I. TAYLORŮV POLYNOM

Připomeňme si definice elementárních funkcí:

a) $\sin(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$ b) $\cos(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$ c) $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$

1. Najděte Taylorův polynom k-tého řádu v bodě 0 pro funkce:

a) $\operatorname{tg}(x),\ k = 4$ b) $\cos(\sin x),\ k = 5$ c) $\sin(\sin x),\ k = 6$ d) $\sin(1 - \cos x),\ k = 3$ e) $\frac{1+x+x^2}{1-x+x^2},\ k = 4$
f) $e^{2x-x^2},\ k = 5$ g) $\frac{x}{e^x-1},\ k = 4$ h) $\log(\cos x),\ k = 6$

2. Spočtěte limity

a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos x - e^{-\frac{x^2}{2}}}{x^4}$ b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x \sin x - x(1+x)}{x^3}$ c) $\lim\limits_{x\to\infty} (\sqrt[6]{x^6 + x^5} - \sqrt[6]{x^6 - x^5})$
d) $\lim\limits_{x\to\infty} x^{3/2}(\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1} - 2\sqrt{x})$ e) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{a^x + a^{-x} - 2}{x^2}$ $(a > 0)$ f) $\lim\limits_{x\to 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\sin x}\right)$
g) $\lim\limits_{x\to\infty} (x - x^2 \log(1 + \frac{1}{x}))$ h) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{x}\left(\frac{1}{x} - \frac{\cos x}{\sin x}\right)$ i) $\lim\limits_{x\to\infty} ((x^3 - x^2 + \frac{x}{2})e^{\frac{1}{x}} - \sqrt{x^6 + 1})$
j) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1 - (\cos x)^{\sin x}}{x^3}$ k) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1 - 2x + x^3} - \sqrt[3]{1 - 3x + x^2} - \frac{x^2}{6}}{\sin x - x}$

3. Spočtěte limity (příklady ze zkouškových písemek na FSV):

a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin(e^{(x^2)} - 1) + 2\sin(\cos(x) - 1)}{\log(1 + x^4)}$ b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\log(1 + x\sin x) - \exp(x \sin x) + \cos(x \sin x)}{\sin^4 x}$

4. Vyšetřete konvergenci řad

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1}{\sqrt{n}} + \log\left(\sqrt{1 + \frac{1}{n}} - \frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right]$ b) $\sum_{n=1}^{\infty} \left[2 \operatorname{tg}\left(\frac{1}{\sqrt[3]{n}}\right) - \sin\left(\frac{1}{\sqrt[3]{n}}\right) - \frac{1}{n}\right]$
c) $\sum_{n=1}^{\infty} \left[\sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) - \log\left(1 + \frac{1}{\sqrt[3]{n}}\right)\right]$ d) $\sum_{n=1}^{\infty} (e^{1/n} - 1 - \frac{1}{n})(\arcsin\frac{1}{n} - \frac{1}{\sqrt{n}})$
e) $\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{\sqrt{n}}\right)$ f) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sin\frac{1}{n} - \arcsin\frac{1}{n}\right)$ g) $\sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{1}{n} - \arcsin\frac{1}{n}\right)$

II. MOCNINNÉ ŘADY

1. Nalezněte poloměr konvergence následujících mocninných řad. Určete oblasti absolutní konvergence, neabsolutní konvergence a divergence.

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} x^n$ $(p \in \mathbb{R})$ b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n+(-2)^n}{n}(x+1)^n$ c) $\sum_{n=1}^{\infty}(1+\frac{1}{n})^{n^2} x^n$ d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a^{\sqrt{n}}} x^n$ $(a > 0)$
e) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3+(-1)^n)^n}{n} x^n$ f) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{a^n+b^n}$ $(a, b > 0)$ g) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{a^n}{n} + \frac{b^n}{n^2}\right) x^n$ $(a, b > 0)$ h) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left(1+2\cos\frac{\pi n}{4}\right)^n}{n} x^n$
i) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} x^{n^2}$

2. Rozviňte funkce $f(x) = \frac{1}{1-x}$, $g(x) = \frac{1}{(1-x)^2}$, $h(z) = \frac{x}{(1-x)^2}$ v mocninné řady se středem v bodě x_0, kde a) $x_0 = 0$, b) $x_0 = -1$, c) $x_0 = 7$; a stanovte poloměr konvergence těchto řad.

