VÝSLEDKY

I. KONVERGENCE LEBESGUEOVA INTEGRÁLU

1. a) K (konverguje) b) K c) K d) je roven $-\infty$ e) K $\iff$ $k \in (1,2)$ f) K g) K h) K i) K

2. a) K $\iff$ $\alpha < 2$ b) K $\iff$ $(\alpha > 1) \vee (\alpha = 1 \wedge \beta < -1)$ c) K $\iff$ $(\alpha > -1) \vee (\alpha = -1 \wedge \beta < -1)$ d) K $\iff$ $\alpha^2 \le 1$ e) K $\iff$ $0 < \beta < \alpha < 1$ f) K $\iff$ $\alpha \in (0,1]$ g) K $\iff$ $\alpha \in (-1,1)$ h) K pro všechna $\alpha \in \mathbb{R}$ i) K $\iff$ $\alpha > 1$ j) K $\iff$ $\alpha < 3/2$

II. INTEGRACE POSLOUPNOSTÍ A ŘAD FUNKCÍ

1. a) 0 b) 0 c) 1 d) 0 e) $-\infty$

2. a) 0 b) ∞ c) $-\infty$ d) 0 e) 0

3. a) $-\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^2}$ b) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n+1)^2}$ c) nápověda: $\frac{x}{e^x-1} = \frac{x}{e^x} \cdot \frac{1}{1-e^{-x}} = xe^{-x} \sum_{n=0}^{\infty} e^{-nx}$, výsledek: $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^2}$ d) nápověda: analogie předchozího příkladu, výsledek: $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n+1)^2}$ e) nápověda: $\frac{x^{p-1}}{1+x^q} = x^{p-1} \sum_{n=0}^{\infty} (-x^q)^n$, výsledek: $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{p+nq}$ f) nápověda: použijte Taylorův rozvoj funkce cosinus, pak $e^{-x} \cos \sqrt{x} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n e^{-x} \frac{x^n}{(2n)!}$, výsledek: $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{n!}{(2n)!}$ g) nápověda: použijeme rozvoj logaritmu, pak $\log x \log(1-x) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} \log x$, výsledek: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{(n+1)^2} \right) = 1 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^2} = 2 - \frac{\pi^2}{6}$ h) nápověda: analogie předchozího příkladu, výsledek: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n(n+1)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{(n+1)^2} \right) \overset{(e)}{=} (-\log 2) - (\log 2 - 1) - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n+1)^2} = 1 - 2\log 2 - (\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^2} - 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n)^2}) = 1 - 2\log 2 - (\frac{\pi^2}{6} - 1 - 2\frac{1}{4} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}) = 2(1 - \log 2) - \pi^2/6 + \pi^2/12 = 2(1 - \log 2) - \pi^2/12$ i) nápověda: $\frac{\sin ax}{e^x - 1} = (\sin ax) e^{-x} \sum_{n=0}^{\infty} e^{-nx}$, výsledek: $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a}{a^2 + (n+1)^2}$ j) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$ k) $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} = -1 + \frac{1}{4} + \frac{\pi^2}{12}$ l) $-\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = -\frac{\pi^2}{6}$ m) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \cdot n!}$ n) $\sum_{n=0}^{\infty} (\frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{(n+2)^2}) = \frac{\pi^2}{3} - 1$ o) $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{8(n+1)} \overset{(e)}{=} \frac{\log 2}{8}$

III. INTEGRÁLY ZÁVISLÉ NA PARAMETRU

1. definiční obory: a) $[0, \infty)$ b) $(0, \infty)$ c) $\mathbb{R}$ d) $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ e) $(2, \infty)$ f) $(1, \infty)$ g) $(0, 1)$ h) $(-1, \infty)$ i) $(-1, \infty)$ j) $\mathbb{R}$ k) $(0, \infty)$

2. a) $\operatorname{sgn} a \cdot \frac{\pi}{2} \cdot \log(1 + |a|),\ a \in \mathbb{R}$ b) $\log(a+1),\ a \in (-1, \infty)$ c) $\frac{1}{2} \log(a+1),\ a \in (-1, \infty)$
d) $-\log(1+a),\ a \in (-1, \infty)$ e) $\operatorname{arctg} \frac{b}{a},\ a > 0,\ b \in \mathbb{R}$. Lze také zapsat: $-\operatorname{arctg} \frac{a}{b} + \frac{\pi}{2}$ pro $a, b > 0$; $-\operatorname{arctg} \frac{a}{b} - \frac{\pi}{2}$ pro $a > 0,\ b < 0$; 0 pro $a > 0,\ b = 0$ f) $\frac{1}{2} \log \frac{b}{a},\ a, b > 0$ nebo $a = b \neq 0,\ F(0,0) = 0$
g) $\operatorname{sgn} a \cdot \frac{\pi}{2} \log \left(\frac{a}{b} \right),\ ab > 0$ nebo $a = b \neq 0,\ F(0,0) = 0$ h) $\pi \arcsin a,\ a \in [-1, 1]$ i) $\pi(\log(1 + \sqrt{1 - a^2}) - \log 2),\ a \in [-1, 1]$
j) $\frac{\pi}{2} \log(a + \sqrt{1 + a^2}),\ a \in \mathbb{R}$ k) $\frac{\pi}{2} \log(a + \sqrt{1 + a^2}),\ a \in \mathbb{R}$ l) $\frac{\pi}{|b|} \log(|a| + |b|),\ b \neq 0$ m) $\ln \left(\frac{\sqrt{a^2+1}}{a} \right),\ a > 0$

IV. VÍCEROZMĚRNÁ INTEGRACE

1. a) $12 - \log 5$ b) $1/2$ c) $+\infty$ d) 7 e) $2/3(a-b)\sqrt{ab}$

2. a) $\pi/12$ b) $1/3$ c) $33/140$ d) $R^5 32/45$ e) 2 f) $1/3(\pi/3 + \sqrt{3}/2)$

3. a) 2π b) 2 c) $\dfrac{a^{10} b^6}{840 c^{12}}$ d) $4/27$ e) $\frac{\sqrt{6}}{3}$

4. a) $2a^2$ b) $\pi a^2 3/4$ c) $R^2(\pi/3 - \sqrt{3}/4)$ d) $5/8$ e) $a^2/60$ f) $\frac{1}{2}(b-a)\log(q/p)$ g) $\frac{\pi ab}{2}(a^2 + b^2)$

5. a) $\operatorname{sgn} a \cdot \frac{\pi}{2} \log(a/b)$ b) $\sqrt{\pi b} - \sqrt{\pi a}$ c) $\frac{1}{2} \log(b/a)$ d) $\log(b/a)$ e) $\pi(|a| - |b|)$ f) $\sqrt{\pi}(|a| - |b|)$

g) $\log(\frac{b+1}{a+1})$

6. a) $a^3\pi$ b) $a^3/60$ c) $\frac{2}{3}R^3(\pi - \frac{4}{3})$ d) $2\pi^2 Ra^2$ e) $\dfrac{a^7b^4c\pi}{192h^9}$ f) $\pi ca^2/2$ g) $\pi^2\sqrt{3}$

7. a) $\pi R^5 \frac{59}{480}$ b) $\frac{4}{5}abc\pi$ c) $\frac{13}{4}\pi$ d) $\frac{\pi}{10}$