VÝSLEDKY

I. TAYLORŮV POLYNOM

1. a) $x+\frac{1}{3}x^3$ b) $1-\frac{1}{2}x^2+\frac{5}{24}x^4$ c) $x-\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{10}x^5$ d) $\frac{x^2}{2}$ e) $1+2x+2x^2-2x^4$ f) $1+2x+x^2-\frac{2}{3}x^3-\frac{5}{6}x^4-\frac{1}{15}x^5$ g) $1-\frac{1}{2}x+\frac{1}{12}x^2-\frac{1}{720}x^4$ h) $-\frac{x^2}{2}-\frac{1}{12}x^4-\frac{1}{45}x^6$

2. a) $-\frac{1}{12}$ b) $\frac{1}{3}$ c) $\frac{1}{3}$ d) -$\frac{1}{4}$ e) $\log^2 a$ f) 0 g) $\frac{1}{2}$ h) $\frac{1}{3}$ i) $\frac{1}{6}$ j) $\frac{1}{2}$ k) -6

3. a) $\frac{7}{12}$ b) $-\frac{3}{2}$

4. a) AK (absolutně konverguje) b) D (diverguje) c) D d) AK e) D f) AK g) AK

II. MOCNINNÉ ŘADY

1. a) R=1; pokud $p>1$ pak AK pro $|x|\le 1$ a D jinak; pokud $p\in(0,1]$ pak AK pro $|x|<1$, K pro $x=-1$ a D pro $x=1$; pokud $p\le 0$, pak AK pro $|x|<1$ a D jinak
b) R=1/3, AK pro $|x+1|<R$, K pro $x=-4/3$, D pro $x=-2/3$
c) R=$\frac{1}{e}$, AK pro $|x|<R$, jinak D d) R=1, pokud $a>1$ pak AK pro $|x|\le R$ a jinak D, pokud $a\le 1$ pak AK pro $|x|<R$ a jinak D e) $R=1/4$, AK pro $|x|<R$, jinak D f) R=$\max\{a,b\}$, AK pro $|x|<R$, jinak D g) R=$\frac{1}{\max\{a,b\}}$, AK pro $|x|<R$, D pro $|x|>R$; pokud $b>a$ pak AK pro $|x|=R$; pokud $a\ge b$ pak K pro $x=-1/a$ a D pro $x=1/a$ h) R=1/3, AK pro $|x|<R$, jinak D i) R=1, AK pro $|x|\le R$, jinak D

2. a) $f(x)=\sum_{n=0}^\infty x^n,\ g(x)=\sum_{n=0}^\infty(n+1)x^n,\ h(x)=\sum_{n=0}^\infty nx^n$, poloměr konvergence 1. b) $f(x)=\sum_{n=0}^\infty\frac{1}{2^{n+1}}(x+1)^n$, $g(x)=\sum_{n=0}^\infty\frac{n+1}{2^{n+2}}(x+1)^n$, $h(x)=-\frac{1}{4}+\sum_{n=1}^\infty\left(\frac{n}{2^{n+1}}-\frac{n+1}{2^{n+2}}\right)(x+1)^n$, poloměr konvergence 2. c) $f(x)=\sum_{n=0}^\infty\frac{(-1)^{n+1}}{6^{n+1}}(x-7)^n$, $g(x)=\sum_{n=0}^\infty\frac{(n+1)(-1)^n}{6^{n+2}}(x-7)^n$, $h(x)=\frac{7}{36}+\sum_{n=1}^\infty\left(\frac{7(n+1)(-1)^n}{6^{n+2}}+\frac{n(-1)^{n+1}}{6^{n+1}}\right)(x-7)^n$, poloměr konvergence 6.

3. Poloměr konvergence je vždy $+\infty$. a) $f(x)=\sum_{n=0}^\infty\frac{x^n}{n!}$, $g(x)=\sum_{n=0}^\infty\frac{x^{n+1}}{n!}$, $h(x)=\sum_{n=0}^\infty\frac{x^{n+2}}{n!}$ b) $f(x)=\sum_{n=0}^\infty\frac{e}{n!}(x-1)^n,\ g(x)=(x-1)f(x)+f(x)=e+\sum_{n=1}^\infty e\left(\frac{1}{(n-1)!}+\frac{1}{n!}\right)(x-1)^n,\ h(x)=(x-1)^2f(x)+2(x-1)f(x)+f(x)=e+3e(x-1)+\sum_{n=2}^\infty e\left(\frac{1}{(n-2)!}+\frac{2}{(n-1)!}+\frac{1}{n!}\right)(x-1)^n$ c) $f(x)=\sum_{n=0}^\infty\frac{(x+8)^n}{e^8 n!}$, $g(x)=(x+8)f(x)-8f(x)=-\frac{8}{e^8}+\sum_{n=1}^\infty\frac{1}{e^8}\left(\frac{1}{(n-1)!}-\frac{8}{n!}\right)(x+8)^n,\ h(x)=(x+8)g(x)-8g(x)=\frac{64}{e^8}+\frac{48}{e^8}(x+8)+\sum_{n=2}^\infty\frac{1}{e^8}\left(\frac{1}{(n-2)!}-\frac{16}{(n-1)!}+\frac{64}{n!}\right)(x+8)^n$