3. Rozviňte funkce $f(x) = \exp(x)$, $g(x) = x\exp(x)$, $h(x) = x^2\exp(x)$ v mocninné řady se středem v bodě x_0, kde a) $x_0 = 0$, b) $x_0 = 1$, c) $x_0 = -8$; a stanovte poloměr konvergence těchto řad.

4. Rozviňte funkce $f(x) = \sin(x)$, $g(x) = x\sin(x)$, $h(x) = x^2\sin(x)$ v mocninné řady se středem v bodě x_0, kde a) $x_0 = 0$, b) $x_0 = \pi/6$, c) $x_0 = 2$; a stanovte poloměr konvergence těchto řad.

5. Vyjádřete následující funkce jako mocninnou řadu o středu 0:

a) e^{-x^2} b) $\operatorname{arctg} x$ c) $\sin^2 x$ d) $(1+x)\log(1+x)$ e) $\operatorname{arctg}\left(\frac{2-2x}{1+4x}\right)$ f) $\log\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$

III. HLEDÁNÍ PRIMITIVNÍ FUNKCE - ÚVOD

Vyjádřete primitivní funkce na maximálních intervalech existence

1. Příklady na integrování "přímo":
a) $\int x^9 + \frac{1}{x} - 5e^x + x^{-3} - \cos x \, \mathrm{d}x$ b) $\int 2e^{3x} - \sqrt[5]{5-x} \, \mathrm{d}x$ c) $\int \frac{x^2+3x+6}{x^4} \, \mathrm{d}x$ d) $\int x(1-x)^{10} \, \mathrm{d}x$

2. Příklady, kde se musí funkce "lepit":
a) $\int |x| \, \mathrm{d}x$ b) $\int |\cos x| \, \mathrm{d}x$ c) $\int \sqrt{x^6} \, \mathrm{d}x$ d) $\int \sin |2x-1| \, \mathrm{d}x$ e) $\int |\sin x + \cos x| \, \mathrm{d}x$
f) $\int \max\{x, x^2\} \, \mathrm{d}x$ g) $\int e^{-|x|} \, \mathrm{d}x$ h) $\int |2x+1| \, \mathrm{d}x$

3. Příklady na integrování pomocí substituce:
a) $\int \mathrm{tg}\, x \, \mathrm{d}x$ b) $\int \mathrm{cotg}\, x \, \mathrm{d}x$ c) $\int \frac{x^2}{\cos^2 x^3} \, \mathrm{d}x$ d) $\int \frac{x}{1+x^4} \, \mathrm{d}x$ e) $\int \frac{1}{x \log x} \, \mathrm{d}x$ f) $\int \frac{x}{\sqrt{x^2+5}} \, \mathrm{d}x$ g) $\int \frac{1}{x \log x \log(\log x)} \, \mathrm{d}x$

4. Další příklady k procvičení:
a) $\int \left(1 - \frac{1}{x^2}\right) \sqrt{x\sqrt{x}} \, \mathrm{d}x$ b) $\int \frac{\left(\sqrt{2x} - \sqrt[3]{3x}\right)^2}{x} \, \mathrm{d}x$ c) $\int (2^x + 3^x)^2 \, \mathrm{d}x$ d) $\int \frac{x^2}{1+x^2} \, \mathrm{d}x$ e) $\int \frac{1}{\sqrt{2-5x}} \, \mathrm{d}x$ f) $\int \frac{x^3}{x^8+1} \, \mathrm{d}x$
g) $\int \frac{1}{x^2} \sin(\frac{1}{x}) \, \mathrm{d}x$ h) $\int \cos^2 x \, \mathrm{d}x$ i) $\int \frac{2x}{2+2x^2+x^4} \, \mathrm{d}x$ j) $\int \frac{\sin x}{1+\sin^4 x} \cos x \, \mathrm{d}x$ k) $\int \arcsin \sin \frac{4x}{x^2+1} \, \mathrm{d}x$ (těžké)

