CVIČENÍ 1

1. Teoretičtější příklady
a) Dokažte následující tvrzení (až je dokážete, je možné je používat jako "známá tvrzení")

Věta 1. Nechť P a Q jsou metrické prostory, $f, g\colon P \to Q$ jsou spojitá zobrazení a $M \subset P$ je hustá v P. Jestliže $f = g$ na M, pak $f = g$ na celém P.

Věta 2. Nechť (P, ρ) je metrický prostor a $A \subset P$. Pak funkce $x \mapsto \operatorname{dist}(x, A)$ je 1-Lipschitzovská na P.

Věta 3. Součin $X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_n$ úplných metrických prostorů $X_1, \ldots, X_n$ je též úplný.

Věta 4 (důsledek Bairovy věty)**.** Nechť P je úplný metrický prostor, $\{F_n\} \subset P$ je posloupnost uzavřených množin v P a $P = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$. Pak existuje $n \in \mathbb{N}$ takové, že F_n má neprázdný vnitřek.

2. Teoretičtější příklady, které by ale studenti opravdu měli ovládat
a) Nechť X je normovaný lineární prostor. Ukažte, že $B(x, r) = x + B(0, r)$ a $B(0, r) = rB(0, 1)$.
b) Ukažte, že $B(x, r)$ a $U(x, r)$ jsou konvexní množiny.
c) Nechť X je normovaný lineární prostor nad $\mathbb{K}$, $M \subset X$ a $\alpha \in \mathbb{K}$. Ukažte, že $\overline{\alpha M} = \alpha \overline{M}$.
d) Ukažte, že v normovaném lineárním prostoru platí $\overline{U(x, r)} = B(x, r)$, $\operatorname{Int} B(x, r) = U(x, r)$ a $\partial U(x, r) = \partial B(x, r) = S(x, r)$. Nalezněte příklad metrického prostoru, kde tyto rovnosti neplatí.

3. Další teoretičtější příklady
a) Ukažte, že vnitřek konvexní množiny v normovaném lineárním prostoru je konvexní.

b) Nechť X je normovaný lineární prostor a $Y \subset X$ je jeho vektorový podprostor. Ukažte, že $\overline{Y}$ je také vektorový podprostor X a že pokud $Y \neq X$, pak Y má prázdný vnitřek.

4. Konkrétnější příklady
a) Nechť je dána posloupnost $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ v $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ předpisem

$$f_n(k) := \frac{k+1}{k^2+2} + \frac{n+1}{n^2 k}, \quad n, k \in \mathbb{N}.$$

Uvažujte postupně Banachovy prostory $X \in \{c_0, \ell_1, \ell_2, \ell_3, \ell_\infty\}$. Zjistěte, zda f_n, $n \in \mathbb{N}$ jsou prvky Banachova prostoru X. Dále zjistěte zda je posloupnost f_n konvergentní v Banachových prostorech c_0 a ℓ_∞ (a pokud ano, určete její limitu).

b) Nechť je dána posloupnost funkcí $f_n : [0, 1] \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$ předpisem

$$f_n(x) := \frac{e^x - 1}{\sqrt[3]{x^4}} + \frac{n^2}{(n^2 - 1 + e^x)^2}, \quad n \in \mathbb{N}, x \in [0, 1].$$

Uvažujte postupně Banachovy prostory $X \in \{\mathcal{C}([0, 1]), L_1([0, 1]), L_2([0, 1]), L_3([0, 1]), L_\infty([0, 1])\}$. Zjistěte, zda f_n, $n \in \mathbb{N}$ jsou prvky Banachova prostoru X. Pokud ano, zjistěte zda je posloupnost f_n konvergentní v Banachově prostoru X (a pokud ano, určete její limitu).

5. Další vhodné příklady: viz. [1, příklady 1, 2, 7, 10, 12 (1)-(6), 14 (1)-(2), 15 (1)-(2), 19, 20]

[1] materiály prof. Kalendy, umístěny na webu zde:
`https://www2.karlin.mff.cuni.cz/~kalenda/data/ufa15-pr1.pdf`

CVIČENÍ 2

1. Teoretičtější příklady

a) Dokažte následující tvrzení (až jej dokážete, je možné je používat jako "známé tvrzení")

Věta 5. Nechť (P, ρ) a (Q, σ) jsou metrické prostory, Q je úplný, $M \subset P$ je hustá v P a $f : M \to Q$ je stejnoměrně spojité zobrazení. Pak existuje spojité rozšíření f na celé P. Toto rozšíření je určeno jednoznačně a je stejnoměrně spojité.

Věta 6. Prostory c, c_0 a ℓ_p pro $p \in [1, \infty)$ jsou separabilní.

Věta 7. Prostory $\ell_\infty(\mathbb{N})$, $c_0(I)$ a $\ell_p(I)$ pro $p \in [1, \infty]$ a nespočetnou množinu I nejsou separabilní.

2. Ukažte, že $\varphi : X \to \mathbb{K}$ je spojitý lineární funkcionál, spočtěte jeho normu a zjistěte zda φ své normy nabývá, jestliže

a) $X = \ell_1$, $\varphi((x_n)) = \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n} x_n$; b) $X = c_0$, $\varphi((x_n)) = \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{2^n} x_n$;
c) $X = \mathcal{C}([0, 1])$, $\varphi(f) = \int_0^1 (t - \frac{1}{2}) f(t) \, \mathrm{d}t$; d) $X = L_\infty([0, 1])$, $\varphi(f) = \int_0^1 (t - \frac{1}{2}) f(t) \, \mathrm{d}t$;
e) $X = \ell_1$, $\varphi((x_n)) = \sum_{n=1}^\infty (-1)^n x_n$; f) $X = \ell_1$, $\varphi((x_n)) = \sum_{n=1}^\infty (1 - \frac{1}{n}) x_{2n}$;
g) $X = \ell_2$, $\varphi((x_n)) = \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n} x_n$; h) $X = \ell_p$ (kde $p \in (1, \infty)$), $\varphi((x_n)) = \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n} x_n$;
i) $X = \mathcal{C}([0, 1])$, $\varphi(f) = f(0) - f(1)$; j) $X = L_\infty([0, 1])$, $\varphi(f) = \int_0^{1/2} f(t) \, \mathrm{d}t$;
k) $X = L_1([0, 1])$, $\varphi(f) = \int_0^1 t f(t) \, \mathrm{d}t$; l) $X = L_1([0, 1])$, $\varphi(f) = \int_0^1 (t - \frac{1}{2}) f(t) \, \mathrm{d}t$.

