $x+y$ v) x^2-y^2 vi) x^4+y

3. Určete a nakreslete definiční obor a vrstevnice funkcí:

a) $f(x,y)=\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2-1}}$ b) $f(x,y)=\sqrt{(x^2+y^2-1)(4-x^2-y^2)}$ c) $f(x,y)=\sqrt{1-(x^2+y)^2}$ d) $f(x,y)=\sqrt{\sin(x^2+y^2)}$

4. Spočtěte parciální derivace funkcí všude, kde existují

a) x^my^n b) e^{xy} c) $xy+yz+zx$ d) $|x|\cdot|y|$ e) $|y+\cos x|$ f) $|\sin y-\sin x|$ g) $|\cos y-\sin x|$ h) $\left(\frac{x}{y}\right)^z$

i) $x^{\frac{y}{z}}$ j) $\sin(x^y)$ k) $f(x,y)=e^{\frac{-\pi}{x^2+3xy+3y^2}}$ pro $(x,y)\neq 0$, $f(0,0)=(0,0)$ l) $\sqrt{x+y^2}$

5. Určete a nakreslete definiční obor a vyšetřete parciální derivace funkcí (ze zkouškových písemek na FSV)

a) $\sqrt{e^{xy}-e}$ b) $\log\frac{1-|x|}{1-|y|}$ c) $\sqrt{e^{x^2+y^2}-e^4}$ d) $\sqrt{x^2-y^2}$ e) $\arcsin\frac{y^2+7}{x+5}$ f) $\log\frac{x^2+y+1}{1-\sqrt{x}}$

6. Mají následující funkce totální diferenciál v bodě $[0,0]$? (pokud v tomto bodě funkce není definována, spojitě ji dodefinujte)

a) $\sqrt{x^2+y^2}$ b) $\sqrt[3]{x+y^2}$ c) $|xy|$ d) $\sqrt[3]{x^3+y^3}$ e) $(x^2+y^2)\sin\frac{1}{x^2+y^2}$ f) $e^{-\frac{1}{x^2+y^2}}$

7. Vyšetřete, ve kterých bodech mají následující funkce totální diferenciál a spočtěte jej

a) $f(x,y)=\frac{x^5-y^5}{x^4+y^4}$ pro $[x,y]\neq[0,0]$, $f(0,0)=0$ b) $\max\{x^3,y^3\}$