5. Příklady na integrování "per partes":
a) $\int x^3 \sin x \, \mathrm{d}x$ b) $\int e^x \cos x \, \mathrm{d}x$ c) $\int \log x \, \mathrm{d}x$ d) $\int x^n e^x \, \mathrm{d}x$, $n \in \mathbb{N}$ e) $\int x \log x \, \mathrm{d}x$ f) $\int x e^x \cos x \, \mathrm{d}x$

6. Další příklady k procvičení:
a) $\int \frac{\sin x}{\sqrt{\cos^3 x}} \, \mathrm{d}x$ b) $\int \frac{x^2}{(8x^3+27)^{2/3}} \, \mathrm{d}x$ c) $\int \frac{\mathrm{arctg}\, x}{1+x^2} \, \mathrm{d}x$ d) $\int \frac{2^{2x}}{9^x - 4^x} \, \mathrm{d}x$ e) $\int \mathrm{arctg}\, x \, \mathrm{d}x$ f) $\int x^2 \sin(2x) \, \mathrm{d}x$
g) $\int \sqrt{x} \log^2 x \, \mathrm{d}x$ h) $\int x^2 e^{-2x} \, \mathrm{d}x$ i) $\int \left(\frac{\log x}{x}\right)^2 \, \mathrm{d}x$ j) $\int x^5 e^{x^3} \, \mathrm{d}x$ k) $\int e^{\sqrt{x}} \, \mathrm{d}x$ l) $\int x \sin \sqrt{x} \, \mathrm{d}x$

IV. HLEDÁNÍ PRIMITIVNÍ FUNKCE - POKRAČOVÁNÍ

Vyjádřete primitivní funkce na maximálních intervalech existence

1. a) $\int \sqrt{4-x^2} \, \mathrm{d}x$ b) $\int \frac{1}{(x^2+a^2)^{3/2}} \, \mathrm{d}x$ $(a > 0)$ c) $\int \sqrt{x^2+a^2} \, \mathrm{d}x$ $(a > 0)$ d) $\int \frac{5x^3+3x^2-x-1}{x^2+2x+1} \, \mathrm{d}x$
e) $\int \frac{1}{(2x+3)(3x+2)(x+1)} \, \mathrm{d}x$ f) $\int \frac{x^5+x^4+x^3+x^2+x+1}{x^3-3x^2+3x-1} \, \mathrm{d}x$ g) $\int \sqrt{x^2-a^2} \, \mathrm{d}x$ $(a > 0)$ h) $\int \frac{x^2}{\sqrt{x^2-2}} \, \mathrm{d}x$

2. a) $\int \frac{x^2+3x-2}{(x-1)(x^2+x+1)^2} \, \mathrm{d}x$ b) $\int \frac{1}{x^4+1} \, \mathrm{d}x$ c) $\int \frac{1}{e^{2x}+e^x-2} \, \mathrm{d}x$ d) $\int \frac{1}{1+e^{x/2}+e^{x/3}+e^{x/6}} \, \mathrm{d}x$ e) $\int \frac{2\log^2(x)+3}{x\log^4(x) - x\log^2(x) - 6x} \, \mathrm{d}x$

3. a) $\int \frac{1}{\sin x + \mathrm{tg}\, x} \, \mathrm{d}x$ b) $\int \frac{\mathrm{tg}^2 x + 1}{\sin^2 x + \sin x \cos x} \, \mathrm{d}x$ c) $\int \frac{\sin^3 x + \sin x}{\cos^3 x + \cos x} \, \mathrm{d}x$ d) $\int \frac{\sin^2 x}{1+\sin^2 x} \, \mathrm{d}x$ e) $\int \frac{\sin x}{\sin^3 x + \cos^3 x} \, \mathrm{d}x$
f) $\int \frac{1}{5+\cos x} \, \mathrm{d}x$ g) $\int \frac{1}{2\sin x - \cos x + 5} \, \mathrm{d}x$

4. a) $\int \frac{1}{1+\sqrt{x}} \, \mathrm{d}x$ b) $\int \frac{1}{1+\sqrt{x^2+2x+2}} \, \mathrm{d}x$ c) $\int \frac{1}{(x-1)\sqrt{x^2-3x+2}} \, \mathrm{d}x$