3. Další teoretické příklady

a) Nechť (x_n) je posloupnost v Banachově prostoru. Ukažte, že $\sum_{n=1}^\infty x_n$ je bezpodmínečně konvergentní právě tehdy, když $\sum_{k=1}^\infty x_{n_k}$ je konvergentní pro každou podposloupnost (x_{n_k}) posloupnosti (x_n). (*Hint:* použijte B-C podmínku a pro jednu implikaci navíc analogii důkazu Věty o charakterizaci bezpodmínečné konvergence z přednášky)
b) Jaký je množinový vztah mezi vektorovými prostory ℓ_p a ℓ_q pro $p < q$? Jaký je jejich vztah k prostoru c_0?
c) Jaký je množinový vztah mezi vektorovými prostory $L_p([0, 1])$ a $L_q([0, 1])$ pro $p < q$?
d) Jaký je množinový vztah mezi vektorovými prostory $L_p(\mathbb{R})$ a $L_q(\mathbb{R})$ pro $p < q$?
e) Nechť $p \in \{0\} \cup [1, \infty)$ a $a = (a_n)_{n=1}^\infty$ je prvkem prostoru ℓ_p (kde symbolem ℓ_0 rozumíme prostor c_0). Ukažte, že $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n e_n = a$.
f) Pro každé $p \in (1, \infty)$ nalezněte v prostoru ℓ_p bezpodmínečně konvergentní řadu, která není absolutně konvergetní.
g) Nalezněte v prostoru $\mathcal{C}([0, 1])$ bezpodmínečně konvergentní řadu, která není absolutně konvergetní.

4. Další vhodné příklady:

a) teoretičtější viz. [1, příklady 12 (7)-(9), 13, 14 (3), 15 (3)-(4), 16, 17, 18, 42 (1)-(2), 34, 43, 45]
b) počítací viz. [2, příklady z oddílů 1 a 2 - některé z nich použity výše; 1 je trochu těžší - spíše zkouškové obtížnosti]

[1] materiály prof. Kalendy, umístěny na webu zde:
`https://www2.karlin.mff.cuni.cz/~kalenda/data/ufa15-pr1.pdf`
[2] materiály prof. Kalendy, umístěny na webu zde:
`https://www2.karlin.mff.cuni.cz/~kalenda/data/ufa15-normy.pdf`

CVIČENÍ 3

1. Teoretičtější příklady
a) Dokažte následující tvrzení (až jej dokážete, je možné je používat jako "známé tvrzení")

Věta 8. Nechť K je kompaktní metrický prostor. Pak prostor $\mathcal{C}(K)$ je separabilní.

2. Ukažte, že $T : X \to Y$ je spojitý lineární operátor, spočtěte jeho normu a zjistěte zda existuje $x \in S_X$ splňující $\|Tx\| = \|T\|$. Dále zkoumejte následující otázky:

- **Je operátor T prostý? Pokud ne, zjistěte jeho jádro.**
- **Je operátor T na?**
- **Je operátor T izometrie, případně izomorfismus? Pokud ano, popište jeho obor hodnot a spočtěte normu inverzního operátoru.**

a) $X = Y = \ell_2$, $T((x_n)) = (0, x_1, x_2, \ldots)$; b) $X = Y = \ell_2$, $T((x_n)) = (x_2, x_3, x_4, \ldots)$;
c) $X = Y = \ell_2$, $T((x_n)) = \left(\frac{x_n}{n}\right)_{n=1}^{\infty}$; d) $X = Y = \ell_2$, $T((x_n)) = (\frac{n}{n+1} x_n)_{n=1}^{\infty}$;
e) $X = Y = \mathcal{C}([0, r])$, kde $r > 0$, $T(f)(t) = \int_0^t f(x)\,\mathrm{d}x$;
f) $X = \mathcal{C}([0, r])$, $Y = \mathcal{C}^1([0, r])$, kde $r > 0$, $T(f)(t) = \int_0^t f(x)\,\mathrm{d}x$;

3. Další vhodné příklady:
a) teoretičtější viz. [1, příklady 21-26, 28]
b) teoretičtější ke konečně-dimenzionálním prostorům viz. [1, příklady 37-38, 44]
c) počítací viz. [2, příklady (a)-(s) z oddílů 3 a 4 - některé z nich použity výše]
(výběr standardnějších: 3 a 4 (c), (e), (g), (i), (k), (n), (s); 3 a 4 (d) je trochu těžší)

[1] materiály prof. Kalendy, umístěny na webu zde:
`https://www2.karlin.mff.cuni.cz/~kalenda/data/ufa15-pr1.pdf`
[2] materiály prof. Kalendy, umístěny na webu zde:
`https://www2.karlin.mff.cuni.cz/~kalenda/data/ufa15-normy.pdf`

CVIČENÍ 4

1. Teoretičtější příklady

a) Dokažte následující tvrzení (až je dokážete, je možné je používat jako “známé tvrzení”)

Věta 9. Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ je lebesgueovsky měřitelná množina a $p \in [1, \infty)$. Pak $\mathcal{C}_c(\Omega)$ je hustá podmnožina $L_p(\Omega, \lambda)$, kde

$$\mathcal{C}_c(\Omega) := \{f : \Omega \to \mathbb{K}\colon f \text{ spojitá a } \{f \neq 0\} \text{ omezená}\}$$

Věta 10. Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ je lebesgueovsky měřitelná množina a $p \in [1, \infty)$. Pak prostor $L_p(\Omega, \lambda)$ je separabilní.

b) Nechť X je Banachův prostor a $Y \subset X$ uzavřený podprostor. Dokažte, že pro kvocientové zobrazení $q : X \to X/Y$ platí, že $q(B_X) = B_{X/Y}$ právě když pro každé $x \in X$ existuje $y \in Y$ splňující $\|x - y\| = d(x, Y)$.

c) Nechť $X = C([0, 1])$, $Y = \{f \in X\colon f|_{[0,1/2]} \equiv 0\}$. Pomocí předchozího cvičení ukažte, že pro kvocientové zobrazení $q : X \to X/Y$ platí, že $q(B_X) = B_{X/Y}$.

d) Dokažte, že na prostoru ℓ_∞/c_0 platí

$$\|\hat{x}\| = \limsup_{n\to\infty} |x_n|, \qquad x \in \ell_\infty.$$

2. Ukažte, že $T : X \to Y$ je spojitý lineární operátor, spočtěte jeho normu a zjistěte zda existuje $x \in S_X$ splňující $\|Tx\| = \|T\|$. Dále zkoumejte následující otázky: Je operátor T prostý? Pokud ne, zjistěte jeho jádro. Je operátor T na? Je operátor T izometrie, případně izomorfismus? Pokud ano, popište jeho obor hodnot a spočtěte normu inverzního operátoru.

a) $X = \mathcal{C}^1([0, 1])$, $Y = \mathcal{C}([0, 1])$, $T(f)(t) = f' - f$; b) $X = Y = L_p([0, 1])$, kde $p \in [1, \infty]$, $T(f)(t) = f(\sqrt{t})$;
c) $X = \mathcal{C}^2([0, 1])$, $Y = \mathcal{C}([0, 1])$, $T(f)(t) = f'' + f$; d) $X = Y = L_p([0, 1])$, kde $p \in [1, \infty]$, $T(f)(t) = (t - \frac{1}{2})f(t)$.