4. Poloměr konvergence je vždy $+\infty$. a) $f(x)=\sum_{n=0}^\infty(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!},\ g(x)=\sum_{n=0}^\infty(-1)^n\frac{x^{2n+2}}{(2n+1)!},\ h(x)=\sum_{n=0}^\infty(-1)^n\frac{x^{2n+3}}{(2n+1)!}$
b) $\sin x=\sin(x-\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{6})=\sin(x-\frac{\pi}{6})\cos(\frac{\pi}{6})+\cos(x-\frac{\pi}{6})\sin(\frac{\pi}{6})=\frac{\sqrt{3}}{2}\sum_{n=0}^\infty(-1)^n\frac{(x-\frac{\pi}{6})^{2n+1}}{(2n+1)!}+\frac{1}{2}\sum_{n=0}^\infty(-1)^n\frac{(x-\frac{\pi}{6})^{2n}}{(2n)!}$, $g(x)=(x-\frac{\pi}{6})f(x)+\frac{\pi}{6}f(x)=\ldots$, $h(x)=(x-\frac{\pi}{6})g(x)+\frac{\pi}{6}g(x)=\ldots$ (nebo take $h(x)=(x-\frac{\pi}{6})^2f(x)+\frac{\pi}{3}(x-\frac{\pi}{6})f(x)+\frac{\pi^2}{36}f(x)$)
c) $\sin x=\sin(x-2)\cos(2)+\cos(x-2)\sin(2)=\cos 2\sum_{n=0}^\infty(-1)^n\frac{(x-2)^{2n+1}}{(2n+1)!}+\sin 2\sum_{n=0}^\infty(-1)^n\frac{(x-2)^{2n}}{(2n)!}$, $g(x)=(x-2)f(x)+2f(x)=\ldots$, $h(x)=(x-2)g(x)+2g(x)=\ldots$ (nebo take $h(x)=(x-2)^2f(x)+4(x-2)f(x)+4f(x)$)

5. a) $\sum_{n=0}^\infty(-1)^n\frac{x^{2n}}{n!},\ x\in\mathbb{R}$ b) $\sum_{n=0}^\infty(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1},\ x\in(-1,1)$
c) $\frac{1-\cos(2x)}{2}=\sum_{n=1}^\infty\frac{(-1)^{n+1}2^{2n-1}}{(2n)!}x^{2n},\ x\in\mathbb{R}$ d) $x+\sum_{n=1}^\infty(-1)^{n+1}\frac{x^{n+1}}{n(n+1)}$ e) $\operatorname{arctg}2+\sum_{n=1}^\infty\frac{(-1)^n2^{2n-1}}{2n-1}x^{2n-1},\ |x|<1/2$ f) $\sum_{n=0}^\infty\frac{x^{2n+1}}{2n+1},\ |x|<1$

III. HLEDÁNÍ PRIMITIVNÍ FUNKCE - ÚVOD

Výsledky jsou uvedeny vždy "až na konstantu":

1. a) $\frac{x^{10}}{10}+\log|x|-5e^x-\frac{1}{2x^2}-\sin x$ na $(-\infty,0)$ a $(0,\infty)$ b) $\frac{2}{3}e^{3x}+\frac{5(5-x)^{\frac{6}{5}}}{6},\ x\in\mathbb{R}$
c) $-\frac{1}{x}-\frac{3}{2x^2}-\frac{2}{x^3}$ na $(-\infty,0)$ a $(0,\infty)$ d) $-\frac{(1-x)^{11}}{11}+\frac{(1-x)^{12}}{12}$

2. a) $\frac{1}{2}|x|x,\ x\in\mathbb{R}$

b) $F(x)=\begin{cases}\sin x+4k & x\in[-\frac{\pi}{2}+2k\pi,\frac{\pi}{2}+2k\pi],k\in\mathbb{Z}\\ -\sin x+4k+2 & x\in(\frac{\pi}{2}+2k\pi,3\frac{\pi}{2}+2k\pi),k\in\mathbb{Z}\end{cases}$ c) $\frac{1}{4}|x|x^3,\ x\in\mathbb{R}$

d) $F(x)=\begin{cases}-\frac{1}{2}\cos(2x-1) & x\geq\frac{1}{2}\\ \frac{1}{2}\cos(2x-1)-1 & x<\frac{1}{2}\end{cases}$

e) $F(x)=(-1)^k(-\cos x+\sin x)+k2\sqrt{2},\ x\in[-\frac{\pi}{4}+k\pi,-\frac{\pi}{4}+(k+1)\pi],\ k\in\mathbb{Z}$

f) $F(x)=\begin{cases}\frac{x^3}{3} & x\in(-\infty,0)\\ \frac{x^2}{2} & x\in[0,1]\\ \frac{x^3}{3}+\frac{1}{6} & x\in(1,\infty)\end{cases}$ g) $F(x)=\begin{cases}e^x-2 & x<0\\ -e^{-x} & x\geq 0\end{cases}$ h) $F(x)=\begin{cases}-(x^2+x) & x<-\frac{1}{2}\\ x^2+x+\frac{1}{2} & x\geq-\frac{1}{2}\end{cases}$