5. Převeďte “$\int \sqrt{x^2-3x+1} \, \mathrm{d}x$” na integrál z racionální funkce pomocí následujících substitucí: a) $t = \sqrt{x^2-3x+1} - x$ b) “$t = \sqrt{\frac{x-x_1}{x-x_2}}$”

6. a) $\int \frac{\sin x}{\sin x + \cos x - 3} \, \mathrm{d}x$ b) $\int \frac{1}{x+\sqrt{x^2+x}} \, \mathrm{d}x$

V. NEWTONŮV INTEGRÁL

Vypočtěte následující integrály

1. a) $\int_0^2 |1-x|\,\mathrm{d}x$ b) $\int_0^{\log 2} xe^{-x}\,\mathrm{d}x$ c) $\int_0^{2\pi} x^2\cos x\,\mathrm{d}x$ d) $\int_{\frac{1}{e}}^{e} |\log x|\,\mathrm{d}x$ e) $\int_0^{100\pi}\sqrt{1-\cos 2x}\,\mathrm{d}x$
f) $\int_0^{\log 2}\sqrt{e^x-1}\,\mathrm{d}x$ g) $\int_0^a x^2\sqrt{a^2-x^2}\,\mathrm{d}x$ h) $\int_0^{2\pi}\frac{1}{1+\varepsilon\cos x}\,\mathrm{d}x$, $\varepsilon\in[0,1)$ i) $\int_{-1}^{1}\frac{1}{a^2\sin^2 x+b^2\cos^2 x}\,\mathrm{d}x$, $ab\neq 0$
j) $\int_{-1}^{1}\frac{x}{x^2+x+1}\,\mathrm{d}x$ k) $\int_0^{2\pi}\frac{1}{\sin^4 x+\cos^4 x}\,\mathrm{d}x$

2. a) $\int_1^3\frac{1}{x\sqrt{-x^2+4x-3}}\,\mathrm{d}x$ b) $\int_{-1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{(x+1)^3}}\,\mathrm{d}x$ c) $\int_0^{5\pi}\frac{1}{\sin^2 x+2\cos^2 x}\,\mathrm{d}x$ d) $\int_0^{6\pi} x\frac{\sin(x^2)}{2+\sin(x^2)}\,\mathrm{d}x$
e) $\int_0^{\pi}\frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}\,\mathrm{d}x$ f) $\int_{e^{-2\pi n}}^{1}|\cos\log\frac{1}{x}|$ g) $\int_0^{\pi/4}\left(\frac{\sin x-\cos x}{\sin x+\cos x}\right)^{2n+1}\,\mathrm{d}x$ h) $\int_{\pi/6}^{5\pi/6}\frac{\cos 2x}{|\sin x-\cos x|}\,\mathrm{d}x$

VI. MOCNINNÉ ŘADY - SČÍTÁNÍ ČÍSELNÝCH ŘAD

1. Sečtěte řady všude na intervalu konvergence:
a) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{4n+5}}{n!}$ b) $\sum_{n=1}^{\infty} nx^n$ c) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n(n+1)}$ d) $\sum_{n=1}^{\infty} n^2x^n$ e) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}n^2x^n$
f) $\sum_{n=1}^{\infty} n(n+2)x^n$ g) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^{2n}}{n(2n-1)}$

2. Sečtěte řady:
a) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}$ b) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^n}$ c) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}$ d) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n(n+1)}{2^n}$ e) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n n^3}{3^n}$ f) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{4^n(2n+1)}$
g) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{4n^2-1}$ h) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{2n+3}{(n+1)2^n}$ i) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n n^2}{2^n\, n!}$

VII. KONVERGENCE NEWTONOVA INTEGRÁLU

1. Vyšetřete konvergenci následujících integrálů
a) $\int_0^1 \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{1-x^4}}\,\mathrm{d}x$ b) $\int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt[3]{(1-x^2)^5}}\,\mathrm{d}x$ c) $\int_0^1 \frac{1}{e^{\sqrt{x}}-1}\,\mathrm{d}x$ d) $\int_0^1 \frac{\sqrt{x}}{e^{\sin x}-1}\,\mathrm{d}x$ e) $\int_0^1 \frac{1}{e^x-\cos x}\,\mathrm{d}x$ f) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\log\sin x}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$
g) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sin^p x\cos^q x}\,\mathrm{d}x$ h) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sin^q x(1-\sin x)^p}\,\mathrm{d}x$ i) $\int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{x}\log(1+e^x)}\,\mathrm{d}x$ j) $\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}\,\mathrm{d}x$ k) $\int_0^\infty x^p e^{-\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$