3. Úlohy ze zkouškových písemek z minulých let

a) Na prostoru $X = c_0 \oplus_1 \ell_2$ definujme funkcionály $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ předpisem

$$\varphi_1(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n}{2^n}, \quad \varphi_2(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{y_n}{2^n}, \quad \varphi_3(x, y) = \varphi_1(x, y) + \varphi_2(x, y)$$

pro $x = (x_n)_{n=1}^{\infty} \in c_0$ a $y = (y_n)_{n=1}^{\infty} \in \ell_1$. Ukažte, že $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3 \in X^*$, spočtěte jejich normy a určete, které z nich nabývají své normy a které nikoliv.

b) Nechť

$$Tf = \int_0^1 x^k f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Zjistěte, pro jaká $k \in \mathbb{Z}$ a $p \in [1, \infty)$ je $T \in (L_p([0, 1]))^*$. Pro tato $k \in \mathbb{Z}$ a $p \in [1, \infty)$ najděte normu $\|T\|$ a zjistěte, zda se jí nabývá.

c) Nechť $X = \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$. Definujme funkcionály φ_1 a φ_2 předpisem

$$\varphi_1(f) = \int_0^{1/3} f + \int_{2/3}^1 f, \quad \varphi_1(f) = \int_0^{1/3} f - \int_{2/3}^1 f, \quad f \in X$$

a podprostory

$$Y_1 = \{f \in X\colon f(0) = f(1)\}, \quad Y_2 = \{f \in X\colon f(0) = -f(1)\}.$$

Ukažte, že $\varphi_1, \varphi_2 \in X^*$. Spočtěte normy funkcionálů $\varphi_1|_{Y_1}, \varphi_1|_{Y_2}, \varphi_2|_{Y_1}$ a $\varphi_2|_{Y_2}$ a určete, které z nich nabývají své normy a které nikoliv.

4. Další vhodné příklady:
a) teoretičtější ke kvocientům viz. [3, příklady 16-23]
(17-18 nejsou příliš těžké, 19 je docela poučné protože prostor ℓ_∞/c_0 je v teorii neseparabilních prostorů celkem hojně používaný, 20-22 jsou zajímavé ale docela složité, 23 je užitečné si rozmyslet ale je to spíše cvičení z teorie míry než z funkcionální analýzy)
b) teoretičtější k projekcím viz. [4, příklady 13-15, 17-18]
(13-14 jsou celkem jednoduché, 15 je analogické jako řešený Příklad 53 ze skript a 18 je dosti poučné neboť se jedná o netriviální známou větu)
c) počítací viz. [2, příklady (u), (w)-(z) z oddílů 3 a 4] (některé použity výše)

[2] materiály prof. Kalendy, umístěny na webu zde:
`https://www2.karlin.mff.cuni.cz/~kalenda/data/ufa15-normy.pdf`
[3] materiály prof. Kalendy, umístěny na webu zde:
`https://www2.karlin.mff.cuni.cz/~kalenda/data/ufa15-pr2.pdf`
[4] materiály prof. Kalendy, umístěny na webu zde:
`https://www2.karlin.mff.cuni.cz/~kalenda/data/ufa15-pr3.pdf`

CVIČENÍ 5

Na pátém cvičení jsme psali zápočtovou písemku.

Další vhodné teoretické příklady:
a) teoretičtější k Hilbertovým prostorům viz. [1, příklady 31-32, 35-36]

[1] materiály prof. Kalendy, umístěny na webu zde:
`https://www2.karlin.mff.cuni.cz/~kalenda/data/ufa15-pr1.pdf`

CVIČENÍ 6

1. Ať X je jeden z reálných Banachových prostorů $X = \mathcal{C}(K,\mathbb{R})$, $X = c_0(I,\mathbb{R})$ a $X = \ell_p(I,\mathbb{R})$ pro $p \in [1,\infty]$. Zjistěte, zda komplexifikace $X_{\mathbb{C}}$ jsou přirozeně izometrické prostorům $\mathcal{C}(K,\mathbb{C})$, $c_0(I,\mathbb{C})$ a $\ell_p(I,\mathbb{C})$ pomocí zobrazení $X_{\mathbb{C}} \ni (f,g) \mapsto f + ig$.

2. Nechť X je normovaný lieární prostor a U otevřená konvexní množina obsahující 0. Ukažte, že existuje právě jeden sublineární funkcionál p na X, pro který platí $U = \{x \in X : p(x) < 1\}$. Ukažte, že p je spojitý.
(*Hint: Uvažte* $p(x) = \inf\{t > 0 : x \in tU\}$)

3. V následujícím příkladě je dán Hilbertův prostor H, jeho uzavřený podprostor Y a bod $x_0 \in H$. Najděte nějakou ortonormální bázi Y, napište vzorec pro ortogonální projekci na Y a najděte nejbližší bod v Y k bodu x_0.
a) $H = \mathbb{C}^3$, $Y = \{(x_1,x_2,x_3) \in \mathbb{C}^3 : \ ix_1 + ix_2 - x_3 = 0\}$, $x_0 = (i,2,0)$.
b) $H = L_2([-1,1])$, Y podprostor tvořený polynomy stupně nejvýše 2, $x_0(t) = \sin t$.
c) $H = L_2([-1,1], \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\lambda)$, Y podprostor tvořený polynomy stupně nejvýše 2, $x_0(t) = t^3$.
(připomeňme, že mírou $\mu = \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\lambda$ rozumíme borelovskou míru, pro kterou platí $\int_A f(t)\,\mathrm{d}\mu(t) = \int_A \frac{f(t)}{\sqrt{1-t^2}}\,\mathrm{d}t$).
d) $H = L_2([-1,1], e^{-t}\lambda)$, Y podprostor tvořený polynomy stupně nejvýše 2, $x_0(t) = t^5$.

3. Další vhodné příklady:
a) teoretičtější k Hahn-Banachově větě viz. [3, příklady 1-6]
b) počítací k Hilbertovým prostorům viz. [5, příklady 1-7]

[3] materiály prof. Kalendy, umístěny na webu zde:
`https://www2.karlin.mff.cuni.cz/~kalenda/data/ufa15-pr2.pdf`
[5] materiály prof. Kalendy, umístěny na webu zde:
`https://www2.karlin.mff.cuni.cz/~kalenda/data/ufa15-projekce.pdf`

CVIČENÍ 7

1. Nechť H je Hilbertův a $Y \subset H$ jeho podprostor. Ukažte, že pro každý funkcionál $f \in Y^*$ exituje právě jeden funkcionál $F \in H^*$ stejné normy, který rozšiřuje f. (*Hint: ukažte, že nutně $F = 0$ na $Y^\perp$*)

2. Najděte podprostor $Y \subset \ell_1$ a $f \in Y^*$, pro který existují dvě různá rozšíření na ℓ_1, která mají stejnou normu.