3. a) $-\log|\cos x|$ na každém z intervalů $(-\frac{\pi}{2}+k\pi,\frac{\pi}{2}+k\pi),k\in\mathbb{Z}$

b) $\log|\sin x|$ na každém z intervalů $(k\pi,(k+1)\pi),k\in\mathbb{Z}$

c) $\frac{1}{3}\operatorname{tg}x^3$ na každém z intervalů $(\sqrt[3]{-\frac{\pi}{2}+k\pi},\sqrt[3]{\frac{\pi}{2}+k\pi}),k\in\mathbb{Z}$ d) $\frac{1}{2}\operatorname{arctg}x^2,\ x\in\mathbb{R}$

e) $\log|\log x|$ na $(0,1)$ a $(1,\infty)$ f) $\sqrt{x^2+5},\ x\in\mathbb{R}$ g) $\log|\log(\log x)|$ na $(1,e)$ a (e,∞)

4. a) $\frac{4(x^2+7)}{7\sqrt[4]{x}},\ D_f=(0,\infty)$ b) $2x-\frac{12}{5}\sqrt[6]{72x^5}+\frac{3}{2}\sqrt[3]{9x^2},\ D_f=\mathbb{R}\setminus\{0\}$ c) $\frac{4^x}{\log 4}+2\frac{6^x}{\log 6}+\frac{9^x}{\log 9},\ D_f=\mathbb{R}$

d) $x-\operatorname{arctg}x,\ D_f=\mathbb{R}$ e) $-\frac{2}{5}\sqrt{2-5x},\ D_f=(-\infty,\frac{2}{5})$ f) $\frac{1}{4}\operatorname{arctg}(x^4),\ D_f=\mathbb{R}$

g) $\cos(\frac{1}{x}),\ D_f=\mathbb{R}\setminus\{0\}$ h) $\frac{x}{2}+\frac{\sin(2x)}{4},\ D_f=\mathbb{R}$ i) $\operatorname{arctg}(x^2+1),\ D_f=\mathbb{R}$ j) $\frac{1}{2}\operatorname{arctg}(\sin^2 x),\ D_f=\mathbb{R}$

k) $F(x)=\begin{cases}2\log(1+x^2)+\pi(x_2-x_1)+4\log\frac{x_1}{x_2} & x\in(-\infty,-x_2]\\ -\pi(x+x_1)-2\log(1+x^2)+4\log(x_1^2+1) & x\in[-x_2,-x_1]\\ 2\log(1+x^2) & x\in[-x_1,x_1]\\ \pi(x-x_1)-2\log(1+x^2)+4\log(x_1^2+1) & x\in[x_1,x_2]\\ 2\log(1+x^2)+\pi(x_2-x_1)+4\log\frac{x_1}{x_2} & x\in[x_2,\infty)\end{cases}$ a $\begin{matrix}x_1=\frac{4-\sqrt{16-\pi^2}}{\pi}\\ x_2=\frac{4+\sqrt{16-\pi^2}}{\pi}\end{matrix}$, na $\mathbb{R}$

5. a) $-x^3\cos x+3x^2\sin x+6x\cos x-6\sin x,\ x\in\mathbb{R}$ b) $\frac{1}{2}(e^x\sin x+e^x\cos x),\ x\in\mathbb{R}$ c) $x\log x-x,\ x\in(0,\infty)$

d) $I_n:=\int x^ne^x\,\mathrm{d}x=x^ne^x-nI_{n-1};\ I_1:=xe^x-e^x,\ x\in\mathbb{R}$

e) $\frac{1}{4}(2x^2\log x-x^2),\ x\in(0,\infty)$ f) $\frac{1}{2}e^x(x\sin x+x\cos x-\sin x),\ x\in\mathbb{R}$

6. a) $\frac{2}{\sqrt{\cos x}},\ D_f=\bigcup_{k\in\mathbb{Z}}(-\frac{\pi}{2}+2k\pi,\frac{\pi}{2}+2k\pi)$ b) $\frac{1}{8}\sqrt[3]{8x^3+27},\ D_f=\mathbb{R}\setminus\{-\frac{3}{2}\}$ c) $\frac{1}{2}\operatorname{arctg}^2x,\ D_f=\mathbb{R}$

d) $-\frac{1}{2\log\frac{2}{3}}\log|1-(\frac{2}{3})^{2x}|,\ D_f=\mathbb{R}\setminus\{0\}$ e) $x\operatorname{arctg}x-\frac{1}{2}\log(1+x^2),\ D_f=\mathbb{R}$