2. Vyšetřete konvergenci následujících integrálů
a) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1-\cos x}{x^m}\,\mathrm{d}x$ b) $\int_1^\infty \frac{\sin x}{x^\alpha}\,\mathrm{d}x$ $(\alpha>1)$ c) $\int_1^\infty x^k\frac{x-\sin x}{x+\sin x}\,\mathrm{d}x$ d) $\int_0^\infty x^\alpha \operatorname{arctg}^\beta x\,\mathrm{d}x$ e) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\operatorname{tg} x)^\alpha\,\mathrm{d}x$
f) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^\alpha\left(\frac{\pi}{2}-x\right)^\beta \operatorname{tg}^\gamma x\,\mathrm{d}x$ g) $\int_2^\infty \frac{1}{x^p\ln^q x}\,\mathrm{d}x$

3. Pomocí B-C podmínky ukažte, že následující integrály nejsou konvergentní:
a) $\int_1^\infty \frac{\sin x}{x^\alpha}\,\mathrm{d}x$ $(\alpha\le 0)$ b) $\int_1^\infty \frac{|\sin x|}{x}\,\mathrm{d}x$ c) $\int_1^\infty \frac{|\cos x|}{x}\,\mathrm{d}x$ d) $\int_\pi^\infty \frac{\sin^2 x}{x}\,\mathrm{d}x$

4. Pomocí metod "per partes" a "substituce" rozhodněte o konvergenci následujících integrálů:
a) $\int_1^\infty \frac{\sin x}{x^\alpha}\,\mathrm{d}x$ $(\alpha\in(0,1])$ b) $\int_0^\infty \sin(x^2)\,\mathrm{d}x$

5. Vyšetřete konvergenci (absolutní i neabsolutní) následujících integrálů:
a) $\int_0^\infty 2x\cos(x^4)\,\mathrm{d}x$ b) $\int_0^\infty \frac{\sqrt{x}\cos x}{x+8}\,\mathrm{d}x$ c) $\int_0^\infty \frac{\sin^2 x}{x^\alpha}\,\mathrm{d}x$ d) $\int_1^\infty \frac{\sin x}{x}\frac{x^2}{x^2+1}\operatorname{arctg} x\,\mathrm{d}x$ (stačí vyšetřit neabsolutní konvergenci) e) $\int_0^\infty \frac{\log(1+x)}{x}\cos x\,\mathrm{d}x$

6. BONUS - příklady ze zkouškových písemek na MFF:

a) $\int_0^\infty \left(1+\frac{1}{x}\right)^x \frac{\sin(\sqrt{x})}{x}\,\mathrm{d}x$ U tohoto příkladu můžete bez ověřování použít informaci, že existuje okolí nekonečna, na kterém je funkce $(1+1/x)^x$ rostoucí.

b) $\int_1^\infty \frac{(x^3-1)(\log x)^\alpha}{(2+x^2)^2}\,\mathrm{d}x$ $(\alpha\in\mathbb{R})$ c) $\int_0^\infty \cos(x^\alpha+1)\,\mathrm{d}x$

Další příklady ze zkouškových písemek jsou např. na stránce doc. Zeleného zde:
`http://www.karlin.mff.cuni.cz/~zeleny/mff/MA_2/index_MA_2.php`

VIII. APLIKACE URČITÉHO INTEGRÁLU

1. Spočtěte obsah plochy vymezené křivkami:
a) $y=\frac{1}{1+x^2}$ a $y=\frac{x^2}{2}$ b) $y=x^2$ a $y=2-x$ c) $y=x^2$ a $y=\sqrt{x}$
d) $y^2=2x+1$ a $x-y-1=0$ e) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$