3. Nechť X je normovaný lineární prostor, Y jeho podprostor. Nechť $T : Y \to X$ je identické zobrazení. Ukažte, že $T^* : X^* \to Y^*$ je dáno vzorcem $T^*(x^*) = x^*|_Y$ pro $x^* \in X^*$.

4. Nechť X je normovaný lineární prostor a $f \in X^*$. Nejprve interpretujte rovnost $\mathbb{K} = \mathbb{K}^*$ (tj. popište příslušnou izometrii). Pak odvoďte vzorec pro $f^* : \mathbb{K}^* \to X^*$ jakožto prvek $\mathcal{L}(\mathbb{K}, X^*)$ při zjištěné identifikaci $\mathbb{K} = \mathbb{K}^*$.

5. Ukažte, že $T \in L(X, Y)$ a vyjádřete duální operátor $T^* \in L(Y^*, X^*)$ pomocí reprezentace duálů klasických prostorů. V případě, že X a Y jsou Hilbertovy, vyjádřete také hilbertovsky adjungovaný operátor $T^\star$.

a) $X = (\mathbb{C}^2, \|\cdot\|_2)$, $Y = (\mathbb{C}^3, \|\cdot\|_2)$, $T(x_1, x_2) = (x_1 + x_2, x_1 - x_2, 2x_1 + x_2)$;
b) $X = (\mathbb{C}^2, \|\cdot\|_2)$, $Y = (\mathbb{C}^3, \|\cdot\|_2)$, $T(x_1, x_2) = (x_1 + ix_2, (1 + i)x_1 - x_2, x_1 - 2ix_2)$;
c) $X = Y = \ell_2$, $T((x_n)) = (0, x_1, x_2, \ldots)$; d) $X = Y = \ell_2$, $T((x_n)) = (x_2, x_3, x_4, \ldots)$;
e) $X = Y = \ell_2$, $T((x_n)) = (x_1, ix_2, x_3, ix_4, \ldots)$; f) $X = Y = \ell_2$, $T((x_n)) = (x_1 - x_2, x_2 - 2x_1, x_3, x_4, \ldots)$;
g) $X = \ell_1$, $Y = c_0$, $T((x_n)) = (\frac{x_1+\ldots+x_n}{n})_{n=1}^\infty$; h) $X = \ell_1$, $Y = c_0$, $T((x_n)) = \left(\sum_{k=n}^\infty x_n\right)_{n=1}^\infty$;
i) $X = Y = L_p([0, 1])$, kde $p \in [1, \infty)$, $T(f)(t) = f(\sqrt{t})$; j) $X = Y = L_p([0, 1])$, kde $p \in [1, \infty)$, $T(f) = \chi_{[0,\frac{1}{2}]} \cdot f$.

6. Ukažte, že c^* je izometrický ℓ_1 a příslušnou izometrii popište.
(*Hint: Uvažte zobrazení $T : \ell_1(\mathbb{N} \cup \{\infty\}) \to c^*$ definované předpisem $T(f)(x) = \sum_{k=1}^\infty f(k)x_k + f(\infty) \lim_{k\to\infty} x_k$.*)

7. Další vhodné příklady:
a) teoretičtější k Hahn-Banachově větě viz. [3, příklady 7-13] a [4, příklad 16]
b) počítací k duálním a adjungovaným operátorům viz. [6, příklady 1 a 2 (a)-(m)]
(některé zmíněny výše)

[3] materiály prof. Kalendy, umístěny na webu zde:
`https://www2.karlin.mff.cuni.cz/~kalenda/data/ufa15-pr2.pdf`
[6] materiály prof. Kalendy, umístěny na webu zde:
`https://www2.karlin.mff.cuni.cz/~kalenda/data/ufa15-dualniop.pdf`

CVIČENÍ 8

1. a) Na prostoru $c_0 \oplus_2 \ell_1$ definujme funkcionál $\varphi : c_0 \oplus_2 \ell_1 \to \mathbb{K}$ předpisem

$$\varphi(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n + y_n}{2^n}, \qquad x = (x_n)_{n=1}^{\infty} \in c_0,\ y = (y_n)_{n=1}^{\infty} \in \ell_1.$$

Ukažte, že $\varphi \in (c_0 \oplus_2 \ell_1)^*$ a určete normu $\|\varphi\|$.
b) Na prostoru $X = L_\infty([0,\pi]) \oplus_1 \ell_3$ nad tělesem reálných čísel definujme funkcionál $\varphi : X \to \mathbb{R}$ předpisem

$$\varphi(f,y) = \int_0^\pi f(t)\cos t \,\mathrm{d}t + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{y_n}{n2^n}, \qquad f \in L_\infty([0,\pi]),\ y = (y_n)_{n=1}^{\infty} \in \ell_2.$$

Ukažte, že $\varphi \in X^*$ a určete normu $\|\varphi\|$.

2. V následujících příkladech je dán operátor $\varphi : C([0,1]) \to \mathbb{R}$. Nalezněte $\mu \in M([0,1])$ splňující, že μ reprezentuje funkcionál ϕ pomocí duality z Rieszovy věty o reprezentaci a určete hodnotu $\|\phi\|$.
a) $\phi(f) = \frac{f(0)+f(1)}{2} + \int_0^1 t f(t)\,\mathrm{d}t$ pro každé $f \in C([0,1])$; b) $\phi(f) = f(0) - \int_0^{1/2} f(2t)\,\mathrm{d}t$ pro každé $f \in C([0,1])$.

3. Ukažte, že $T \in L(X,Y)$ a vyjádřete duální operátor $T^* \in L(Y^*,X^*)$ pomocí reprezentace duálů klasických prostorů.
a) $X = \ell_1$, $Y = L_p([0,1])$, kde $p \in [1,\infty)$, $T((x_n))(t) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n t^n$, $t \in [0,1]$;
b) $X = \ell_1$, $Y = C([0,1])$, $T((x_n))(t) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n t^n$, $t \in [0,1]$;
c) $X = L_2([0,1])$, $Y = c_0$, $Tf = (\int_0^{2\pi} f(t)\cos kt\,\mathrm{d}t)_{k=1}^{\infty}$; d) $X = L_2([0,1])$, $Y = \ell_2$, $Tf = (\int_0^{2\pi} f(t)\cos kt\,\mathrm{d}t)_{k=1}^{\infty}$;
e) $X = Y = \mathcal{C}([0,1])$, $Tf(t) = f + f(1) - f(0)$; f) $X = Y = \mathcal{C}([0,1])$, $Tf(t) = f(1-t)$;
g) $X = Y = \mathcal{C}([-1,1])$, $Tf(t) = f(t^2)$; h) $X = Y = \mathcal{C}([0,1])$, $Tf(t) = \int_0^t f$;

4. Ať $k \in \mathbb{N}$.

(a) Ukažte, že $\varphi \in (C^k([0,1]))^*$ právě když existují $\mu_0,\dots,\mu_k \in M([0,1])$ splňující

$$\varphi(f) = \sum_{i=0}^{k} \int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}\mu_i(t), \qquad f^{(k)} \in C^k([0,1]).$$

a $\|\varphi\| = \max\{\|\mu_i\| : i = 0,\dots,k\}$.