f) $-\frac{2x^2-1}{4}\cos(2x)+\frac{x}{2}\sin(2x),\ D_f=\mathbb{R}$ g) $\frac{2}{3}x^{3/2}\left(\log^2x-\frac{4}{3}\log x+\frac{8}{9}\right),\ D_f=(0,\infty)$

h) $-\frac{e^{-2x}}{2}(x^2+x+\frac{1}{2}),\ D_f=\mathbb{R}$ i) $-\frac{1}{x}(\log^2x+2\log x+2),\ D_f=(0,\infty)$ j) $\frac{1}{3}(x^3-1)e^{x^3},\ D_f=\mathbb{R}$

k) $2(\sqrt{x}-1)e^{\sqrt{x}},\ D_f=(0,\infty)$ l) $2(6-x)\sqrt{x}\cos\sqrt{x}-6(2-x)\sin\sqrt{x},\ D_f=(0,\infty)$

IV. HLEDÁNÍ PRIMITIVNÍ FUNKCE - POKRAČOVÁNÍ

Výsledky jsou uvedeny vždy "až na konstantu":

1. a) $2\arcsin\frac{x}{2}+\sin(2\arcsin\frac{x}{2})=2\arcsin\frac{x}{2}+\frac{x}{2}\sqrt{4-x^2},\ D_f=(-2,2)$ b) $\frac{1}{a^2}\sin(\operatorname{arctg}\frac{x}{a})=\frac{x}{a^2\sqrt{a^2+x^2}},\ D_f=\mathbb{R}$ c) $\frac{x}{2}\sqrt{x^2+a^2}+\frac{a^2}{2}\log(x+\sqrt{x^2+a^2}),\ D_f=\mathbb{R}$ d) $5\frac{x^2}{2}-7x+8\log|x+1|+2\frac{1}{x+1},\ D_f=\mathbb{R}\setminus\{-1\}$ e) $\frac{1}{6}\left(\frac{12}{5}\log|x+\frac{3}{2}|+\frac{18}{5}\log|x+\frac{2}{3}|-6\log|x+1|\right),\ D_f=\mathbb{R}\setminus\{-\frac{3}{2},-1,-\frac{2}{3}\}$ f) $\frac{x^3}{3}+2x^2+10x+20\log|x-1|-15\frac{1}{x-1}-3\frac{1}{(x-1)^2},\ D_f=\mathbb{R}\setminus\{1\}$ g) $\frac{x}{2}\sqrt{x^2-a^2}-\operatorname{sgn}(x)\frac{a^2}{2}\log(|x|+\sqrt{x^2-a^2}),\ D_f=(-\infty,a]\cup[a,\infty)$ h) $\frac{x}{2}\sqrt{x^2-2}+\operatorname{sgn}(x)\log(|x|+\sqrt{x^2-2}),\ D_f=(-\infty,-\sqrt{2}]\cup[\sqrt{2},\infty)$

2. a) $\frac{5x+2}{3(x^2+x+1)}+\frac{2}{9}\log|x-1|-\frac{1}{9}\log(x^2+x+1)+\frac{8}{3\sqrt{3}}\operatorname{arctg}(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}),\ D_f=\mathbb{R}\setminus\{1\}$ b) $\frac{\sqrt{2}}{8}\log(x^2+\sqrt{2}x+1)+\frac{1}{2\sqrt{2}}\operatorname{arctg}(\sqrt{2}x+1)-\frac{\sqrt{2}}{8}\log(x^2-\sqrt{2}x+1)+\frac{1}{2\sqrt{2}}\operatorname{arctg}(\sqrt{2}x-1),\ D_f=\mathbb{R}$ c) $-\frac{x}{2}+\frac{1}{3}\log|e^x-1|+\frac{1}{6}\log(e^x+2),\ D_f=\mathbb{R}\setminus\{0\}$ d) $x-3\log(e^{x/6}+1)-3\log(\sqrt{e^{x/3}+1})-3\operatorname{arctg}(e^{x/6}),\ D_f=\mathbb{R}$ e) $\frac{1}{5\sqrt{2}}\operatorname{arctg}(\log(x)/\sqrt{2})+\frac{9}{10\sqrt{3}}\log\left|\frac{\log(x)-\sqrt{3}}{\log(x)+\sqrt{3}}\right|,\ D_f=(0,\infty)\setminus\{e^{\sqrt{3}},e^{-\sqrt{3}}\}$

3. a) $\frac{1}{4}\log\left|\frac{1-\cos x}{1+\cos x}\right|-\frac{1}{2(\cos x+1)},\ D_f=\mathbb{R}\setminus\bigcup_{k\in\mathbb{Z}}\{k\pi,\frac{\pi}{2}+k\pi\}$ `[dá se řešit substitucí` $t=\cos x$`]`

b) $\operatorname{tg} x + \log\left|\frac{\operatorname{tg} x}{(\operatorname{tg} x+1)^2}\right|,\ D_f = \mathbb{R} \setminus \bigcup_{k\in\mathbb{Z}}\{k\pi, \frac{\pi}{2}+k\pi, 3\frac{\pi}{4}+k\pi\}$ `[dá se řešit substitucí` $t = \operatorname{tg} x$`]`