2. Spočtěte délku grafu funkce: a) $f(x)=x^{3/2},\ x\in[0,4]$ b) $f(x)=\frac{x^2}{2},\ x\in[0,1]$

3. Spočtěte délky následujících křivek: a) $y=\log x,\ x\in[\sqrt{3},\sqrt{8}]$ b) $x=\frac{y^2}{4}-\frac{\log y}{2},\ y\in[1,e]$ c) $x^2+y^2=1$ d) $x^{2/3}+y^{2/3}=a^{2/3}$

4. Určete objem a povrch pláště tělesa vzniklého rotací množiny

$$\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:\ x^2+(y-b)^2\le a^2\}\qquad(0\le a\le b)$$

5. Vyšetřete konvergenci řad a) $\sum_{n=2}^\infty \frac{1}{n\log n}$ b) $\sum_{n=2}^\infty \frac{1}{n\log^2 n}$

VIII. METRICKÉ PROSTORY

1. Ověřte, zda následující formule definují metriku na $\mathbb{R}$:
a) $\rho(x,y) = |x^3 - y^3|$ b) $\rho(x,y) = |x^2 - y^2|$

2. Ať ρ_1, ρ_2 jsou metriky na množině P. Musí být i funkce ρ definovaná níže metrikou na P?
a) $\rho = \max\{\rho_1, \rho_2\}$ b) $\rho = \min\{\rho_1, \rho_2\}$ c) $\rho = \min\{\rho_1, 1\}$

3. Na prostoru $\mathcal{C}([0,1])$ uvažujme supremovou metriku, tj. $\rho_s(f,g) = \max\{|f(t) - g(t)| : t \in [0,1]\}$.
a) Spočítejte $\rho_s(x, x^2)$.
b) Pro $n \in \mathbb{N}$ a $x \in [0,1]$ definujme $f_n(x) = \frac{\sin(nx+3)}{\sqrt{n+1}}$ a $g_n(x) = \frac{nx}{1+n^2x^2}$. Je posloupnost funkcí $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ konvergentní v metrice ρ_s k funkci $f(x) = 0$, $x \in [0,1]$? Platí analogické tvrzení pro posloupnost $(g_n)_{n=1}^{\infty}$?

4. Na prostoru $\mathcal{C}([0,1])$ uvažujme integrální metriku, tj. $\rho_i(f,g) = \int_0^1 |f(x) - g(x)| \, \mathrm{d}x$.
a) Spočítejte $\rho_i(x, x^2)$. b) Pro jaké $a \in (0,1)$ je vzdálenost $\rho_i(ax, x^2)$ nejmenší možná?

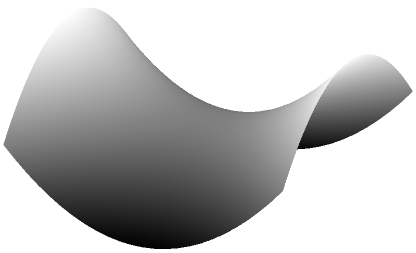
5. Uvažujme na $\mathbb{R}^2$ libovolnou metriku ρ. Která z následujících tvrzení jsou pravdivá? Která jsou pravdivá, pokud $\rho(x,y) = \|x - y\|$ pro nějakou normu na $\mathbb{R}^2$?
a) $5B(0,1) = B(0,5)$ (0 značí nulový vektor, $5A$ definujeme jako mnozinu $\{5a : a \in A\}$ pro $A \subset \mathbb{R}^2$)
b) $5B(x,1) = x + B(0,5)$, $x \in \mathbb{R}^2$

6. Rozhodněte, zda následující množiny jsou otevřené (resp. uzavřené). Zjistěte jejich vnitřek, uzávěr a hranici.
a) $\mathbb{N}$ b) $\mathbb{Q}$ c) $\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}$ d) $\{[x,y] \in \mathbb{R}^2 : x > 0, y \leq 0\}$ e) $\{[x,y] \in \mathbb{R}^2 : |x+y| > x+y\}$
f) $\{[x,y] \in \mathbb{R}^2 : |x - y| = x - y\}$ g) $\{[x,y] \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 + 2xy = 5\}$
h) $\{[x,y,z] \in \mathbb{R}^3 : x \geq 0, y > 0, x + y = 2, z \leq 0\}$ i) $\{f \in \mathcal{C}[0,1] : f(\frac{1}{2}) = 2\}$
j) $\{f \in \mathcal{C}[0,1] : f(\frac{1}{2}) \in (0,2)\}$ k) $\{f \in \mathcal{C}[0,1] : \int_0^1 f(x) \, \mathrm{d}x = 0\}$