- Ukažte, že $\varphi \in (C^k([0,1]))^*$ právě když existují $\alpha_0,\dots,\alpha_{k-1} \in \mathbb{K}$ a $\mu \in M([0,1])$ splňující

$$\varphi(f) = \sum_{i=0}^{k-1} \alpha_i f^{(i)}(0) + \int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}\mu(t), \qquad f^{(k)} \in C^k([0,1]).$$

3. Další vhodné příklady:
a) teoretičtější k reprezentaci duálních prostorů viz. [3, příklady 25 (1)-(4), 26 bez poznámky o reflexivitě, 29, 30 (1) a (2), 31, 32 (1) a (2), 33, 34, 35]
b) teoretičtější k anihilátorům a kanonickému vnoření do druhého duálu viz. [3, příklady 15, 24 (1) a (2), 27]
c) teoretičtější k duálním a adjungovaným operátorům viz. [4, příklady 23-30]
d) počítací k duálním a adjungovaným operátorům viz. [6, příklady 1 a 2 (n)-(y)]
(mnoho z nich je použito výše)

[3] materiály prof. Kalendy, umístěny na webu zde:
`https://www2.karlin.mff.cuni.cz/~kalenda/data/ufa15-pr2.pdf`
[6] materiály prof. Kalendy, umístěny na webu zde:
`https://www2.karlin.mff.cuni.cz/~kalenda/data/ufa15-dualniop.pdf`

CVIČENÍ 9

Studenti mohou při řešení následujících příkladů používat následující větu

Věta 11 (Arzela-Ascoli)**.** Nechť K je kompaktní metrický prostor a $F \subset C(K, \mathbb{R})$. Pak F je relativně kompaktní v $C(K, \mathbb{R})$ právě když je omezená a stejně spojitá.

Proof. Viz. [8, Věta 13.4.6]. □

1. Určete, zda je operátor $T : X \to Y$ kompaktní
a) $X = (\mathbb{K}^n, \|\cdot\|_2)$, $Y = (\mathbb{K}^4, \|\cdot\|)$, $T(x_1, x_2) = (x_1 + x_2, x_3 + 4x_4, x_2 - 3x_3, 4x_1 + 5x_2 + x_4)$
b) $X = Y = \ell_2$, $T((x_n)) = (0, x_3, x_4, x_5, x_6, \dots)$ c) $X = Y = \ell_2$, $T((x_n)) = (\frac{1}{\sqrt{n}} x_n)_{n=1}^{\infty}$
d) $X = \ell_{3/2}$, $Y = c_0$, $T((x_n)) = \big(\frac{x_1 + \ldots + x_{2n}}{\sqrt{n}}\big)_{n=1}^{\infty}$ e) $X = L_p([0, 1])$, $Y = L_p([0, \frac{\pi}{2}])$, kde $p \in [1, \infty)$, $T(f)(t) = f(\sin t)$
f) $X = \ell_1$, $Y = L_1([0, 1])$, $T((x_n))(t) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n t^n$ g) $X = Y = \mathcal{C}([0, 1])$, $T(f) = f - 3f(0) + 2f(1)$
h) $X = Y = \mathcal{C}([0, 1])$, $T(f)(t) = \int_0^1 \exp(2ts) f(s)\,\mathrm{d}s$ i) $X = L_1([0, 2\pi])$, $Y = c_0$, $T(f)(t) = (\int_0^{2\pi} f(t) \sin kt\,\mathrm{d}t)_{k=1}^{\infty}$

2. Dokažte následující tvrzení:
a) Nechť (e_n) je ortonormální posloupnost v Hilbertově prostoru H. Dokažte, že pak $e_n \xrightarrow{w} 0$.
Hint: použijte Besselovu nerovnost
b) Nechť $T \in L(X, Y)$ a $\{x_n\}$ je slabě konvergentní posloupnost v X. Pak $\{Tx_n\}$ je slabě konvergentní.
c) Pokud $\{x_n\}$ je posloupnost v ℓ_1, pak x_n konverguje slabě, právě když konverguje v normě (tj. ℓ_1 má **Schurovu vlastnost**).
Návod: Postupujte sporem: Pokud ne, pak v ℓ_1 existuje posloupnost $\{x_k\}$, která slabě konverguje k nule a přitom existuje $\varepsilon > 0$, že $\|x_k\| > \varepsilon$ pro každé $k \in \mathbb{N}$. Ze slabé konvergence plyne konvergence na každé souřadnici. Pomocí matematické indukce zkonstruujte rostoucí posloupnosti přirozených čísel $\{N_j\}$ a $\{M_j\}$, že $\sum_{i=N_j}^{\infty} |x_{M_{j-1}}(i)| < \frac{\varepsilon}{100}$ a $\sum_{i=1}^{N_j} |x_{M_j}(i)| < \frac{\varepsilon}{100}$ pro každé $j \in \mathbb{N}$ kde $M_0 = 1$ (tj. x_{M_j} má "98% supportu v $\{N_j, \dots, N_{j+1}\}$"). Následně najděte $f \in \ell_\infty = (\ell_1)^*$, že $f(x_{M_j}) > \frac{\varepsilon}{10}$ pro každé j a z toho odvoďte spor.
d) Položíme–li $f_n(x) = \sin(nx) \in L_1([0, 2\pi])$, pak $f_n \xrightarrow{w} 0$, ale $f_n \overset{\|\cdot\|}{\not\to} 0$. Odvoďte, že ℓ_1 není izomorfní $L_1([0, 1])$.
Hint: Pro důkaz $f_n \xrightarrow{w} 0$ použijte Riemannovo-Lebesgueovo Lemma z teorie Fourierových řad a fakt, že $\sin t = \frac{1}{2i}(e^{it} - e^{-it})$ pro $t \in \mathbb{R}$
e) Ukažte, že prostory c_0, ℓ_p, $p \in (1, \infty]$ a $\mathcal{C}([0, 1])$ nemají Schurovu vlastnost.
f) Položíme–li $f_n(x) = \sin(nx) \in L_1([0, 2\pi])$, pak $f_n \xrightarrow{w} 0$, ale $(f_n)^2 \xrightarrow{w} \frac{1}{2}$.
g) Položíme–li $\mu_n(A) = n\mu(A \cap [0, \frac{1}{n}]) \in \mathcal{M}([0, 1])$, pak $\mu_n \xrightarrow{w^*} \delta(0)$.