c) $\frac{3}{2}\log(\cos^2 x+1) - \log(\cos^2(x)),\ D_f = \mathbb{R} \setminus \bigcup_{k\in\mathbb{Z}}\{\frac{\pi}{2}+k\pi\}$

d) $F(x) = \begin{cases} \operatorname{arctg}(\operatorname{tg} x) - \frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}(\sqrt{2}\operatorname{tg} x) + k\pi(1-1/\sqrt{2}) & x \in (-\frac{\pi}{2}+k\pi, \frac{\pi}{2}+k\pi), \quad k\in\mathbb{Z} \\ \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2\sqrt{2}} + k\pi(1-1/\sqrt{2}) & x = \frac{\pi}{2}+k\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \end{cases}$

e) $F(x) = \begin{cases} \frac{1}{6}\log\left(\frac{\operatorname{tg}^2 x - \operatorname{tg} x+1}{(\operatorname{tg} x+1)^2}\right) + \frac{\sqrt{3}}{3}\operatorname{arctg}\left(\frac{2\operatorname{tg} x-1}{\sqrt{3}}\right) & x \in (-\frac{\pi}{4}+k\pi, \frac{\pi}{2}+k\pi) \\ \frac{\sqrt{3}\pi}{6} & x = \frac{\pi}{2}+k\pi \\ \frac{1}{6}\log\left(\frac{\operatorname{tg}^2 x - \operatorname{tg} x+1}{(\operatorname{tg} x+1)^2}\right) + \frac{\sqrt{3}}{3}\operatorname{arctg}\left(\frac{2\operatorname{tg} x-1}{\sqrt{3}}\right) + \frac{\sqrt{3}\pi}{3} & x \in (\frac{\pi}{2}+k\pi, 3\frac{\pi}{4}+k\pi) \end{cases}$ pro $k \in \mathbb{Z}$

f) $F(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{6}}\operatorname{arctg}\left(\sqrt{\frac{2}{3}}\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}\right)\right) + k\frac{\pi\sqrt{6}}{6} & \text{pro } x \in (-\pi+2k\pi, \pi+2k\pi), k \in \mathbb{Z} \\ \frac{\pi}{2\sqrt{6}} + k\frac{\pi\sqrt{6}}{6} & \text{pro } x = \pi+2k\pi, k\in\mathbb{Z} \end{cases}$

g) $F(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{5}}{5}\operatorname{arctg}\left(\frac{3\operatorname{tg}\frac{x}{2}+1}{\sqrt{5}}\right) + k\pi\frac{\sqrt{5}}{5} & \text{pro } x \in (-\pi+2k\pi, \pi+2k\pi), k\in\mathbb{Z} \\ \frac{\pi}{2}\frac{\sqrt{5}}{5} + k\pi\frac{\sqrt{5}}{5} & \text{pro } x = \pi+2k\pi, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$

4. a) $2\sqrt{x} - 2\log(1+\sqrt{x}),\ D_f = (0,\infty)$ b) $\frac{2}{x-\sqrt{x^2+2x+2}} - \log(\sqrt{x^2+2x+2} - x - 1),\ D_f = \mathbb{R}$

c) $2\operatorname{sgn}(x-1)\sqrt{\frac{x-2}{x+1}},\ D_f = (-\infty,1)\cup(2,\infty)$

5. a) $\frac{-2(t^2+3t+1)^2}{(2t+3)^3}$ b) $x_1 = \frac{3+\sqrt{5}}{2}$, $x_2 = \frac{3-\sqrt{5}}{2}$. Pak na intervalu $(-\infty, x_2)$ vede na integrál z $\frac{2t^2(x_1-x_2)^2}{(t^2-1)^3}$; na intervalu (x_1,∞) vede na integrál z $-\frac{2t^2(x_1-x_2)^2}{(t^2-1)^3}$.

6. a) $F(x) = \begin{cases} \log\left(\sqrt{\frac{\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}+1}{2\operatorname{tg}^2\frac{x}{2} - \operatorname{tg}\frac{x}{2}+1}}\right) + \operatorname{arctg}(\operatorname{tg}\frac{x}{2}) - \frac{6}{\sqrt{28}}\operatorname{arctg}\left(\frac{8\operatorname{tg}\frac{x}{2}-2}{\sqrt{28}}\right) - & k\pi\left(\frac{6}{\sqrt{28}}-1\right), \\ & x \in (-\pi+2k\pi, \pi+2k\pi), k\in\mathbb{Z} \\ -\frac{1}{2}\log(2) + (-k\pi - \pi/2)\left(\frac{6}{\sqrt{28}}-1\right), & x = \pi+2k\pi, k\in\mathbb{Z} \end{cases}$

b) $\frac{1}{2}\log(|2\sqrt{x^2+x}+2x+1|) - \frac{1}{2(2\sqrt{x^2+x}+2x+1)},\ D_f = (-\infty,-1)\cup(0,\infty)$