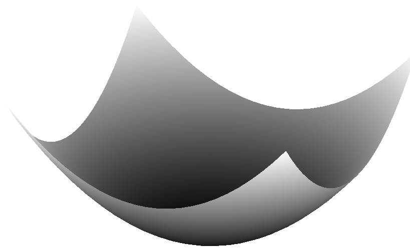
IX. FUNKCE VÍCE PROMĚNNÝCH - LIMITY, SPOJITOST, DERIVACE

1.Přiřaďte grafy funkcí k předpisům:

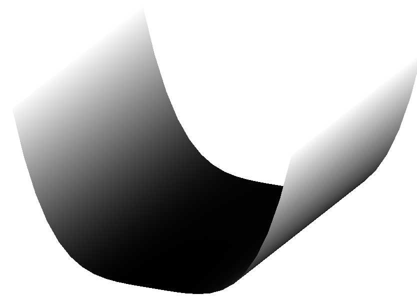
a)



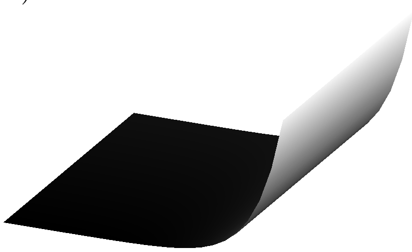
b)



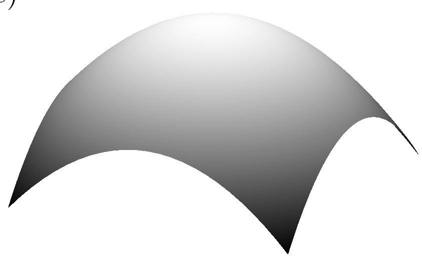
c)



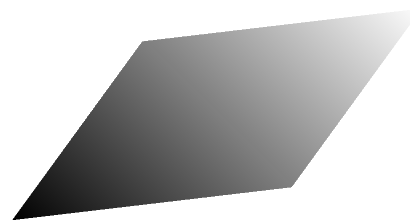
d)



e)



f)



i) x^2+y^2 ii) $exp(x)+y$ iii) $-x^2-y^2$ iv) $x+y$ v) x^2-y^2 vi) x^4+y

2. Zjistěte, zda existují limity a pokud ano, spočtěte je:

a) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sqrt{x^2y^2+1}-1}{x^2+y^2}$ b) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2}$ c) $\lim\limits_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ x+y\neq 0}} \frac{x-y}{x+y}$ d) $\lim\limits_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ xy\neq 0}} (x+y)\sin\frac{1}{x}\sin\frac{1}{y}$

e) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin(x^3+y^3)}{x^2+y^2}$ f) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2+1}-1}$ g) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{yx^2}{x^4+y^2}$ h) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x+y}{\sqrt{x^2+y^2}}$

i) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} (1+x^2y^2)^{\frac{1}{x^2+y^2}}$ j) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} (x^2+y^2)^{x^2y^2}$ k) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,3)} \frac{\sin(xy)}{x}$ l) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^6}{x^3+y^3}$

m) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x(x^2+y^2)^2}{1-\cos(x^2+y^2)}$ n) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{1-\cos(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)x^2y^2}$ o) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{e^{-\frac{1}{x^2+y^2}}}{x^4+y^4}$

3. Lze následující funkce spojitě rozšířit na $\mathbb{R}^2$?

a) $\frac{x^3-y^3}{x-y}$ b) $(x+y)\sin\frac{1}{x}\sin\frac{1}{y}$ c) $\frac{\sin(xy)}{x}$ d) $\frac{1-\cos(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)x^2y^2}$

4. Spočtěte parciální derivace funkcí všude, kde existují

a) x^my^n b) e^{xy} c) $xy+yz+zx$ d) $|x|\cdot|y|$ e) $|y+\cos x|$ f) $|\sin y-\sin x|$ g) $|\cos y-\sin x|$
h) $\left(\frac{x}{y}\right)^z$ i) $x^{\frac{y}{z}}$ j) $\sin(x^y)$ k) $f(x,y)=e^{\frac{-\pi}{x^2+3xy+3y^2}}$ pro $(x,y)\neq 0$, $f(0,0)=(0,0)$ l) $\sqrt{x+y^2}$