3. Další vhodné příklady:
a) teoretičtější k reflexivním prostorům viz. [3, příklady 24 (3), 25 (5), 32 (3)] a [4, příklad 31]
b) teoretičtější ke kompaktním operátorům viz. [4, příklady 32-39]
c) počítací ke kompaktním operátorům viz. [7, všechny příklady]

[3] materiály prof. Kalendy, umístěny na webu zde:
`https://www2.karlin.mff.cuni.cz/~kalenda/data/ufa15-pr2.pdf`
[4] materiály prof. Kalendy, umístěny na webu zde:
`https://www2.karlin.mff.cuni.cz/~kalenda/data/ufa15-pr3.pdf`
[7] materiály prof. Kalendy, umístěny na webu zde:
`https://www2.karlin.mff.cuni.cz/~kalenda/data/ufa15-kompakt.pdf`
[8] připravovaná skripta z mat. analýzy, umístěna na webu zde:
`https://www2.karlin.mff.cuni.cz/~pick/analyza.pdf`

CVIČENÍ 10

Na desátém cvičení jsme psali zápočtovou písemku.

1. Nechť $k \in C([0,1]^2)$. Pro $f \in C([0,1])$ definujme

$$Tf(t) = \int_0^1 f(s)k(s,t)\,\mathrm{d}s, \quad t \in [0,1].$$

Ukažte, že $T \in \mathcal{L}(C([0,1]), C([0,1]))$ a že T je kompaktní operátor.

2. Nechť $k \in L_2([0,1]^2)$. Pro $f \in L_2([0,1]^2)$ definujme

$$Tf(t) = \int_0^1 f(s)k(s,t)\,\mathrm{d}s, \quad t \in [0,1].$$

Ukažte, že $T \in \mathcal{L}(L_2([0,1]^2), L_2([0,1]^2))$ a že T je kompaktní operátor.

3. Další vhodné teoretické příklady:
a) teoretičtější k úplnosti v Banachových prostorech viz. [4, příklady 1-12]

[4] materiály prof. Kalendy, umístěny na webu zde:
`https://www2.karlin.mff.cuni.cz/~kalenda/data/ufa15-pr3.pdf`

———-VÝSLEDKY———-

CVIČENÍ 2

2. a) $\|\varphi\| = 1$, normy se nabývá například pro $x = e_1$ b) $\|\varphi\| = 1$, normy se nenabývá c) $\|\varphi\| = \frac{1}{4}$, normy se nenabývá d) $\|\varphi\| = \frac{1}{4}$, normy se nabývá pro $f(t) = \operatorname{sgn}(t - \frac{1}{2})$ e) $\|\varphi\| = 1$, normy se nabývá například pro $x = (\frac{(-1)^n}{2^n})_{n=1}^{\infty}$ f) $\|\varphi\| = 1$, normy se nenabývá g) $\|\varphi\| = \|(\frac{1}{n})\|_2$, normy se nabývá například pro $x = (\frac{1}{n} \cdot (\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i^2})^{-1/2})_{n=1}^{\infty}$ h) $\|\varphi\| = \|(\frac{1}{n})\|_q$, normy se nabývá například pro $x = (\frac{1}{n^{q-1}} \cdot (\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i^q})^{-1/p})_{n=1}^{\infty}$ i) $\|\varphi\| = 2$, normy se nabývá například pro $f(t) = 1 - 2t$ j) $\|\varphi\| = \frac{1}{2}$, normy se nabývá například pro $\chi_{[0,\frac{1}{2}]}$ k) $\|\varphi\| = 1$, normy se nenabývá l) $\|\varphi\| = \frac{1}{2}$, normy se nenabývá

3. b) pro $p < q$ máme $\ell_p \subsetneq \ell_q \subsetneq c_0$ c) pro $p < q$ máme $L_q([0,1]) \subsetneq L_p([0,1])$ d) pro $p < q$ máme $L_q(\mathbb{R}) \not\subset L_p(\mathbb{R})$ a $L_p(\mathbb{R}) \not\subset L_q(\mathbb{R})$

CVIČENÍ 3

Některé výsledky příkladů **3.-4.** ze zdroje `https://www2.karlin.mff.cuni.cz/~kalenda/data/ufa15-normy.pdf`:

a) T je izometrie, není na, $\operatorname{Rng} T = \{x\colon x(1) = 0\}$
b) $\|T\| = 1$, normy se nabývá, T není prostý a je na, $\operatorname{Ker} T = \{x\colon x(i) = 0 \text{ pro každé } i \neq 1\}$
c) T je izometrie na
e) $\|T\| = 1$, normy se nabývá, T není prostý a není na, $\operatorname{Ker} T = \{x\colon x(2i) = 0, i \in \mathbb{N}\}$
f) $\|T\| = 1$, normy se nabývá, T je prostý a není na, $\operatorname{Rng} T = \{x\colon (nx_n)_{n=1}^{\infty} \in \ell_2\}$, není izomorfismus
g) $\|T\| = 2$, normy se nabývá, T je prostý a na, je izomorfismus
h) $\|T\| = 1$, normy se nenabývá, T je prostý a na, je izomorfismus
i) $\|T\| = 1$, normy se nabývá, T je prostý a není na, $\operatorname{Rng} T = \{x \in \ell_\infty\colon (x_n - x_{n-1})_{n=1}^{\infty} \in \ell_1\}$ (kde $x_0 := 0$), není izomorfismus
k) $\|T\| = 3$, normy se nabývá, T je prostý a na, je izomorfismus
l) $\|T\| = r$, normy se nabývá, T je prostý a není na, není izomorfismus
n) $\|T\| = \frac{1}{2}$, normy se nabývá, T je prostý, není izomorfismus
r) $\|T\| = r + 1$, normy se nabývá, T je prostý a není na, $\operatorname{Rng} T = \{f\colon f(0) = 0\}$, je izomorfismus
s) $\|T\| = 1$, normy se nenabývá, T není prostý a je na, $\operatorname{Ker} T = \{f\colon f \equiv \text{const}\}$, není izomorfismus