V. NEWTONŮV INTEGRÁL

1. a) 1 b) $\frac{1-\log 2}{2}$ c) 4π d) $2-\frac{2}{e}$ e) $200\sqrt{2}$ f) $2-\frac{\pi}{2}$ g) $\frac{a^4}{16}\pi$ h) $\frac{2\pi}{\sqrt{1-\varepsilon^2}}$ i) $\frac{2}{ab}\operatorname{arctg}(\frac{a\operatorname{tg}(1)}{b})$ j) $\frac{\log 3}{2} - \frac{\sqrt{3}}{6}\pi$ k) $2\sqrt{2}\pi$

2. a) $\frac{\pi}{\sqrt{3}}$ b) π c) $\frac{5}{2}\sqrt{2}\pi$

d) $57(\pi - 2\sqrt{3}\frac{\pi}{3}) + \frac{\sqrt{3}\pi}{9} + \operatorname{arctg}(\operatorname{tg}(18\pi^2)) - \frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\left(\frac{2\operatorname{tg}(18\pi^2)+1}{\sqrt{3}}\right)$

e) $\frac{\pi^2}{4}$ (substituce $x = y + \frac{\pi}{2}$, poté rozdělit na součet dvou integrálů, z nichž jeden je nulový jakožto integrál z liché funkce a druhý se spočte standardně) f) $\frac{(e^{-\pi}-e^{-(2n+1)\pi})(e^{\pi/2}-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}e^{\pi})}{1-e^{-\pi}}$ (substituce $x = e^y$, pak rozdělit na součet $2n$ integrálů, každý z nich převést substitucí [posunutí] na integrál přes $(0,\pi)$, použí vlastnosti exponenciály a dopočítat) g) $-\frac{1}{2n} + \frac{1}{2n-2} + \ldots + \frac{(-1)^n}{2} + \frac{(-1)^{n+1}}{2}\log 2$ (substitucí $y = \operatorname{tg} x$ lze převést na integrál z racionální funkce, pak aplikovat substituci $z = \frac{y-1}{y+1}$ a dopočítat) h) -1 (rozdělíme na integrál přes intervaly $(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4})$ a $(\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{6})$)

VI. MOCNINNÉ ŘADY - SČÍTÁNÍ ČÍSELNÝCH ŘAD

1. a) $x^5 e^{x^4},\ x\in\mathbb{R}$ b) $\frac{x}{(x-1)^2},\ x\in(-1,1)$ c) $\log(\frac{1-x}{x}) - \log(1-x)+1,\ x\in[-1,1]\setminus\{0\}$, součet je 0 pro $x=0$ d) $\frac{x(1+x)}{(1-x)^3},\ x\in(-1,1)$ e) $\frac{x(1-x)}{(1+x)^3},\ x\in(-1,1)$ f) $\frac{x(3-x)}{(1-x)^3},\ x\in(-1,1)$ g) $2x\operatorname{arctg} x - \log(1+x^2),\ x\in[-1,1]$

2. a) $-\log 2$ b) 2 c) $\frac{\pi}{4}-1$ d) 8 e) $\frac{3}{128}$ f) $2\operatorname{arctg}(1/2)-1$ g) $\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}$ h) $-2\log(\frac{2}{3}) - \frac{5}{3}$ i) $-\frac{1}{4\sqrt{e}}$

VII. KONVERGENCE NEWTONOVA INTEGRÁLU

1. a) konverguje b) diverguje c) konverguje d) konverguje e) diverguje f) konverguje g) konverguje, pokud $p, q < 1$ h) konverguje, pokud $q < 1$ a $p < \frac{1}{2}$ i) konverguje j) konverguje, pokud $p, q > 0$ k) konverguje, pokud $p > -1$

2. a) konverguje, pokud $m < 3$ b) konverguje c) konverguje, pokud $k < -1$ d) konverguje, pokud $\alpha < -1 < \alpha + \beta$ e) konverguje, pokud $\alpha \in (-1, 1)$ f) konverguje, pokud $\alpha + \gamma > -1$ a $\beta - \gamma > -1$ g) konverguje, pokud $p > 1$ nebo $p = 1$ a $q > 1$

4. oba integrály jsou konvergují

5. a) konverguje (neabsolutně) b) konverguje (neabsolutně) c) konverguje, pokud $\alpha \in (1, 3)$ d) neabsolutně konverguje e) konverguje (neabsolutně)

6. a) konverguje (neabsolutně) b) konverguje, pokud $\alpha \in (-2, -1)$ c) konverguje pro $\alpha < 0$ a (neabsolutně) pro $\alpha > 1$

VIII. APLIKACE URČITÉHO INTEGRÁLU

1. a) $2 \operatorname{arctg} 1 - \frac{1}{3}$ b) 4.5 c) $\frac{1}{3}$ d) $\frac{16}{3}$ e) πab

2. a) $\frac{8}{27}(10^{2/3} - 1)$ b) $-\frac{1}{2}\log(\sqrt{2} - 1) + \frac{\sqrt{2}}{2}$