5. Určete a nakreslete definiční obor a vyšetřete parciální derivace funkcí (ze zkouškových písemek na FSV)

a) $\sqrt{e^{xy}-e}$ b) $\log\frac{1-|x|}{1-|y|}$ c) $\sqrt{e^{x^2+y^2}-e^4}$ d) $\sqrt{x^2-y^2}$ e) $\arcsin\frac{y^2+7}{x+5}$ f) $\log\frac{x^2+y+1}{1-\sqrt{x}}$

6. Mají následující funkce totální diferenciál v bodě $[0,0]$? (pokud v tomto bodě funkce není definována, spojitě ji dodefinujte)
a) $\sqrt{x^2+y^2}$ b) $\sqrt[3]{x+y^2}$ c) $|xy|$ d) $\sqrt[3]{x^3+y^3}$ e) $(x^2+y^2)\sin\frac{1}{x^2+y^2}$ f) $e^{-\frac{1}{x^2+y^2}}$

7. Vyšetřete, ve kterých bodech mají následující funkce totální diferenciál a spočtěte jej
a) $f(x,y)=\frac{x^5-y^5}{x^4+y^4}$ pro $[x,y]\neq[0,0]$, $f(0,0)=0$ b) $\max\{x^3,y^3\}$

8. Ať $F=(F_1,F_2):\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^2$ je zobrazení definované předpisem

$$F(x,y,z)=\begin{cases}(x\sin y\sin z, x^2\sin\frac{1}{x^2+y^2+z^2}) & \text{pro } (x,y,z)\in\mathbb{R}^3\setminus\{(0,0,0)\}\\ (0,0) & \text{pro } (x,y,z)=(0,0,0).\end{cases}$$

a) Ukažte, že v bodě $(\pi,1,0)$ existuje derivace zobrazení F a spočtěte její reprezentující matici.
b) Spočtěte $\frac{\partial F_2}{\partial x}(0,0,0)$, pokud existuje.

9. Ať $F=(F_1,F_2):\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^2$ je zobrazení definované předpisem

$$F(x,y,z)=((x+1)(y+1)^2(z+1)^3,\sin x\cos(y+2z)).$$

Zobrazení $G:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^3$ má v bodě $(1,0)$ derivaci reprezentovanou maticí

$$\begin{pmatrix}2 & 1\\ -1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}.$$

a) Ukažte, že zobrazení $G\circ F$ má v bodě $(0,0,0)$ derivaci a spočtěte příslušnou reprezentující matici.
b) Spočtěte derivaci funkce F_1 v bodě $(0,0,0)$ podle vektoru $(2,0,1)$.

10. Ať $F=(F_1,F_2,F_3,F_4):\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^4$ je zobrazení definované předpisem

$$F(x,y)=\left(\operatorname{arctg}(x+2y), x+y, (x^2+y^2)\frac{|x|}{1+|y|}, ye^x\right).$$

a) Ukažte, že v bodě $(1,-1)$ existuje derivace funkce F a spočtěte její reprezentující matici.
b) Spočtěte $\frac{\partial F_3}{\partial x}(0,0)$, pokud existuje.

11. Spočtěte parciální derivace funkce F
a) $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ dána předpisem $f(x,y)=x^2+y^2$; $\varphi_1,\varphi_2:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ dány předpisy $\varphi_1(r,s,t)=2r+s$, $\varphi_2(r,s,t)=t$; $F:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ dána předpisem $F(r,s,t)=f(\varphi_1(r,s,t),\varphi_2(r,s,t))$
b) $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ dána předpisem $f(x,y,z)=x+y^2+2z$; $\varphi_1,\varphi_2,\varphi_3:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ dány předpisy $\varphi_1(s,t)=3st$, $\varphi_2(s,t)=s^2+2t$, $\varphi_3(s,t)=t$; $F:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ dána předpisem $F(s,t)=f(\varphi_1(s,t),\varphi_2(s,t),\varphi_3(s,t))$