CVIČENÍ 4

2. a) $\|T\| = 1$, normy se nabývá, T není prostý a je na, $\operatorname{Ker} T = \{ce^t\colon c \in \mathbb{R}\}$
b) pro $p = \infty$ je T isometrie na; pro $p \in [1, \infty)$ je $\|T\| = 2^{1/p}$, normy se nenabývá, T je prostý a není na, není izomorfismus
c) $\|T\| = 1$, normy se nabývá, T není prostý a je na, $\operatorname{Ker} T = \operatorname{span}\{\sin(t), \cos t\}$, není izomorfismus
d) $\|T\| = \frac{1}{2}$, normy se nabývá pouze pokud $p = \infty$, je prosté a není na, není isomorfismus.
3. a) $\|\varphi_1\| = 1$, nenabývá se; $\|\varphi_2\| = \frac{1}{\sqrt{3}}$, nabývá se; $\|\varphi_3\| = 1$, nenabývá se
(podrobnější postup řešení viz. `https://www2.karlin.mff.cuni.cz/~kalenda/pis-fsv/1516/pisufa.htm`
b) $T \in (L_p([0,1]))^*$ právě když $k \geq 0$, pro $p = 1$ je $\|T\| = 1$ a normy se nabývá právě když $k = 0$; pro $p \in (1, \infty)$ je $\|T\| = \|x^k\|_q = \sqrt[q]{\frac{p-1}{kp+p-1}}$ kde $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ a normy se nabývá pro každé $k \geq 0$
c) $\|\varphi_1|_{Y_1}\| = \|\varphi_1|_{Y_2}\| = \|\varphi_2|_{Y_1}\| = \|\varphi_2|_{Y_2}\| = \frac{2}{3}$, normy nabývají pouze funkcionály $\varphi_1|_{Y_1}$ a $\varphi_2|_{Y_2}$.

(podrobnější postup řešení viz. `https://www2.karlin.mff.cuni.cz/~kalenda/pis-fsv/1516/pisufa.htm`

CVIČENÍ 6

3. a) ON báze Y je například $\{\frac{1}{\sqrt{2}}(1,0,i), \frac{1}{\sqrt{6}}(-1,2,i)\}$ (vznikne ortogonalizací báze $\{(1,0,i),(0,1,i)\}$), OG projekce dána předpisem $P_Y x = (\frac{2}{3}x_1 - \frac{1}{3}x_2 - \frac{i}{3}x_3, -\frac{1}{3}x_1 + \frac{2}{3}x_2 - \frac{i}{3}x_3, \frac{i}{3}x_1 + \frac{i}{3}x_2 + \frac{2}{3}x_3)$, nejbližším bodem v Y k bodu $x_0 = (i,2,0)$ je bod $\frac{1}{3}(-2+2i, 4-i, -1+2i)$.
b) ON báze Y je například $\{\frac{1}{\sqrt{2}}, \sqrt{\frac{3}{2}}x, \sqrt{\frac{5}{8}}(3x^2-1)\}$ (vznikne ortogonalizací báze $\{1,x,x^2\}$), OG projekce dána předpisem

$$P_y f(x) = \Big(\frac{45}{8}x^2 - \frac{5}{8}\Big)\int_{-1}^{1} t^2 f(t)\,\mathrm{d}t + \frac{3}{2}x\int_{-1}^{1} t f(t)\,\mathrm{d}t + \Big(-\frac{15}{8}x^2 + \frac{9}{8}\Big)\int_{-1}^{1} f(t)\,\mathrm{d}t,$$

nejbližším bodem v Y k bodu $x_0 = \sin t$ je bod $f(x) = 3x(\sin 1 - \cos 1)$.
c) ON báze Y je například $\{\frac{1}{\sqrt{\pi}}, \sqrt{\frac{2}{\pi}}x, \sqrt{\frac{2}{\pi}}(2x^2-1)\}$ (vznikne ortogonalizací báze $\{1,x,x^2\}$), OG projekce dána předpisem

$$P_y f(x) = \Big(\frac{8}{\pi}x^2 - \frac{4}{\pi}\Big)\int_{-1}^{1} \frac{t^2 f(t)}{\sqrt{1-t^2}}\,\mathrm{d}t + \frac{2}{\pi}x\int_{-1}^{1} \frac{t f(t)}{\sqrt{1-t^2}}\,\mathrm{d}t + \Big(-\frac{4}{\pi}x^2 + \frac{3}{\pi}\Big)\int_{-1}^{1} \frac{f(t)}{\sqrt{1-t^2}}\,\mathrm{d}t,$$

nejbližším bodem v Y k bodu $x_0 = \sin t$ je bod $f(x) = \frac{3}{4}x$.
d) ON báze Y je například $\{1, x-1, \frac{x^2}{2} - 2x + 1\}$, OG projekce je dána vzorcem

$$P(f)(x) = (\tfrac{x^2}{4} - x + \tfrac{1}{2})\cdot\int_0^\infty t^2 e^{-t}\,\mathrm{d}t + (-x^2+5x-3)\cdot\int_0^\infty t e^{-t}\,\mathrm{d}t + (\tfrac{x^2}{2} - 3x + 3)\cdot\int_0^\infty e^{-t}\,\mathrm{d}t,$$

nejbližší bod je $f(x) = 600x^2 - 2520x + 720$.

CVIČENÍ 7

5. a) $T^*(y_1,y_2,y_3) = (y_1+y_2+2y_3, y_1-y_2+y_3) = T^\star(y_1,y_2,y_3)$; b) $T^*(y_1,y_2,y_3) = (y_1+(1+i)y_2+y_3, iy_1-y_2-2iy_3)$, $T^\star(y_1,y_2,y_3) = (y_1+(1-i)y_2+y_3, -iy_1-y_2+2iy_3)$; c) $T^*((y_n)) = T^\star((y_n)) = (y_2,y_3,y_4,\dots)$; d) $T^*((y_n)) = T^\star((y_n)) = (0,y_1,y_2,y_3,\dots)$; e) $T^*((y_n)) = (y_1, iy_2, y_3, iy_4, \dots)$, $T^\star((y_n)) = (y_1,-iy_2,y_3,-iy_4,\dots)$; f) $T^*((y_n)) = T^\star((y_n)) = (y_1-2y_2, y_2-y_1, y_3, y_4, \dots)$; g) $T^*((y_n)) = (\sum_{k=n}^\infty \frac{y_k}{k})_{n=1}^\infty$; h) $T^*((y_n)) = (\sum_{k=1}^n y_k)_{n=1}^\infty$; i) $T^*(g)(t) = 2tg(t^2)$; j) $T^*(g) = \chi_{[0,\frac{1}{2}]}\cdot g$.