3. a) $1 + \frac{1}{2}\log(3/2)$ b) $\frac{e^2+1}{4}$ c) 2π d) $6a$

4. Objem $= 2a^2\pi^2 b$, povrch $= 4\pi^2 ab$

5. a) diverguje b) konverguje

VIII. METRICKÉ PROSTORY

1. a) ano b) ne

2. a) ano b) ne c) ano

3. d) $\frac{1}{4}$ e) f_n ano, g_n ne

4. a) $\frac{1}{6}$ b) $a = \frac{1}{\sqrt{2}}$

5. obě tvrzení platí pokud je metrika generovaná normou, jinak ne (jako příklad lze vzít prostor s diskrétní metrikou)

6. a) je uzavřená, má prázdný vnitřek, $\partial\mathbb{N} = \overline{\mathbb{N}} = \mathbb{N}$ b) $\operatorname{Int}\mathbb{Q} = \emptyset$, $\partial\mathbb{Q} = \overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$, $\mathbb{Q}$ není otevřená ani uzavřená. c) Množina není uzavřená ani otevřená, vnitřek je prázdný, hranice i uzávěr jsou $\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\} \cup \{0\}$. d) Množina není uzavřená ani otevřená. Vnitřek je $\{[x, y] \in \mathbb{R}^2 : x > 0, y < 0\}$, uzávěr $\{[x, y] \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0, y \leq 0\}$, hranice$\{[x, y] \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0 \;\&\; y \leq 0 \;\&\; (x = 0 \vee y = 0)\}$. e) Otevřená, uzávěr $\{[x, y] : x + y \leq 0\}$, hranice $\{[x, y] : x + y = 0\}$. f) Uzavřená, vnitřek $\{[x, y] : x > y\}$, hranice $\{[x, y] : x = y\}$. g) Uzavřená, prázdný vnitřek. h) Ani uzavřená ani otevřená, vnitřek prázdný, hranice i uzávěr $\{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3 : x \geq 0, y \geq 0, x + y = 2, z \leq 0\}$. i) Uzavřená, prázdný vnitřek. j) Otevřená, uzávěr $\{f \in \mathcal{C}[0, 1] : f(\frac{1}{2}) \in [0, 2]\}$, hranice $\{f \in \mathcal{C}[0, 1] : f(\frac{1}{2}) \in \{0, 2\}\}$ k) Uzavřená, prázdný vnitřek.

IX. FUNKCE VÍCE PROMĚNNÝCH - LIMITY, SPOJITOST, DERIVACE

1. a)-v), b)-i), c)-vi), d)-ii), e)-iii), f)-iv)

2. a) 0 b) Limita neexistuje c) Limita neexistuje d) 0 e) 0 f) 2 g) Limita neexistuje h) Limita neexistuje i) 1 j) 1 k) Limita neexistuje, protože funkce není definována na prstencovém okolí bodu $(0,3)$, limita přes množinu $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:\ x\neq 0\}$ je 3. l) Limita neexistuje, protože funkce není definována na prstencovém okolí bodu $(0,0)$, limita přes množinu $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:\ x\neq -y\}$ také neexistuje. m) 0 n) Limita neexistuje, protože funkce není definována na prstencovém okolí bodu $(0,0)$, limita přes množinu $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:\ xy\neq 0\}$ je $+\infty$. o) 0