CVIČENÍ 8

1. a) $\|\varphi\| = \frac{\sqrt{5}}{2}$ b) $\|\varphi\| = 2$. **2.** a) $\mu = \frac{\delta_0+\delta_1}{2} + t\lambda$ b) $\delta_0 - \frac{1}{2}\lambda$
3. a) $T^*(g) = \big(\int_0^1 g(t)t^n\,\mathrm{d}t\big)_{n=1}^\infty$, $g \in L_q([0,1])$ b) $T^*(\mu) = \big(\int_{[0,1]} t^n\,\mathrm{d}\mu(t)\big)_{n=1}^\infty$, $\mu \in M([0,1])$
c) $T^*((y_n))(t) = \sum_{n=1}^\infty y_n\cos(nt)$ (řada konverguje absolutně v $L_\infty([0,2\pi])$) d) $T^*((y_n))(t) = \sum_{n=1}^\infty y_n\cos(nt)$ (řada konverguje v prostoru $L_2([0,2\pi])$) e) $T^*(\mu) = \mu + \mu([0,1])(\delta_1-\delta_0)$ f) $T^*(\mu)(A) = \mu(\{t\in[0,1]:\ 1-t\in A\})$ pro $A\subset[0,1]$ borelovskou g) $T^*(\mu)(A) = \mu(\{t\in[-1,1]:\ t^2\in A\})$ pro $A\subset[-1,1]$ borelovskou h) $T^*(\mu)(A) = \int_A \mu([t,1])\,\mathrm{d}t$ pro $A\subset[0,1]$ borelovskou

CVIČENÍ 9

1. a) ano b) ne c) ano d) ano e) ne f) ano g) ne h) ano i) ne

CVIČENÍ 11

1. Pro následující operátory ukažte že $T \in \mathcal{L}(X)$ a určete $\sigma(T)$ a $\sigma_{\mathrm{p}}(T)$.
a) $X = \ell_2$, $T((x_n)) = (x_2, x_3, \dots)$;
b) $X = \ell_2$, $T((x_n)) = (0, x_1, x_2, \dots)$;
c) $X = \ell_2$, $T((x_n)) = (-x_2, x_1, -\frac{1}{2}x_4, x_3, -\frac{1}{3}x_6, x_3, \dots)$;
(v tomto příkladu uvažujte pouze prostory nad tělesem komplexních čísel)
d) $X = c_0 \oplus_1 \ell_2$, $T(x, y) = (y, 0)$ pro $(x, y) \in c_0 \times \ell_2$;
e) $X = \ell_2$, $T((x_n)) = (x_1, x_2 - \frac{x_1}{1}, x_3 - \frac{x_2}{2}, x_4 - \frac{x_3}{3}, \dots)$;

2. Nechť $X = c_0$, nebo $X = \ell_p$ pro nějaké $p \in [1, \infty)$. Nechť je dále dána posloupnost $(a_n)_{n=1}^{\infty} \in \ell_\infty$ a operátor $T : X \to X$ definovaný předpisem

$$T(x) = (a_n x_n)_{n=1}^{\infty}, \qquad x \in X.$$

Ukažte, že $T \in \mathcal{L}(X, X)$, najděte $\sigma(T)$ a $\sigma_{\mathrm{p}}(T)$ a zjistěte, kdy je T kompaktní.

3. Další vhodné příklady:
a) teoretičtější k vyšetřování spektra viz. [4, příklady 41,43,45,46];
b) počítací k vyšetřování spektra viz. [8, příklady 3,4,7-10].

[4] materiály prof. Kalendy, umístěny na webu zde:
`https://www2.karlin.mff.cuni.cz/~kalenda/data/ufa15-pr3.pdf`
[8] materiály prof. Kalendy, umístěny na webu zde:
`https://www2.karlin.mff.cuni.cz/~kalenda/data/ufa15-spektrum.pdf`

Výsledky:
1. a) $\sigma_{\mathrm{p}}(T) = \{\lambda \in \mathbb{K} : |\lambda| < 1\}$, $\sigma(T) = B_{\mathbb{K}}$ b) $\sigma_{\mathrm{p}}(T) = \emptyset$, $\sigma(T) = B_{\mathbb{K}}$ c) $\sigma_{\mathrm{p}}(T) = \{\pm\frac{i}{\sqrt{n}} : n \in \mathbb{N}\}$, $\sigma(T) = \{0\} \cup \sigma_{\mathrm{p}}(T)$ d) $\sigma(T) = \sigma_{\mathrm{p}}(T) = \{0\}$ e) $\sigma_{\mathrm{p}}(T) = \emptyset$, $\sigma(T) = \{1\}$;

CVIČENÍ 12

Na cvičení jsme se věnovali především příkladům na výpočet spektra ze sbírky řešených příkladů. Další příklady k procvičení jsou níže.

1. Dokažte následující tvrzení:
a) Nechť X je Banachův a $T \in \mathcal{L}(X)$ má levý inverz S_1 a pravý inverz S_2. Dokažte, že T je invertovatelný a $S_1 = S_2 = T^{-1}$.
b) Nechť X je Banachův a $T \in \mathcal{L}(X)$ je invertibilní (tj. T je izomorfismus X na X). Ukažte, že $\lambda \in \sigma(T)$ právě když $\lambda^{-1} \in \sigma(T^{-1})$.
c) Nechť X je Banachův a $T \in \mathcal{L}(X)$ je izometrie X na X. Ukažte, že pak $\sigma(T) \subset \{\lambda \in \mathbb{K} : |\lambda| = 1\}$.

2. Nechť $T : \ell_2 \to \ell_2$ je definován předpisem

$$T((x_n)) = \left(\tfrac{x_{n+1}}{n}\right)_{n=1}^{\infty}, \qquad x \in \ell_2.$$

a) Nalezněte předpis pro $T^\star$; b) Dokažte, že operátor $T^\star T$ je kompaktní a samoadjungovaný;
c) Diagonalizujte $T^\star T$, tj. nalezněte posloupnost čísel $\{\lambda_n\}$ a ortonormální posloupnost $\{z_n\}$ splňující

$$T^\star T x = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \langle x, z_n \rangle z_n, \qquad x \in \ell_2.$$

3. Nechť

$$K(s,t) = \begin{cases} (1-s)t, & 0 \le t \le s, \\ (1-t)s, & s \le t \le 1, \end{cases}$$

a definujme operátor $T \in \mathcal{L}(L_2([0,1]))$ rovností

$$T(f)(s) = \int_0^1 K(s,t) f(t) dt, \quad s \in [0,1].$$

Dokažte, že:
a) T je kompaktní samoadjungovaný operátor;
b) Pro každé $f \in L_2([0,1])$ je Tf spojitá funkce s.v. a pro každé $f \in C([0,1])$ platí že $(Tf)'' = -f$ s.v.;
c) Vlastní čísla operátoru T jsou čísla $\frac{1}{n^2\pi^2}$, $n \in \mathbb{N}$, odpovídající vlastní vektory jsou $\sin(n\pi x)$ a každý vlastní prostor je jednorozměrný.
d) Z Hilbert-Schmidtovy věty pak odvoďte, že

$$Tf(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2\pi^2} \Big(\int_0^1 f(t) \sin(n\pi t)\, \mathrm{d}t \Big) \sin(n\pi t), \qquad f \in L_2([0,1]).$$

CVIČENÍ 13

Na cvičení jsme se věnovali především příkladům na Fourierovu transformaci ze sbírky řešených příkladů.