3. a) ano, $f(x,x)=3x^2$ b) ne c) ano, $f(0,y)=y$ d) ne

4. a) $\frac{\partial f}{\partial x}=mx^{m-1}y^n$, $\frac{\partial f}{\partial y}=nx^my^{n-1}$ pro $(x,y)\in\mathbb{R}^2$. b) $\frac{\partial f}{\partial x}=ye^{xy}$, $\frac{\partial f}{\partial y}=xe^{xy}$ pro $(x,y)\in\mathbb{R}^2$. c) $\frac{\partial f}{\partial x}=y+z$, $\frac{\partial f}{\partial y}=x+y$, $\frac{\partial f}{\partial z}=x+y$ pro $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$. d) $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=|y|\operatorname{sgn}x$ pro $x\neq 0$. $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=|x|\operatorname{sgn}y$ pro $y\neq 0$. $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)=\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)=0$. $\frac{\partial f}{\partial x}(0,y)$ pro $y\neq 0$ a $\frac{\partial f}{\partial y}(x,0)$ pro $x\neq 0$ neexistují. e) $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=-\operatorname{sgn}(y+\cos x)\cdot\sin x$, $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=\operatorname{sgn}(y+\cos x)$, pokud $y\neq-\cos x$. $\frac{\partial f}{\partial y}(x,-\cos x)$ neexistuje pro $x\in\mathbb{R}$. $\frac{\partial f}{\partial x}(k\pi,(-1)^{k+1})=0$ pro $k\in\mathbb{Z}$. $\frac{\partial f}{\partial x}(x,-\cos x)$ neexistuje pro $x\neq k\pi$. f) $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=\cos x\operatorname{sgn}(\sin x-\sin y)$, $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=-\cos y\operatorname{sgn}(\sin x-\sin y)$, pokud $\sin x\neq\sin y$. $\frac{\partial f}{\partial x}(\frac{\pi}{2}+k\pi,\frac{\pi}{2}+l\pi)=\frac{\partial f}{\partial y}(\frac{\pi}{2}+k\pi,\frac{\pi}{2}+l\pi)=0$. V ostatních bodech parciální derivace neexistují. g) $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=-\cos x\operatorname{sgn}(\cos y-\sin x)$, $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=-\sin y\operatorname{sgn}(\cos y-\sin x)$, pokud $\sin x\neq\cos x$. $\frac{\partial f}{\partial x}(\frac{\pi}{2}+k\pi,(k+2l)\pi)=\frac{\partial f}{\partial y}(\frac{\pi}{2}+k\pi+2l\pi,k\pi)=0$. V ostatních bodech parciální derivace neexistují. h) Pokud $x,y>0$ nebo $x,y<0$, pak $\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{z}{y}\cdot\left(\frac{x}{y}\right)^{z-1}$; $\frac{\partial f}{\partial y}=-\frac{zx}{y^2}\cdot\left(\frac{x}{y}\right)^{z-1}$; $\frac{\partial f}{\partial z}=\left(\frac{x}{y}\right)^{z}\cdot\log\frac{x}{y}$. i) Pokud $x>0$ a $z\neq 0$, pak $\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{y}{z}\cdot x^{\frac{y}{z}-1}$; $\frac{\partial f}{\partial y}=x^{\frac{y}{z}}\cdot\log x\cdot\frac{1}{z}$; $\frac{\partial f}{\partial z}=-x^{\frac{y}{z}}\cdot\log x\cdot\frac{y}{z^2}$. j) Pokud $x>0$, pak $\frac{\partial f}{\partial x}=\cos(x^y)\cdot x^{y-1}\cdot y$; $\frac{\partial f}{\partial y}=\cos(x^y)\cdot x^y\cdot\log x$. k) $\frac{\partial f}{\partial x}=e^{-\frac{\pi}{x^2+3xy+3y^2}}\cdot\frac{\pi(2x+3y)}{(x^2+3xy+3y^2)^2}$, $\frac{\partial f}{\partial y}=e^{-\frac{\pi}{x^2+3xy+3y^2}}\cdot\frac{\pi(3x+6y)}{(x^2+3xy+3y^2)^2}$ pro $(x,y)\neq(0,0)$; v bodě $(0,0)$ jsou obě parciální derivace nulové. l) Pokud $x>-y^2$, pak $\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{1}{2\sqrt{x+y^2}}$; $\frac{\partial f}{\partial y}=\frac{y}{\sqrt{x+y^2}}$. Jinak parciální derivace nemají smysl.

5. viz. výsledky zkouškových písemek zde:
`http://www.karlin.mff.cuni.cz/~kalenda/edu.php?edutype=archpis`

6. a) ne b) ne c) ano d) ne e) ano f) ano

7. a) $\nabla f(x,y)=\left(\frac{5x^4(x^4+y^4)-(x^5-y^5)4x^3}{(x^4+y^4)^2},\frac{-5y^4(x^4+y^4)-(x^5-y^5)4y^3}{(x^4+y^4)^2}\right)$ pro $(x,y)\neq(0,0)$, v bodě $(0,0)$ totální diferenciál neexistuje b) $\nabla f(x,y)=(3x^2,0)$ pro $x>y$, $\nabla f(x,y)=(0,3y^2)$ pro $x<y$, $\nabla f(0,0)=(0,0)$, v bodech (a,a) kde $a\neq 0$ totální diferenciál neexistuje.

8. a) $F'(\pi,1,0)=\begin{pmatrix}0 & 0 & \pi\sin 1\\ 2\pi\sin\frac{1}{1+\pi^2}-\frac{2\pi^3}{(1+\pi^2)^2}\cos\frac{1}{1+\pi^2} & -\frac{2\pi^2}{(1+\pi^2)^2}\cos\frac{1}{1+\pi^2} & 0\end{pmatrix}$

b) $\frac{\partial F_2}{\partial x}(0,0,0)=0$.

9. a) $(G\circ F)'(0,0)=\begin{pmatrix}3 & 4 & 6\\ 0 & -2 & -3\\ 1 & 0 & 0\end{pmatrix}$

b) $\partial_{(2,0,1)}F_1(0,0,0)=5$.

10. a) $F'(1,-1) = \begin{pmatrix} 1/2 & 1 \\ 1 & 1 \\ 2 & -\frac{1}{2} \\ -e & e \end{pmatrix}$

b) $\frac{\partial F_3}{\partial x}(0,0) = 0.$

11. a) $\frac{\partial F}{\partial r} = 8r + 4s,\ \frac{\partial F}{\partial s} = 4r + 2s,\ \frac{\partial F}{\partial t} = 2t$ b) $\frac{\partial F}{\partial s} = 4s^3 + 8st + 3t,\ \frac{\partial F}{\partial t} = 4s^2 + 3s + 8t + 2$